TRE × TRE

Avete a disposizione una cartina di Busto Arsizio su cui sono segnate tre importanti piazze: piazza S. Maria, piazza Colombo e piazza Garibaldi, e tre uffici postali. Si vuole progettare un percorso di superficie che colleghi direttamente ciascuno degli uffici postali con ciascuna delle tre piazze. Non importano la lunghezza o il tragitto delle linee, ma queste non devono intersecarsi. È possibile?

Istituto comprensivo "Galileo Galilei" - Busto Arsizio (MI)
Classi: III A, III B, III C, III D, III E
Insegnanti di riferimento: prof.ssa Maria Ausilia Sora e prof.ssa Alessandra Zanzottera
Ricercatore: dott.ssa Cristina Oppi
Partecipanti: Marco Ascione, Luca Baroffio, Simone Bombelli, Federica Castiglioni, Eleonora Cavalera, Giorgia Crespi, Carola De Bernardi, Giulia Di Vita, Giulia Ferioli, Nicholas Iafullo, Gaia Magliano, Francesca Mariani, Matteo Navoni, Matteo Paparazzo, Francesca Paris, Luca Pastorelli, Francesca Pellegatta, Andrea Pellizzon, Andrea Perrotta, Martina Perrucci, Denis Rota, Alessia Stuppini, Maria Chiara Vita

PRIME CONSIDERAZIONI

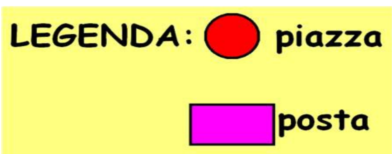
Abbiamo fatto alcune considerazioni basandoci solo sul testo del problema.

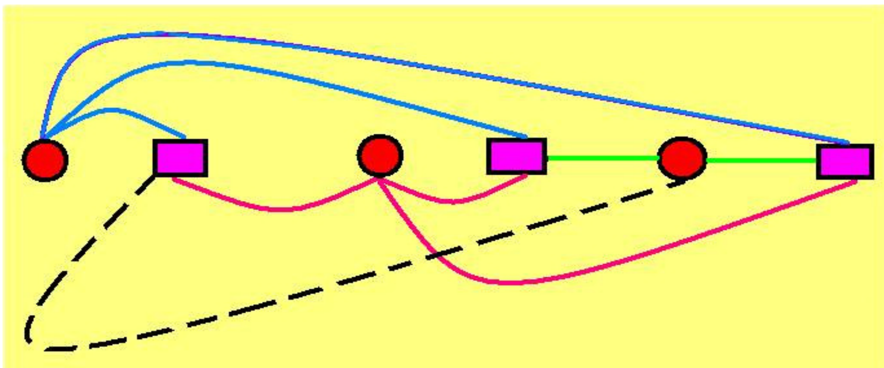
- Per prima cosa abbiamo constatato che le strade possono essere considerate come delle linee su un piano, perciò abbiamo abbandonato subito la cartina e abbiamo lavorato su un foglio bianco con punti e linee. Queste possono avere un solo verso di percorrenza.
- Abbiamo quindi ragionato su che cosa intendesse il problema per intersezione. Il nostro dubbio era se sovrapporre due linee significasse intersecarle o meno. Siamo giunti alla conclusione che due linee intersecate hanno almeno un punto in comune e, dato che due linee sovrapposte avrebbero tutti i punti in comune, esse si intersecano. Abbiamo poi considerato che bisogna progettare un percorso di superficie, quindi le linee devono rimanere sul piano.

