Il rigore nella comunicazione della matematica

Una caratteristica imprescindibile o una pedanteria superflua?

M. Dedò

Pubblicato originariamente, col titolo "*Rigour in Communicating Maths: A Mathematical Feature or an Unnecessary Pedantry?*" nel volume "*Raising Public Awareness of Mathematics*", a cura di E. Behrends, N. Crato, J.F. Rodrigues, Springer, 2012. Tale volume rappresenta gli Atti di un Convegno, dallo stesso titolo, tenuto a Óbidos nel settembre 2010.

Sunto

La necessità del rigore può sollevare problemi non banali nella comunicazione della matematica, quando i destinatari di tale comunicazione sono persone prive di un particolare retroterra matematico. In quanto segue, discutiamo alcuni di questi problemi e mostriamo come sia possibile una sorta di rigore matematico anche in uno stile di comunicazione informale.

Chiunque sia coinvolto in attività di divulgazione della matematica prima o poi si trova ad affrontare il problema del rigore: come possiamo tener traccia di questo rigore con persone che non sono matematici di professione, fino a che punto e con quali vincoli?

La matematica è strettamente connessa al rigore: è difficile anche solo immaginare una matematica non rigorosa, ed è assolutamente legittimo sollevare addirittura il dubbio se sia o meno possibile comunicare della matematica facendo a meno del rigore. D'altra parte, il rigore matematico, e in particolare il linguaggio matematico rigoroso, è un acerrimo nemico della comunicazione: è ben noto che i non matematici si spaventano anche solo a vedere una formula in un testo; e, anche senza voler tener conto di queste paure irrazionali che potremmo anche cercare di combattere, è ovvio che una frase che contiene dei termini tecnici esclude a priori chi non conosce il significato di tali termini.

Quindi le due richieste possono sembrare in contraddizione fra loro, e in parte davvero lo sono: in [1] si propone addirittura l'esistenza di una costante K e di un teorema che affermi che il prodotto di rigore e comunicabilità non è mai maggiore di K. Questa è naturalmente una metafora, dato che una "definizione" di rigore (e anche di comunicabilità) sarebbe necessariamente… poco rigorosa; tuttavia, non si può ignorare questa contraddizione che pone continuamente una serie di problemi "pratici", in qualsiasi iniziativa diretta al grande pubblico. Quello che si vuol fare in questo articolo – dato che ovviamente non è ragionevole aspettarsi delle risposte esaurienti a domande di questo tipo – è usare alcuni esempi per esaminare diverse sfaccettature di questo problema, sperando così di sollevare interesse a un'analisi più approfondita. Pensiamo che una tale analisi possa essere estremamente utile, specialmente se riuscirà a coinvolgere persone diverse che si siano scontrate con questo problema da posizioni e punti di vista diversi (matematici – coinvolti o meno in attività di divulgazione – ma anche giornalisti, insegnanti o semplicemente fruitori di iniziative di divulgazione).

Quando il Centro "matematita" è nato, sette anni fa, alcuni colleghi hanno sollevato delle perplessità rispetto al nome di questo Centro (Centro di Ricerca per la Comunicazione e l'Apprendimento *Informale* della Matematica), sostenendo che sarebbe stato contraddittorio usare l'aggettivo "informale" riferito a un argomento, come la matematica, che è addirittura basato sul formalismo. Viceversa, i fondatori del centro stesso sostenevano proprio che – nella situazione attuale – c'è una grande domanda e un gran bisogno di una comunicazione informale della matematica, sia nelle scuole sia più in generale nella società; e questo è stato uno dei punti che ha motivato l'origine di questo Centro. Quindi, lungi dal pensare che ci sia una contraddizione, pensiamo viceversa che sia necessario imparare come si può comunicare la matematica in maniera informale, cercando allo stesso tempo di mantenere, il più possibile, tutte le caratteristiche essenziali della matematica stessa: e, fra queste, il rigore occupa senz'altro un ruolo di primo piano.

Che cosa intendiamo per rigore?

A questa domanda, apparentemente così innocua, è in realtà molto difficile rispondere; e non a caso la domanda non è stata formulata nei termini di "Che cos'è il rigore?", a cui rispondere sarebbe stato ancora più difficile. Quello che vorrei fare qui è invece solo porre alcuni paletti, il più chiaramente possibile, per definire ciò che si andrà a discutere (e ciò che resterà fuori).

Una prima distinzione riguarda il rigore in matematica rispetto al rigore nel comunicare matematica (in attività di tipo divulgativo). E naturalmente qui stiamo parlando (solo) del secondo; anche se vorrei fare solo una veloce osservazione riguardo al primo, ricordando il dibattito che è stato sollevato, nel *Bulletin of the American Mathematical Society*, alla fine del secolo scorso, da un articolo di Jaffe e Quinn ([2]) su ciò che in quell'articolo gli autori hanno chiamato "*theoretical mathematics*", a significare una sorta di aspetto euristico della matematica, che non dipende necessariamente da dimostrazioni rigorose. Questo articolo ha dato origine a una vivace discussione che ha compreso un articolo di Thurston ([3]) e un'intera collezione[1] di diverse risposte ([4]), a cui è poi seguita un'ulteriore risposta dagli autori originari Jaffe e Quinn ([5]).

