Da Flatlandia ai giochi in 4 dimensioni

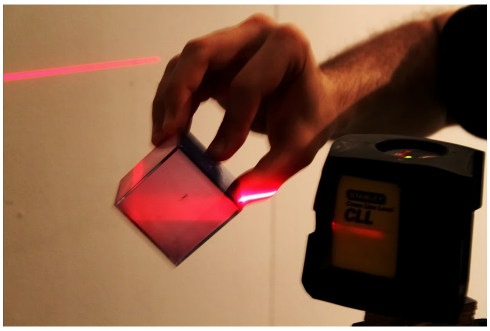
di Riccardo Moschetti e Cesco Reale

4D - immaginare la quarta dimensione spaziale
Laboratorio presentato al Festival della Scienza 2012
Ideazione: Cesco Reale (Festival di Giochi Matematici, www.tuttoenumero.it), Roberto Giunti (Liceo Leonardo di Brescia)
Realizzazione: Luciano Franceschi (CEMEA Veneto)
Revisione scientifica : Etienne Ghys (Ecole Normale Supérieure Lyon)
Con il supporto del Festival della Scienza.

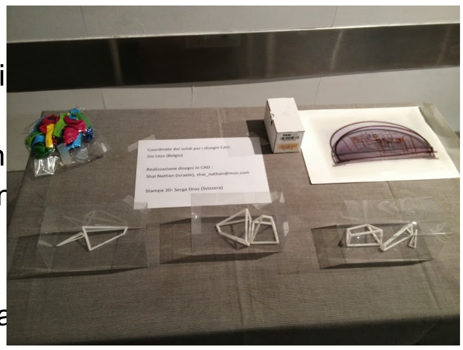
Nel 2012, al Festival della Scienza di Genova, ho visitato un laboratorio sulla quarta dimensione - argomento che i lettori di XlaTangente conoscono bene. Ho trovato vari spunti interessanti e così ho pensato di proporre all'autore Cesco Reale di parlarne proprio qui, insieme a me.

Il giro visita propone inizialmente la visione di un piccolo video tratto dal film "Flatland - the movie", ispirato al romanzo di E. Abbott, in cui un quadrato scopre la terza dimensione. In questa parte della mostra si spiega a un'entità bidimensionale il concetto di terza dimensione, per arrivare con l'analogia a far vedere come noi esseri 3D possiamo immaginare la quarta. Con questa filosofia la mostra propone due diversi percorsi: sezioni e proiezioni.

Il percorso delle sezioni

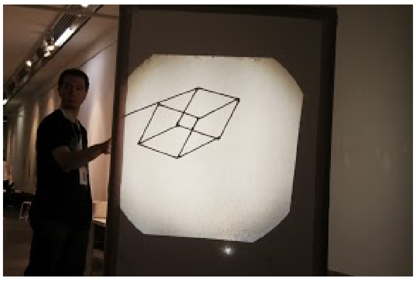


Nel caso delle sezioni si "affetta" l'oggetto con spazi di dimensione più piccola. (IMMAGINE 1: sezione di cubo visualizzata con una livella laser). Questo viene proposto nel caso del passaggio dal 2D al 3D con il metodo di un solido riempito di fumo che può essere illuminato da una livella laser. La luce laser evidenzia una sezione del solido. Variando la posizione del laser si possono così osservare diverse sezioni. Nel caso del passaggio dal 3D al 4D, un'attività si ispira al racconto di Abbott: come la sfera 3D di Flatlandia si mostra al quadrato attraverso le sue sezioni 2D, cosí gonfiando e sgonfiando un palloncino si osservano le sezioni 3D di una sfera 4D. Una seconda attività invece consiste nell'ordinare "temporalmente" le sezioni tridimensionali di un polícoro (figura 4D, analoga ai poligoni in 2D e ai poliedri in 3D). Tali sezioni sono state realizzate per mezzo di una stampante 3D immaginando il polícoro che passa attraverso lo spazio 3D. (IMMAGINE 2: alcune sezioni 3D di una figura 4D) L'avverbio "temporalmente" è particolarmente importante, perché proprio in questa parte della mostra si analizza il rapporto tra quarta dimensione "spaziale" e quarta dimensione "temporale".

