Matematica e musica - parte VII

Largo alle terze e alle seste!

Riprendiamo l'argomento dei suoni armonici e l'esempio della nota suonata sul pianoforte. Supponiamo che si tratti di un do$_3$, ovvero il do centrale dello strumento, contraddistinto dalla frequenza F pari a circa 261,6 hertz. Gli armonici generati avranno le seguenti frequenze:

- primo armonico: F (circa 261,6 hertz)
- secondo armonico: 2F (circa 523,2 hertz)
- terzo armonico: 3F (circa 784,8 hertz)
- quarto armonico: 4F (circa 1046,4 hertz)

e così via.

Ora, complichiamo le cose, e immaginiamo di premere insieme due tasti sul nostro pianoforte. Ognuna delle due note trascinerà con sé il suo treno di armonici a frequenze multiple della fondamentale, un po' come una locomotiva che traina lungo la ferrovia i vagoni agganciati dietro di sé.

Supponiamo che vi siano molte frequenze comuni a entrambi i "treni" di armonici. È ragionevole pensare che in questo caso le due note suonate risultino al nostro ascolto particolarmente affini, imparentate, e quindi, per usare un termine ormai familiare, consonanti. Viceversa, se le frequenze comuni sono rare, è legittimo ipotizzare che il nostro orecchio percepisca le due note come incompatibili e provi una sensazione di "stonatura".

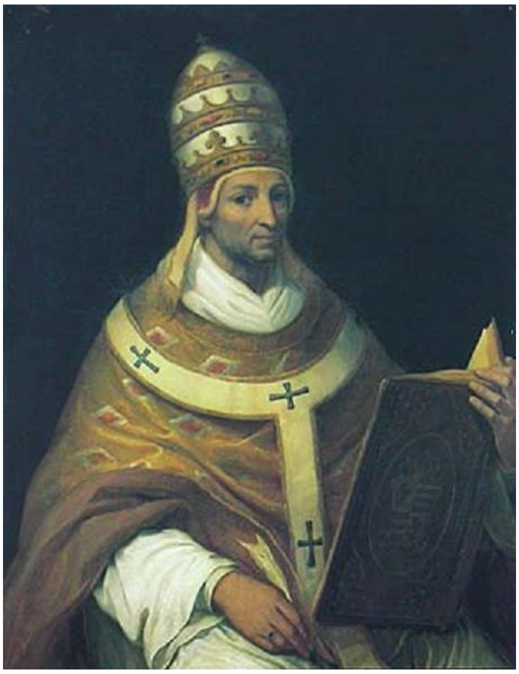
Inoltre, dire che il rapporto tra le frequenze F_1 e F_2 delle due note è "semplice" equivale ad affermare che $\frac{F_1}{F_2} = \frac{p}{q}$, cioè $pF_2 = qF_1$, con p e q piccoli. Da ciò segue che il p-esimo armonico della prima nota coincide con il q-esimo armonico della seconda. Essendo p e q piccoli, abbiamo trovato un armonico comune già tra i primi armonici delle due note, che sono anche i più intensi: e ne troveremo altri in seguito. Quando invece il rapporto tra le due frequenze non è semplice, gli armonici comuni, se esistono, vanno cercati molto più in là, e il loro contributo sarà molto meno significativo. In definitiva, quanto più semplice è il rapporto tra le frequenze delle due note, tanto maggiore sarà il numero di armonici comuni. Ecco quindi finalmente spiegata l'intuizione di Pitagora: l'incontro di due note

(ovvero l'intervallo tra di loro) è tanto più consonante quanto più "semplice" è il rapporto tra le rispettive frequenze.
In questi ragionamenti il pensatore di Samo era però sostenuto unicamente da considerazioni astratte e da vincoli numerologici (ricordate la *tetraktys*?), e nemmeno Tolomeo e Zarlino avevano la benché minima conoscenza dei suoni armonici. Occorrerà attendere l'alba del XVIII secolo, e in particolare le ricerche dello scienziato francese Joseph Sauveur, per comprendere le basi acustiche dei suoni armonici e la loro relazione con le scale musicali.

Torniamo ora al nostro esempio del do_3: quali sono i suoi suoni armonici? Il primo corrisponde al do_3 stesso, e ha frequenza F. Il secondo ha frequenza 2F, cioè doppia rispetto a quella del do_3: distando un'ottava dalla nota fondamentale, è ovviamente un do_4. Il terzo ha frequenza $3F = 2\left(\frac{3}{2}\right)F$, cioè dista un'ottava più una quinta dalla nota fondamentale, ed è quindi un sol_4. Il quarto ha frequenza $4F = 2 \cdot 2F$, cioè dista due ottave dalla nota fondamentale, ed è quindi un do_5. Il quinto ha frequenza $5F = 2 \cdot 2\left(\frac{5}{4}\right)F$, cioè dista due ottave più una terza (maggiore) dalla nota fondamentale, ed è quindi un mi_5. Il sesto ha frequenza $6F = 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)F$, cioè dista due ottave più una quinta dalla nota fondamentale, ed è quindi un sol_5.
Ricapitolando, tra i primi suoni armonici generati da una nota di do troviamo il do stesso, il mi e il sol. Se guardiamo gli armonici prodotti da un mi, troviamo ovviamente il mi stesso, e tra gli armonici del sol c'è il sol stesso.
In base ai ragionamenti precedenti, gli intervalli di ottava, di quinta e di terza (maggiore) devono quindi essere considerati consonanti: a questi dobbiamo aggiungere la quarta, in quanto complementare della quinta, e la sesta minore, complementare della terza maggiore. Nulla di sorprendente per quanto riguarda ottava, quinta e quarta, ritenute consonanti già dai pitagorici. La novità è il riconoscimento degli intervalli di terza maggiore e di sesta minore come consonanti: ciò che aveva fatto Zarlino con la scala naturale è quindi confermato anche dalla fisica. Oltre alla terza maggiore e alla sesta minore, il buon Gioseffo aveva associato a rapporti semplici (e quindi reso consonanti) anche la terza minore e il suo complementare, la sesta maggiore.
Lo sdoganamento delle terze e delle seste aveva cominciato a verificarsi nella pratica musicale già prima dell'anno Mille, con la nascita della polifonia, ovvero la sovrapposizione

di due o più voci che si evolvono in parallelo. Pitagoricamente, venivano preferiti a tale scopo gli intervalli di ottava, di quinta e di quarta, ma ben presto si cominciò a sperimentare anche combinazioni di note separate da intervalli di terza o di sesta.
Nel 1324, durante il periodo della cattività avignonese, il papa Giovanni XXII arrivò perfino a proibire l'uso di questi intervalli nella bolla "Docta sanctorum patrum", che pretendeva di arrestare lo sviluppo della polifonia e restaurare il canto gregoriano monodico. Ma il tentativo pontificio (per fortuna) non ebbe successo: la polifonia trionfò, e con essa la nuova scala naturale.

Paolo Alessandrini



Papa Giovanni XXII (da Wikimedia - https://it.wikipedia.org/wiki/Papa_Giovanni_XXII)