Abbiamo voluto ricordare quella discussione giusto per sottolineare il fatto che non possiamo nemmeno dire che il problema del rigore emerge solo nella comunicazione della matematica ai non matematici, mentre, all'interno della matematica, tutto è chiaro, sappiamo benissimo che cos'è il rigore e come usarlo correttamente. Quel dibattito ha appunto dimostrato che *non* è così, e che il problema del rigore merita di essere approfondito, anche all'interno stesso della matematica.

Tornando al nostro tema, che è invece quello del rigore nella comunicazione, osserviamo che solo molto raramente un'attività di divulgazione richiede delle vere e proprie dimostrazioni; piuttosto, anche quando entra nel merito del contenuto matematico, lo fa attraverso delle descrizioni (di oggetti o di fenomeni matematici), che non hanno bisogno di dimostrazioni; o, anche quando si vuole dare una giustificazione dei risultati esposti, questo non avviene attraverso una dimostrazione formale, ma, piuttosto, ha lo scopo di convincere l'interlocutore, di far sì che i risultati gli appaiano plausibili. Si potrebbe allora pensare che questi aspetti non richiedano una particolare attenzione al rigore: invece, quello che vogliamo argomentare, attraverso vari esempi, è proprio il fatto che anche questi "ragionamenti di plausibilità"[2] richiedono un loro genere di rigore, anche se ovviamente non sarà lo stesso tipo di rigore che ci aspettiamo da un articolo di matematica.

Un altro aspetto su cui vale la pena fare qualche commento è quella che si potrebbe chiamare la pubblica percezione del rigore, ovvero ciò che il non matematico percepisce come rigore (e, in particolare, come rigore matematico). Questo spesso ha poco o nulla a che fare con un effettivo ragionamento rigoroso e chi si occupa di divulgazione deve essere consapevole di queste opinioni diffuse (per cercare di cambiarle…!).

Mi sto qui riferendo al fatto che è purtroppo abbastanza normale, al di fuori dei matematici, il fatto di pensare che qualcosa sia "rigoroso" se (e solo se!) è scritto in maniera incomprensibile, usando molti simboli, formule, e parolone difficili e ignote ai più. Talvolta capita di incontrare contesti dove sembra che questa convinzione venga usata ad arte, ad esempio quando si vedono

[1] E val la pena dare qui esplicitamente la lista dei nomi, dato che il numero e la qualità dei matematici coinvolti in quel dibattito è abbastanza impressionante; oltre a Jaffe, Quinn e Thurston, ci sono stati commenti da parte di: Atiyah, Borel, Chaitin, Friedan, Glimm, Gray, Hirsch, MacLane, Mandelbrot, Ruelle, Schwarz, Uhlenbeck, Thom, Witten e Zeeman.

[2] Ci riferiamo a ciò che Polya ha chiamato proprio *plausible reasoning*.

messaggi pubblicitari dove si vanta “il 73% di brillantezza in più” per un particolare dentifricio, facendo conto (e, purtroppo, a ragione!) che il solo fatto di usare delle percentuali porti automaticamente la maggioranza delle persone a pensare che “allora questa è matematica, quindi è un fatto rigoroso, quindi deve essere un buon prodotto”, anziché a domandarsi che cosa sia la brillantezza e come si misuri (che è il minimo che occorrerebbe sapere affinché la frase possa avere un senso).

Purtroppo, questo fraintendimento di associare il rigore (solo) all’uso del linguaggio specifico della matematica è molto diffuso, e si ritrova anche nelle aule scolastiche. Non è così infrequente trovare anche a scuola un’insistenza ossessiva per una terminologia matematicamente corretta. È ovvio che è un fatto positivo e importante che gli studenti controllino un uso corretto di un certo numero (piccolo, a mio parere!) di termini tecnici; ma c’è una linea di confine, al di là della quale questa insistenza diventa troppo formale e sconfina nella pedanteria. O, talvolta, può essere anche peggio: può diventare una maschera che semplicemente nasconde la mancanza di contenuti matematici significativi.

La linea di confine a cui ci si riferisce è legata alla capacità di trasmettere delle idee (matematiche), che diano significato ai concetti introdotti. Finché il significato è chiaro, gli studenti non rischiano di ripetere frasi vuote; mentre, quando non si domina il significato, l’insistenza sull’uso di termini tecnici non è solo inutile, ma rischia anche di produrre effetti negativi.

Chiunque abbia esperienza di insegnamento, a qualsiasi livello, ha la sua personale collezione di frasi apparentemente folli dette dagli studenti e poi ripetute dai loro insegnanti come barzellette. Non voglio certo qui sfoderare la mia personale collezione; voglio solo osservare che c’è un elemento cruciale che sembra ricorrere nella stragrande maggioranza di questi casi (anche in situazioni molto differenti fra loro), e cioè il fatto che le parole sembrano venir usate senza che abbiano alcun significato.