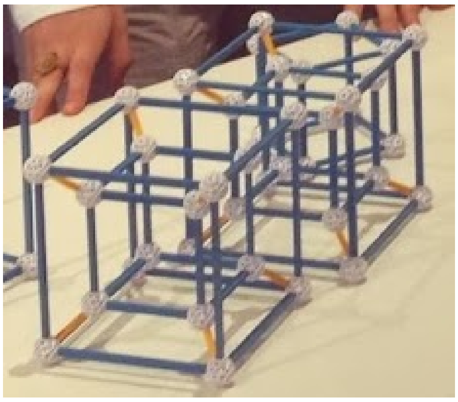


Il percorso delle proiezioni

Nel caso delle proiezioni si comincia con l'efficace siparietto di ombre cinesi, in cui si propone ai visitatori di indovinare le forme 3D partendo dalle loro ombre. (IMMAGINE 3: ombra di un parallelepipedo) Si fa notare che ci sono oggetti diversi che, messi in posizioni particolari, producono ombre quasi identiche. Nel caso del passaggio dalla terza dimensione alla quarta si sfruttano aste e palline per costruire delle proiezioni 3D di figure 4D. Ad esempio, due cubi uno dentro l'altro con i vertici corrispondenti uniti è una proiezione 3D dell'ipercubo 4D. (IMMAGINE 4: proiezioni 3D di un ipercubo 4D)

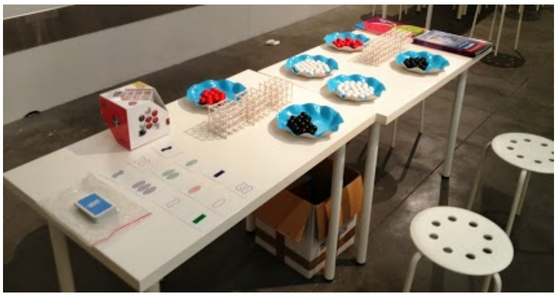


Polícori regolari



Un'attività aggiuntiva che è piaciuta molto ai visitatori è il calcolo del numero di polícori regolari. Anche in questo caso si procede per analogia: prima maneggiando poligoni (quindi in 2D) si mostra come contare i cinque poliedri regolari che esistono in 3D, poi maneggiando i poliedri appena scoperti si arriva a vedere che in quattro dimensioni i polícori regolari sono sei.

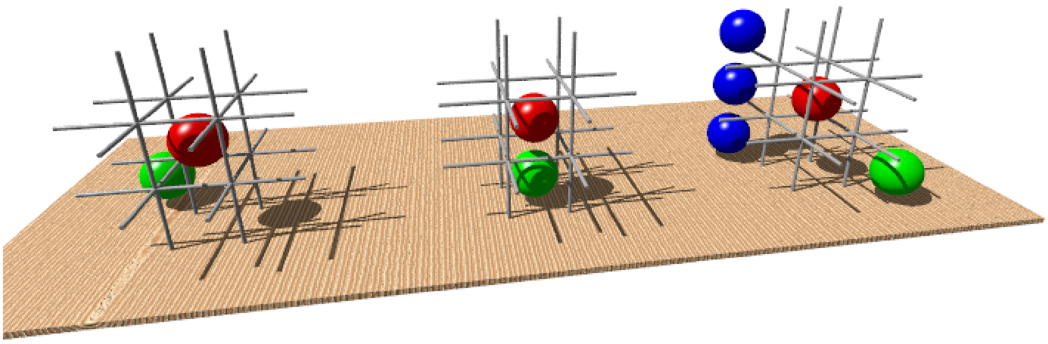
Giocare in quattro dimensioni



Dopo una sezione di pannelli sulla quarta dimensione nell'arte (Picasso, Duchamp, Dalì), l'ultima parte della mostra riguarda i giochi: sono presentati ben tre giochi che hanno a che fare con la quarta dimensione: "Set", "Tris 4D" e "Forza 4D". (IMMAGINE 5: I giochi "Set" e "Tris 4D") È molto interessante l'utilizzo dei giochi per spiegare un argomento dal sapore astratto come la quarta dimensione. Di fatto molte teorie matematiche hanno alla base delle regole, ad esempio un sistema formale si fonda su alcuni assiomi, che sono appunto le regole del gioco. Il concetto di gioco ci abitua fin da piccoli a scegliere delle regole e poi a cercare di rispettarle (senza barare!) e arrivare a un obiettivo. Per ottenere come risultato l'apprendimento di qualche concetto in un modo diverso dal solito è importante proporre giochi ben strutturati che catturino realmente l'interesse dei partecipanti, e i giochi qui proposti centrano in pieno l'obiettivo.