Essere capaci di ripetere correttamente che “la radice quadrata di un numero è quel numero che, elevato al quadrato, dà il numero da cui siamo partiti”, non implica in modo automatico saper rispondere alla domanda “Quanto fa $\sqrt{5}$ al quadrato?”. Le due questioni sono effettivamente connesse *soltanto* se siamo riusciti a dare un significato a ciò che stiamo facendo; altrimenti, per quanto paradossale ciò possa sembrare, è possibile che queste vivano in ambienti separati, e non comunicanti.

Un altro elemento di cui dovremmo essere consapevoli, a proposito della pubblica percezione del rigore, è la cosiddetta paura del rigore, che è un fenomeno estremamente diffuso, in particolare fra chi non domina i contenuti della matematica (elementare). Usando le parole di Peano ([6]): “*chi non conosce bene i fondamenti d’una parte qualunque della matematica rimane sempre titubante, e con una esagerata paura del rigore*”.

Questo aspetto risulta particolarmente evidente (e pericoloso) nell’insegnamento formale e può essere una delle ragioni della pedanteria che talvolta si incontra nelle aule scolastiche; in [7] si esplicitano alcuni esempi, a mio parere significativi, di questa paura del rigore e delle sue possibili conseguenze.

Un esempio

Analizziamo qui un gioco che il Centro “matematita” ha sperimentato, col nome “Mosca cieca” in diverse situazioni (laboratori per studenti di diverse età, ma anche per i loro insegnanti). Due piccoli gruppi (di due o tre persone ciascuno) sono l’uno di fronte all’altro ai due capi di un tavolo, con un divisorio che impedisca agli uni di vedere il materiale a disposizione degli altri (e viceversa). Si dà a ciascun gruppo un “oggetto matematico” e si chiede di descriverlo all’altro gruppo, in modo che ne possano costruire una copia. Alla fine si toglie il divisorio in modo che i gruppi possano constatare se ciò che hanno costruito assomiglia a quello che avrebbero dovuto costruire…

L'"oggetto matematico" può essere, ad esempio, un poliedro, che dovrebbe essere non troppo complicato, ma nemmeno troppo standard (ad esempio, non useremmo un cubo, o un prisma, o una piramide); tipicamente i poliedri uniformi sono dei buoni esempi da usare in questo gioco. Naturalmente, i due gruppi dovrebbero avere a disposizione del materiale che permetta loro di costruire i poliedri con relativa facilità; spesso è utile che il gruppo costruisca il poliedro che è stato loro assegnato, prima di dare all'altro gruppo le istruzioni circa come costruirlo.

Altri "oggetti matematici" che si possono usare efficacemente in questo gioco sono delle figure, ad esempio figure disegnate sulla carta a quadretti, o costruite su un geopiano; oppure una figura con una notevole simmetria, che siamo obbligati a notare e a descrivere se vogliamo dare una maniera semplice per ricostruirla; oppure – se vogliamo che il gioco si faccia duro… – il disegno di un nodo, o addirittura un oggetto fisico rappresentante un nodo.

In tutti questi casi (e in altri analoghi che possiamo immaginare e proporre) il processo di *descrivere* l'oggetto all'altro gruppo richiede un uso non banale del linguaggio (normale): i due gruppi devono innanzitutto distinguere quali sono le caratteristiche essenziali dell'oggetto che devono essere trasmesse all'altro gruppo; e spesso scoprono (con una certa sorpresa) che una variazione anche minima in quello che dicono può produrre differenze significative in ciò che l'altro gruppo costruisce. E allora capiscono che il *rigore* nel linguaggio è necessario per ottenere una comunicazione non ambigua. E magari anche che l'insistenza per usare una data parola al posto di un'altra, che fino a quel momento sembrava solo una mania ossessiva dell'insegnante di matematica, può invece avere un senso.

Naturalmente questo tipo di analisi è assai più utile se si forzano i due gruppi a registrare per iscritto i messaggi che si mandano l'un l'altro, in modo che – se c'è un errore – sia possibile tornare indietro e capire qual è stata la frase o la parola che ha causato il fraintendimento, e quali sarebbero state delle scelte differenti che avrebbero potuto portare a una identificazione corretta.

Questo è un esempio di come costruire un pensiero matematico rigoroso: i partecipanti si rendono conto – e questo avviene anche se le loro frasi non contengono tutti i termini più precisi – di che cosa è necessario comunicare affinché l'altro gruppo capisca la forma dell'oggetto assegnato; e siccome hanno uno scopo preciso (e sono coinvolti dal gioco in questo obiettivo), il significato delle parole resta un aspetto fondamentale: non si rischia certo di ripetere delle definizioni vuote! Così lo strumento matematico (una definizione precisa, un termine non ambiguo) arriva esattamente nel momento in cui ce n'è bisogno e può essere apprezzato; e non prima.

Il linguaggio matematico

Il linguaggio matematico è un'enorme conquista dell'umanità: se si legge per esempio una descrizione di un problema elementare standard, come un'equazione di secondo grado, prima che diventasse comune l'uso di una lettera al posto dell'incognita, ci si rende davvero conto di quanto sia potente anche solo una buona notazione. Ma…

Ma le cose diventano più semplici se (e solo se!) il nuovo livello di astrazione arriva nel momento in cui se ne sente il bisogno: altrimenti, si tratta solo di un formalismo vuoto e privo di senso e… finisce che troviamo studenti che asseriscono di non saper risolvere un'equazione come $3y^2+2y-2=0$, perché… "abbiamo studiato le equazioni di secondo grado con la x e non con la y"!

Un altro punto da osservare è che il linguaggio matematico, che è sicuramente uno strumento prezioso quando viene utilizzato da chi lo domina, può viceversa diventare pericoloso quando viene utilizzato da chi non lo domina. Questo è particolarmente rischioso in un contesto come quello di una mostra, o di altra attività diretta a un pubblico generico, dove di fatto stiamo simultaneamente parlando a persone molto diverse fra loro; mentre chi insegna è abituato viceversa, in un contesto di apprendimento formale (ovvero in un'aula scolastica) a parlare a un gruppo più o meno omogeneo quanto a conoscenze e livello di astrazione, anche se naturalmente ciascuno ha poi le sue personali maniere di pensare e i suoi tempi di apprendimento.

Quando scegliamo il testo per il poster di una mostra (per esempio), o per una pagina di un sito web, dovremmo tener presente questo fatto che si tende a dimenticare (anche se è abbastanza ovvio): a volte si è "tentati" di usare il linguaggio matematico, abbiamo l'impressione che dicendo qualcosa in maniera formale ci salviamo la coscienza, mentre altrimenti resteremmo un po' disturbati rendendoci conto che non è proprio possibile, in quel particolare testo, dire tutto quello che *andrebbe detto*, nel posto giusto e nell'ordine giusto. Tuttavia, occorre sempre ricordarsi che la comunicazione ha due capi, e il messaggio va dall'uno all'altro; e, per giudicare la correttezza di un messaggio, non è sufficiente giudicare il livello di correttezza con cui il messaggio inizia il suo viaggio, ma è necessario giudicare come il messaggio viene recepito e interpretato all'altro capo, dalla persona che lo riceve.

È certamente difficile abbandonare consapevolmente il linguaggio matematico; e diventa ancora più difficile se noi vogliamo che questo *non* significhi abbandonare insieme anche un modo di ragionare rigoroso. Quando usiamo il linguaggio normale, abbassiamo naturalmente il livello di precisione: le cose sono molto più facili con il linguaggio della matematica (quando lo si domina) e soprattutto è molto più facile controllare se una frase è corretta oppure no.

Si può fare un test: basta provare a scrivere una definizione di gruppo (per esempio; o di qualunque altro concetto astratto) nel linguaggio normale, senza usare alcun simbolo o parola che si impari a livello universitario; poi si può provare a chiedere a dieci diversi matematici se la frase è corretta oppure no. È facile immaginare che ci saranno opinioni diverse (mentre naturalmente è improbabile trovare opinioni diverse circa la correttezza o meno di una definizione di gruppo scritta nell'usuale forma matematica). Per non parlare del fatto che non ci dovremmo accontentare dell'opinione dei matematici: avremmo bisogno di testare questa definizione con persone che non sanno che cos'è un gruppo, per portare allo scoperto tutti i possibili fraintendimenti.

Tuttavia, quando abbandoniamo il linguaggio formalizzato e cerchiamo di comunicare informalmente le idee della matematica, ci sono anche dei vantaggi, e dobbiamo imparare ad approfittarne nella maniera migliore.

Il principale aspetto negativo del linguaggio "normale" rispetto al linguaggio matematico è la sua potenziale ambiguità: ma è proprio questa stessa ambiguità che può, per molti versi, portare con sé una ricchezza aggiuntiva. Prima di tutto, perché ci permette di esplorare regioni che sarebbero certamente inaccessibili per i non matematici se volessimo usare un linguaggio formalizzato. La mostra "Un tuffo nella quarta dimensione", allestita a Genova nel 2007 a cura del Centro "matematita", faceva largamente uso del concetto di analogia: si spiegano gli sviluppi di un ipercubo a partire da quelli di un cubo; o si costruisce un 120-celle a partire da 120 dodecaedri sottolineando il parallelo esistente con la costruzione di un dodecaedro a partire da 12 pentagoni; o si può mostrare un politopo stellato semplicemente perché è bello, e usare poi un video, che richiama la storia di Flatlandia, per trasmettere l'idea di un oggetto 4-dimensionale che attraversi il nostro mondo 3-dimensionale, mostrandoci così una sua sezione che cambia nel tempo.

In occasione di quella mostra, abbiamo usato un altro possibile vantaggio di un messaggio ambiguo, perché in effetti l'ambiguità può anche facilitare l'associazione di idee, e le associazioni di idee possono costituire uno strumento prezioso nel trasmettere i pensieri e costruire le proprie immagini mentali e di conseguenza anche i concetti astratti. Naturalmente, se decidiamo di accettare l'ambiguità, e se magari qualche volta addirittura ci giochiamo deliberatamente (in un particolare contesto comunicativo), e se nello stesso tempo non vogliamo rinunciare del tutto al rigore, dobbiamo essere consapevoli che stiamo accettando un rischio, e che stiamo camminando su un sentiero molto stretto: il che significa che dobbiamo anche aumentare i controlli da usarsi per stabilire come il messaggio può essere interpretato.