Vi proponiamo ora la descrizione di due di questi giochi. Il primo, messo a punto per questo evento, è Tris 4D.

Sovrapponendo 3 tris bidimensionali si puó giocare al tris 3D con un cubo 3x3x3. Analogamente, accostando 3 di questi cubi si puó giocare a tris 4D. Come sono fatti i tris, cioè le configurazioni vincenti? Ci sono configurazioni che stanno tutte all'interno di uno dei tre cubi, e altre che invece si sviluppano nella quarta dimensione: ad esempio, 3 palline rosse al centro dei 3 cubi.



Riflettiamo velocemente su quale dovrebbe essere lo scopo del gioco. Se vincesse il primo che fa un tris, chi comincia vincerebbe facilmente: ci si può accorgere rapidamente che alla terza mossa il primo giocatore può creare una doppia minaccia di tris, e quindi vincere alla quarta mossa.
Allora la regola è un'altra: si hanno 15 palline a testa, ogni giocatore prende un punto per ogni tris effettuato, quando sono state giocate tutte le palline chi ha più punti ha vinto. Attenzione: con una pallina si possono realizzare anche piú tris contemporaneamente.
Ne risulta un gioco semplice e veloce, con una parte strategica interessante.

Per indicare la posizione di una pallina nel tris 4D possiamo usare un sistema di coordinate a 4 dimensioni, per cui ad esempio (2,3,1,3) indica una pallina nel secondo cubo, al terzo piano, prima riga e terza colonna.

Un altro gioco legato alla quarta dimensione, seppur in modo meno evidente, è Set.
Set è un gioco di carte in cui ogni carta ha 4 caratteristiche (che, per collegarci al discorso, chiameremo “dimensioni”): forma, colore, numero e riempimento. Ogni dimensione ha 3 stati possibili, ad esempio il colore puó essere rosso, verde o viola. Quindi in totale ci sono 3^4 = 81 carte (il numero di stati elevato al numero di dimensioni). Il gioco consiste nell'individuare prima degli altri, tra le 12 carte messe in tavola, un set, cioè un insieme di 3 carte tale che in ogni dimensione i 3 stati siano o tutti uguali o tutti diversi.

Qual è il rapporto tra i set e i tris 4D? Provate a pensarci, prima di continuare a leggere.

La risposta è questa : tutti i tris sono set, ma non viceversa. Proviamo a capire.

Creiamo una corrispondenza tra set e tris. A ogni dimensione di set associamo una coordinata nel tris. Ad esempio alla forma associamo la prima coordinata, al colore la seconda, al numero la terza e al riempimento la quarta. Poi per ogni dimensione associamo a ogni stato un valore, ad esempio al colore rosso associamo il valore 1, al verde il 2 e al viola il 3.

A questo punto possiamo constatare che un tris deve rispettare necessariamente le condizioni di un set. Ad esempio, un tris 4D con pedine in (1,1,1,1), (1,1,1,2), (1,1,1,3) ha i valori tutti uguali nelle prime tre dimensioni e tutti diversi nella quarta dimensione.

Invece non tutti i set sono tris, ad esempio un set (1,1,1,2), (1,1,2,3), (1,1,3,1) non è un tris.

Come mai c'è questa differenza tra set e tris?

Perché la loro definizione è diversa. La definizione di tris (o allineamento) non l'abbiamo ancora data, lasciandola all'intuizione. Volendo darne una definizione, possiamo dire che per la validità di un tris occorre che il vettore differenza tra ogni pedina e la successiva sia costante. Cosí, il vettore differenza (1,1,1,3) – (1,1,1,2) = (1,1,1,2) – (1,1,1,1) = (0,0,0,1), mentre invece (1,1,3,1)-(1,1,2,3) = (0,0,1, -2) ≠ (1,1,2,3) – (1,1,1,2) = (0,0,1,1).