Una conseguenza ovvia di ciò è che c'è bisogno di *ascoltare*, il più possibile, le reazioni del pubblico ai diversi aspetti di una comunicazione informale: questo è davvero un punto fondamentale per giudicare se un concetto arriva all'altro capo della comunicazione in una maniera sostanzialmente corretta.

Un altro esempio

Facciamo una digressione analizzando un esempio tratto dalla mostra "Simmetria, giochi di specchi". Gli oggetti principali di questa mostra sono tre camere di specchi (in cui si possono "vedere" i tre gruppi di isometrie piane generati dalle riflessioni rispetto ai lati di un triangolo piano nei tre diversi casi possibili: un triangolo equilatero, un triangolo rettangolo isoscele e un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°) e tre caleidoscopi tridimensionali (dove si possono vedere i tre gruppi di isometrie dello spazio generati dalle riflessioni rispetto ai lati di un triangolo sferico nei tre[3] diversi casi possibili: quello del tetraedro, quello del cubo, e quello del dodecaedro). Le reazioni del pubblico di fronte alle camere di specchi sono in genere dominate dalla sorpresa di "vedere l'infinito". E, se analizziamo ulteriormente questa impressione, ci accorgiamo che, in effetti, l'infinito che noi "vediamo" in una camera di specchi è molto più vicino al concetto astratto di infinito di quanto non lo sia la maniera in cui viene normalmente utilizzata la parola infinito nel linguaggio comune (in cui viene usata semplicemente come un sinonimo di "tantissimi", il che ovviamente non ha nulla a che fare con l'infinito).

Se proviamo a contare l'effettivo numero di ripetizioni di una data immagine che vediamo in una camera di specchi, scopriamo con una certa sorpresa che non sono affatto tantissime, non è nemmeno facile arrivare a 10 (dipende da quanto sono puliti gli specchi…!): nonostante ciò, e senza alcun dubbio, si ha una chiara impressione di "infinito", che evidentemente quindi non nasce dal numero delle ripetizioni. E allora perché abbiamo questa impressione e che cos'è che la genera?

Ricordo un dialogo fra un ragazzino e un adulto (di fronte a una camera di specchi): l'adulto chiedeva al ragazzino se gli piaceva e il bambino rispondeva "Sì, ma… mi sento un po' sperduto", per poi spiegare: "… perché puoi andare fin là, ma poi puoi andare oltre, e ancora più in là…, e ancora…".

Ciò che il ragazzino esprimeva molto chiaramente è proprio il fatto che questa impressione di vedere l'infinito ci viene (non dal numero delle ripetizioni, ma) dal fatto che possiamo sempre continuare il disegno: ed è proprio la simmetria, quindi, che ci trasmette l'idea di infinito (potenziale); la simmetria di ciò che vediamo fra gli specchi ci permette di essere sicuri che il disegno non finisce in quel determinato punto, perché noi sapremmo come continuarlo…

Questo commento ci ha aiutato a renderci conto di come il concetto di infinito visto fra gli specchi (dal punto di vista informale, naturalmente!) sia in effetti abbastanza corretto (potremmo dire "rigoroso"?) e questa considerazione ci ha poi dato l'idea di utilizzare gli specchi in maniera del tutto diversa, per far scoprire l'idea di confrontare due infiniti tramite una corrispondenza biunivoca. E… ben sappiamo che storicamente questa è stata una grande idea!

Possiamo a questo scopo cominciare da una situazione finita, come quella che si vede in un caleidoscopio tridimensionale inserendovi tre palle di tre colori diversi; e in una situazione del genere si può chiedere "Quante palle si vedono?", o, meglio: "Sono di più le palle rosse, quelle blu o quelle gialle?". Si tratta di un bel problema, perché in maniera implicita contiene la struttura del gruppo di simmetria di un cubo: gli anelli di 8 palle rosse (rispettivamente, di 6 blu, di 4 gialle) corrispondono alle facce (rispettivamente ai vertici, agli spigoli) di un cubo e quindi ce ne sono 6 (rispettivamente 8, 12); sicché i numeri di palle di diverso colore sono uguali perché

[3] Escludendo i gruppi prismatici, che corrispondono a triangoli sferici con due angoli retti.

$$6 \times 8 = 8 \times 6 = 12 \times 4 = 48.$$

Ma c'è anche una maniera più elegante per dimostrare che i tre numeri sono uguali, se ci accorgiamo che c'è una corrispondenza biunivoca tra palle di diverso colore. Naturalmente non è questa la maniera in cui si esprimerà una persona priva di una specifica competenza matematica: la persona esprimerà probabilmente la stessa cosa in maniera più confusa, ma avrà chiaro in ogni caso che, se fra gli specchi mettiamo una (e solo una!) palla di ciascun colore, allora il numero delle immagini virtuali dovrà essere lo stesso per ciascun colore.

A questo punto possiamo porre un'altra domanda, cioè chiedere se, inserendo in una camera di specchi come questa una forma rossa, una verde e una blu, si vedono più forme rosse, più verdi o più blu. Qui non possiamo contare, ma dobbiamo confrontare due infiniti; tuttavia proprio l'osservazione appena fatta nel caso finito ci può dare l'idea di come dar significato a un confronto tra infiniti.

Linguaggi non verbali

Tornando al nostro argomento principale, un punto che necessita qualche altro commento è quello del ruolo dei linguaggi non verbali, ovvero la possibilità di utilizzare immagini (o animazioni virtuali, o modelli tridimensionali che possano essere toccati e manipolati) per trasmettere informazioni su un dato concetto matematico.

Si tratta di un punto molto delicato, specialmente per quel che riguarda il rigore, dato che, ovviamente, qualunque immagine e qualunque modello tridimensionale, sarà sempre, necessariamente "un po' falso". Tuttavia, sappiamo benissimo la potenza che hanno immagini (e modelli) nel comunicare e nel suggerire delle idee, e sarebbe quindi davvero un peccato rinunciare a utilizzare questo strumento, specialmente in una comunicazione informale: piuttosto, dovremmo cercare di studiare *come* utilizzarle, quale tipo di precauzioni si possano adottare per ridurre al minimo i rischi di equivoci, quali messaggi verbali sia utile associare a una data immagine, ecc.

Una prima osservazione ovvia è che le immagini devono essere tante[4]: questo perché un'immagine in matematica si riferisce a un concetto astratto e quindi non è mai rappresentativa, ma piuttosto è evocativa, cerca di aiutare l'immaginazione e di suggerire un'idea. E, spesso, questo "qualcosa" che vuole essere evocato emerge in maniera naturale dal confronto fra diverse immagini: non potremmo dire che in questo fiore vediamo un gruppo, ma possiamo suggerire l'idea del gruppo diedrale con dieci elementi mostrando molte immagini differenti: una pera, il cerchione di un'auto, un altro fiore, un riccio di mare, uno dei rosoni sulla facciata di S. Maria Novella, ecc.

Ma… possiamo davvero dire che "vediamo" il gruppo diedrale con dieci elementi in questo fiore (per esempio)? Naturalmente una risposta formale non può che essere negativa, e per più di una ragione: prima di tutto, qualunque esempio che provenga dalla natura possiede solo una simmetria approssimativa, che naturalmente non esiste se vogliamo definire la simmetria in maniera rigorosa. Sarebbe certo possibile definire (rigorosamente) una nozione di simmetria approssimata, ma questo renderebbe le cose molto più complicate e probabilmente non è questo ciò che vorremmo fare in un'iniziativa di carattere divulgativo.

Un'altra ragione per rispondere negativamente è il fatto che è rischioso confondere l'oggetto tridimensionale (il fiore) – per il quale le (eventuali) trasformazioni di simmetria sono rotazioni dello spazio intorno a una retta oppure riflessioni dello spazio rispetto a un piano – con l'immagine bidimensionale che vediamo sulla carta o sullo schermo, per la quale le operazioni di simmetria sono rotazioni piane intorno a un punto oppure riflessioni del piano rispetto a una retta; e la simmetria 3d dell'oggetto 3d è collegata a quella bidimensionale della foto SOLTANTO se la foto è presa da un punto di vista molto particolare.

[4] E proprio questo è il motivo che ha portato il Centro "matematita" a curare la grossa collezione che si trova nel sito "Immagini per la matematica": http://www.matematita.it/materiale/index.php

Quindi ci sono molte buone ragioni per evitare l'uso di immagini di questo tipo se vogliamo mantenere un certo rigore nel nostro messaggio. Eppure, sappiamo molto bene non solo quanto le immagini possano essere potenti nel trasmettere un'idea, ma anche che la foto di un fiore può essere molto più bella, e anche quindi molto più efficace da questo punto di vista rispetto a un'immagine come questa, che in realtà sarebbe più corretta, dato che i problemi sollevati per il fiore non si applicano a un disegno.

E allora cosa dobbiamo fare? La risposta (ovviamente!) dipende dal contesto. Giusto per dare un esempio di quello che intendiamo dire, nel *kit* sulla simmetria, che il Centro "matematita" presta alle scuole per attività di laboratorio sul tema della simmetria, viene inserito un CD con una raccolta di immagini "simmetriche". Queste immagini sono divise in due cartelle, una intitolata "osservare la simmetria" e l'altra intitolata "classificare la simmetria". Nella prima cartella, ci siamo sentiti liberi di inserire immagini come le foto di fiori, ricci e cerchioni, mentre la seconda cartella contiene solo immagini con simmetria "perfetta" (quindi nessuna foto di oggetti reali, solo disegni, oppure simboli di uso comune). Nei commenti per gli insegnanti, si spiega questa scelta e si raccomanda di utilizzare solo immagini dalla seconda cartella in attività in cui si chieda ai ragazzi di individuare il tipo di simmetria di una figura. Una volta che gli insegnanti sono consapevoli dei problemi sottostanti, possono poi decidere autonomamente di utilizzare apposta delle immagini dalla prima cartella, con qualche genere di ambiguità, proprio per provocare fra i ragazzi delle discussioni – che si potranno rivelare assai efficaci – a proposito di queste ambiguità.

Questa distinzione ci ha permesso di usare tutto il fascino e il potere di coinvolgimento delle immagini "di vita reale", mantenendo al tempo stesso una distinzione quando ci si riferisce a un aspetto strettamente tecnico (come il classificare le immagini). Spesso esistono soluzioni come quella descritta in questo esempio, che permettono un ragionevole compromesso tra il desiderio di usare il potere di coinvolgimento degli esempi di vita reale e la necessità di essere sufficientemente rigorosi.

Un ultimo esempio

Concludiamo analizzando un altro esempio, più delicato dal punto di vista matematico: possiamo dire che questa scultura di Max Bill, o quest'altra di Josep Canals, o quest'altra o quest'altro oggetto ancora rappresentano dei nastri di Moebius?

Qui possono sorgere problemi più complessi. La reazione media di persone con un buon retroterra matematico (studenti universitari di matematica, o insegnanti) passa in genere attraverso tre fasi:

Fase 1: "Certamente sì, sono dei nastri di Moebius" (eventualmente con qualche dubbio rispetto alla scultura di Canals). In un certo senso, è proprio il fatto che SAPPIAMO GIÀ che cos'è un nastro di Moebius che qui ci trae in inganno; probabilmente, il nostro cervello non "vede" nemmeno lo spessore di queste sculture, perché ha già un'immagine mentale di un nastro di Moebius, come qualcosa che non ha spessore per nulla; e l'immagine mentale "vince" rispetto all'immagine reale, che semplicemente si adatta all'altra, preesistente.

Fase 2: "Certamente no! Questi oggetti hanno uno spessore, mentre i nastri di Moebius sono superfici e quindi non hanno spessore". Una volta che ha fatto caso allo spessore (che sia con la scultura di Canals, o che sia dalla domanda di un interlocutore), una persona con buon retroterra matematico non fa sconti a nessuno e non accetta compromessi (molto di più, naturalmente, rispetto a chi ha un retroterra più debole), quindi la risposta sarà negativa per tutti gli esempi, senza alcuna rilevante differenza fra l'uno e l'altro. Non dipende dalla misura (relativa) di questo spessore; in ogni caso, anche se l'oggetto fosse estremamente sottile, avrebbe comunque uno spessore e quindi non può essere mai un "vero" nastro di Moebius.

Eventuale fase 2.5 (estremamente pericolosa!) "DATO CHE c'è uno spessore, e questo spessore è un piccolo intervallo, questi oggetti non sono nastri di Moebius, ma sono il prodotto di un nastro di Moebius per un piccolo intervallo". Sembra un passaggio molto naturale, peccato però che sia proprio FALSO: in effetti, se esistesse un oggetto (cioè un sottospazio dello spazio tridimensionale ordinario $\mathbf{R}^3$) omeomorfo al prodotto cartesiano di un nastro di Moebius e di un intervallo, allora il nastro di Moebius dovrebbe essere bilatero in $\mathbf{R}^3$ (dato che ovviamente lo è nella 3-varietà rappresentata dal prodotto cartesiano con un intervallo); ma noi sappiamo che i nastri di Moebius hanno una sola faccia in $\mathbf{R}^3$ e quindi questa 3-varietà non può essere un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

Abbiamo notato queste reazioni, per esempio, fra gli studenti universitari che collaborano con il Centro "matematita" in occasione di mostre aperte al pubblico: il lato positivo è che, una volta che si è passati attraverso questo errore e finalmente (fase 3!) ci si rende conto che topologicamente tutti questi oggetti tridimensionali non sono altro che tori solidi, questo va a incidere profondamente nella comprensione del problema, e in particolare della relazione fra il concetto di orientabilità (che è una proprietà intrinseca, legata a un dato oggetto, per esempio, nel nostro caso, il nastro di Moebius) e la bilateralità (che è una proprietà estrinseca, e quindi non si applica a un oggetto in sé, bensì a una coppia di oggetti, nel nostro caso il nastro di Moebius nell'ambiente che è lo spazio ordinario $\mathbf{R}^3$); e lo stesso oggetto può essere bilatero o non esserlo a seconda dell'ambiente in cui lo si considera, esattamente come (abbassando di uno la dimensione) una circonferenza è bilatera in un cilindro e non lo è in un nastro di Moebius.

Ma il punto che qui ci interessa è un altro: consapevoli di tutti questi problemi, possiamo utilizzare questi oggetti per rappresentare un nastro di Moebius? Non sarà meglio rinunciare a questa possibilità? Anche in questo caso la risposta non può essere universale, ma dipende dal contesto.

Quello che qui mi interessa sottolineare è che in questo caso le reazioni del matematico possono essere molto differenti da quelle di una persona con meno competenze, e di questo dovremmo essere pienamente consapevoli; in particolare, per chiunque abbia un po' di retroterra matematico, lo spessore esiste in *qualsiasi* esempio, indipendentemente da quanto sia sottile (e, paradossalmente, è così anche da parte delle stesse persone che nella fase 1 non si erano minimamente accorti di questo spessore); non è affatto così, invece, per le persone con meno competenze, che possono eventualmente notare lo spessore (e, in una prima fase, lo notano molto di più dei matematici, perché non hanno una preesistente immagine mentale con cui fare i conti), ma in effetto lo notano o non lo notano proprio a seconda di quanto è grande questo spessore.

Quindi, in fin dei conti, se vogliamo trasmettere l'idea di un nastro di Moebius, il problema di "quanto è spesso" – problema ovviamente irrilevante (o meglio inesistente) dal punto di vista matematico – è invece cruciale dal punto di vista della comunicazione corretta e dei possibili fraintendimenti, sia nel costruire un modello sia nel fare un disegno. Naturalmente, qui come in altri esempi, dobbiamo essere consapevoli del problema e usare quindi tutti i possibili antidoti e tutte le possibili precauzioni. Ad esempio, se costruiamo un (modello di un) nastro di Moebius per una mostra, la persona che dovrà decorarlo deve essere sufficientemente consapevole di ciò che l'oggetto deve rappresentare, in modo da sapere che è cruciale che la stessa scena sia dipinta su quelli che appaiono (e non sono!) "i due lati".

Conclusioni

Cerchiamo di trarre qualche conclusione (provvisoria) da questa analisi.

Gli esempi che abbiamo esaminato illustrano il fatto che, sebbene sia certo vero che occorre abbandonare il linguaggio matematico rigoroso in una comunicazione informale, che abbia lo scopo di trasmettere idee e significati, tuttavia dovremmo anche cercare di mantenere il filo del pensiero matematico rigoroso, perlomeno il più possibile. E dovremmo anche cercare di chiarire ai nostri interlocutori, di nuovo il più possibile, che cosa intendiamo con “pensiero matematico rigoroso”, specialmente quando questo entra in conflitto con la percezione media di che cos’è il rigore (e che cos’è la matematica). Chiarire anche che cosa *non* è rigore può essere molto efficacemente uno dei messaggi principali di una iniziativa di carattere divulgativo.

Dicendo che il rigore deve essere mantenuto “il più possibile”, stiamo anche implicitamente affermando che il nostro modo di intendere il rigore è dinamico; non possiamo semplicemente dire che il rigore c’è o non c’è, ma il problema può essere più complicato di così, e dovremmo cercare di costruire il rigore, attraverso un processo continuo, che passa da livelli diversi di approssimazione.

Questo apre un problema grosso, e non facile, che riguarda come si possa “misurare” se una data comunicazione è sufficientemente rigorosa; gli esempi che abbiamo citato erano pensati per illustrare il fatto che, in una comunicazione informale, il rigore deve essere “misurato” in una maniera diversa rispetto a un contesto formale, prestando soprattutto una particolare attenzione alla maniera in cui il messaggio può essere interpretato da chi lo riceve.

Ma questa “misura” sarà sempre una questione opinabile e dobbiamo essere preparati al fatto che matematici diversi possano avere opinioni diverse nel giudicare se una pagina di matematica scritta in linguaggio “normale” è o non è accettabile. Il che lascia aperto un grosso problema da discutere, e io penso che i matematici che lavorano da tempo in attività di carattere divulgativo dovrebbero essere i primi a proporre dei metodi – obiettivi per quanto possibile – per decidere quali criteri di “giusto/sbagliato” si possano adottare in situazioni in cui non è possibile usare un linguaggio non ambiguo.

Concludo con un tentativo, sia pur parziale, di risposta che può essere “dedotto” da questa citazione di Giuseppe Peano: “Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell’affermare tutte cose vere, e nel non affermare cose che sappiamo non vere. *Non* sta nell’affermare tutte le verità possibili.”

E, coerentemente con questa frase di Peano, potremmo giudicare se un’affermazione è “abbastanza rigorosa” immaginando un cambio di interlocutore e passando, ad esempio, da un interlocutore generico a uno studente universitario di matematica: se dobbiamo aggiustare il tiro semplicemente *aggiungendo* qualche ulteriore informazione, ma non abbiamo bisogno di sostituire nulla rispetto al messaggio che è andato “a tutti”, questo significa che anche il primo livello del messaggio era “abbastanza rigoroso”. Altrimenti, se dobbiamo cambiare qualcosa,… forse c’era qualcosa da cambiare già nel messaggio di primo livello.

Bibliografia

[1] Greco, P., *L’idea Pericolosa di Galileo, storia della comunicazione della scienza nel Seicento*, UTET (2009).

[2] Jaffe, A., Quinn, F., *Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics*, Bull. Amer. Math. Soc. **29**(1), 208–211 (1993).

[3] Thurston, W.P., *On proof and progress in mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. **30**(2), 161–177 (1994).

[4] Atiyah, M., et al., *Responses to “Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics” by A. Jaffe and F. Quinn*, Bull. Amer. Math. Soc. **30**(2), 178–207 (1994).

[5] Jaffe, A., Quinn, F., *Response to comments on “Theoretical mathematics”*, Bull. Amer. Math. Soc. **30**(2), 208–211 (1994).

[6] Peano, G., *Opere scelte*, vol. III a cura di U.M.I (in “Sui fondamenti dell’analisi”, p. 273).

[7] Dedò, M., *Più matematica per chi insegna matematica*, Boll. Unione Mat. Ital. **8**(4-A), 247–275 (2001).