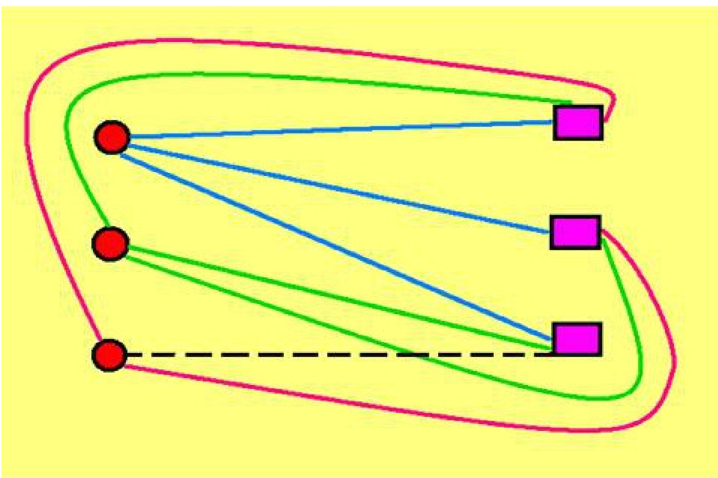
Infine, nel problema si dice che ogni piazza deve essere collegata direttamente con ogni ufficio postale, pertanto non è possibile collegare una piazza con un'altra e un ufficio postale con un altro.

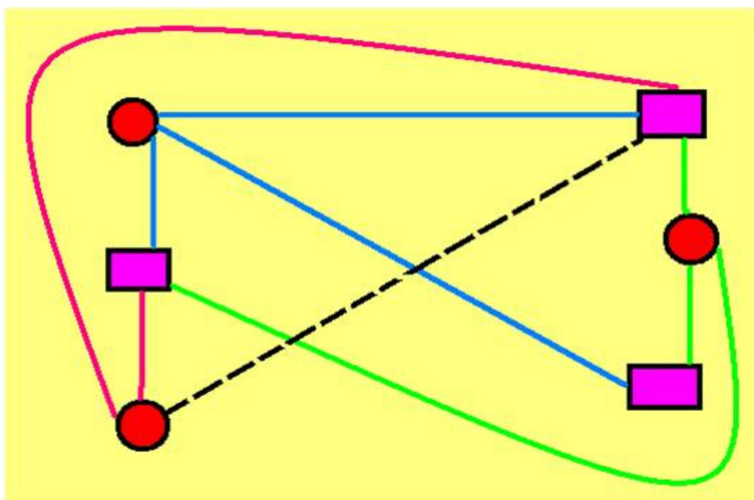
Ci siamo chiesti: **il problema dipende dalla disposizione dei punti sul piano? Abbiamo dedotto che la posizione dei punti sul piano non influenza la risoluzione del problema.**

Ad esempio:



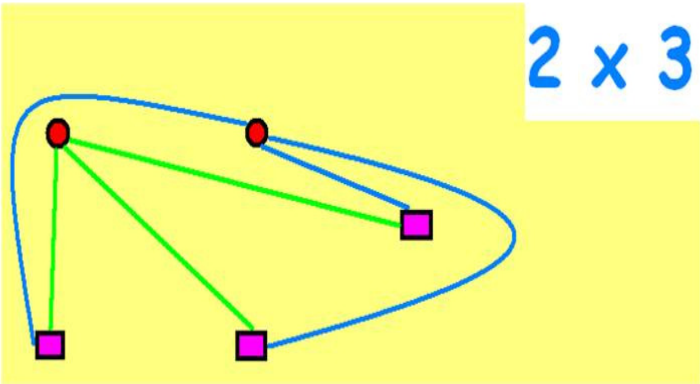


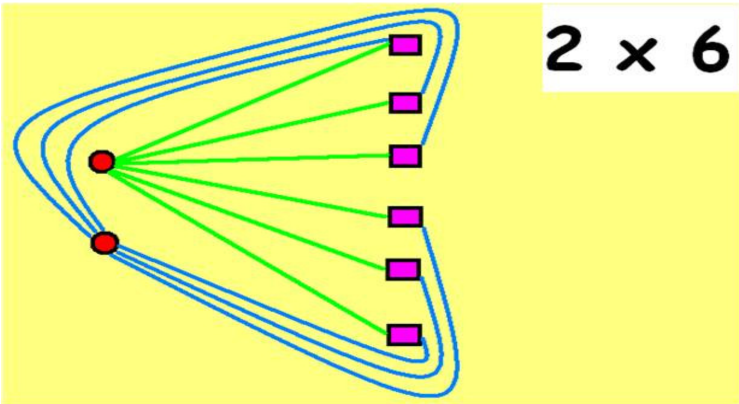


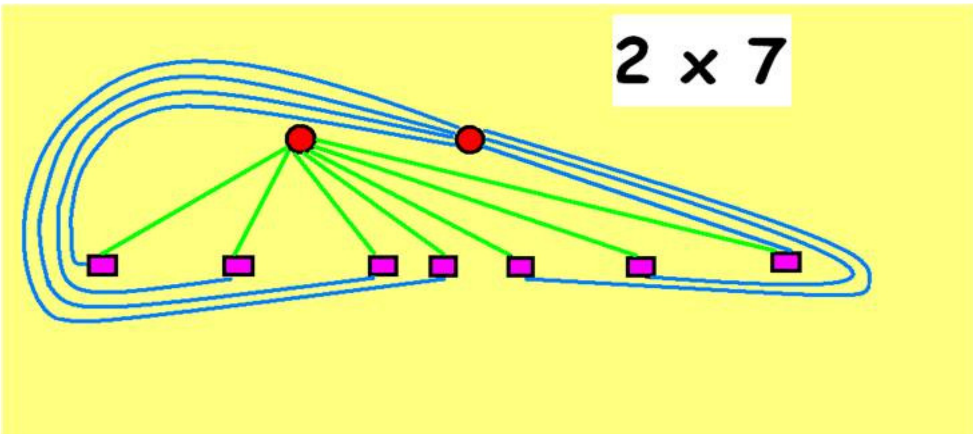


PRIMI RISULTATI

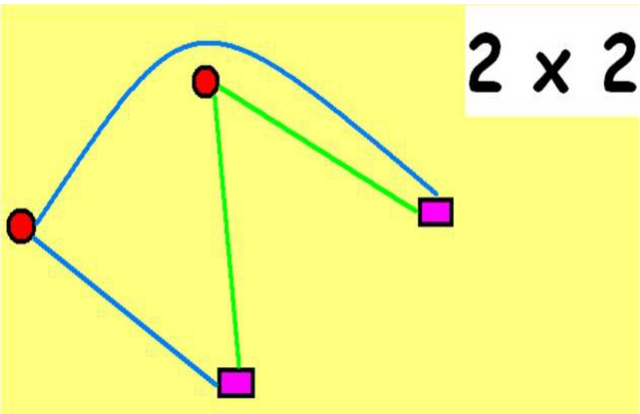
- Abbiamo ipotizzato che non sia possibile unire 3 punti con altri 3 punti senza che le linee che li congiungono si intersechino tra loro.
- Abbiamo mostrato che è possibile risolvere il problema quando il numero di piazze o di poste corrisponde a 2. Ad esempio si vedano le seguenti figure:

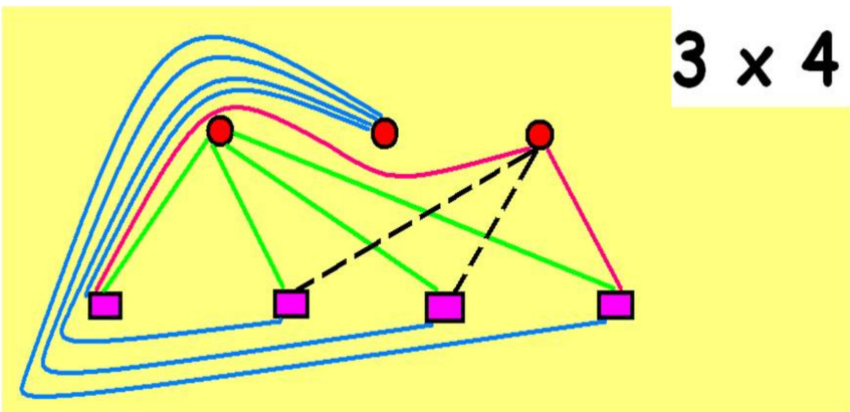


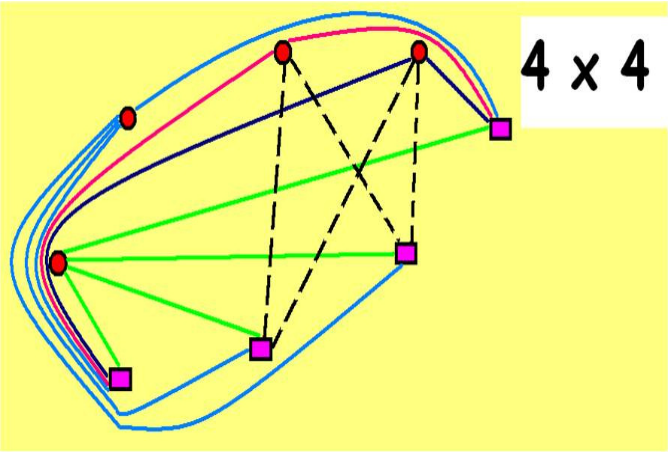


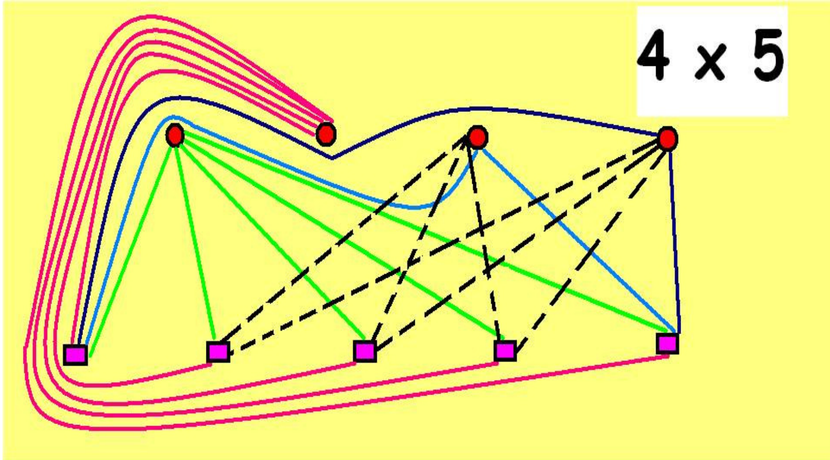


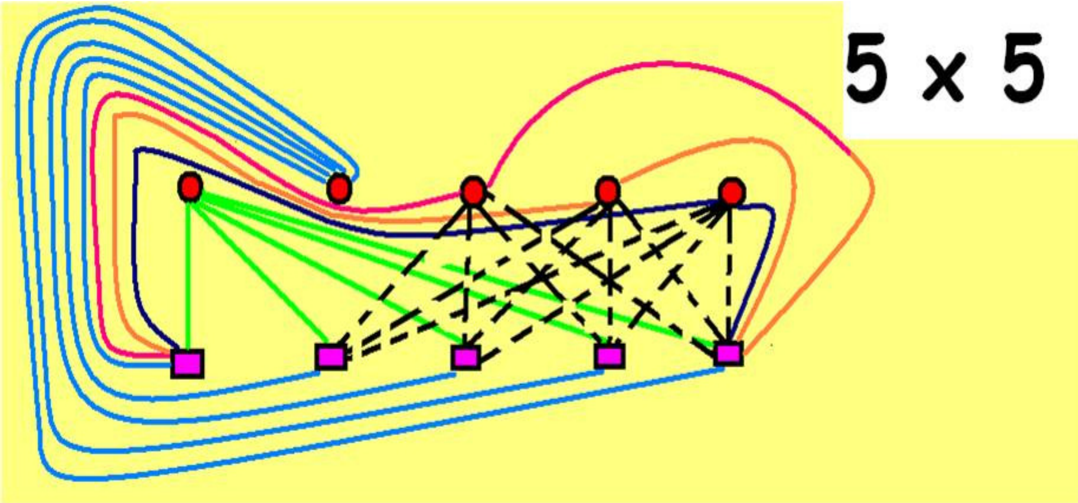
Abbiamo poi provato ad esaminare con disegni diverse situazioni variando il numero di poste e di piazze; ne riportiamo qui alcune.

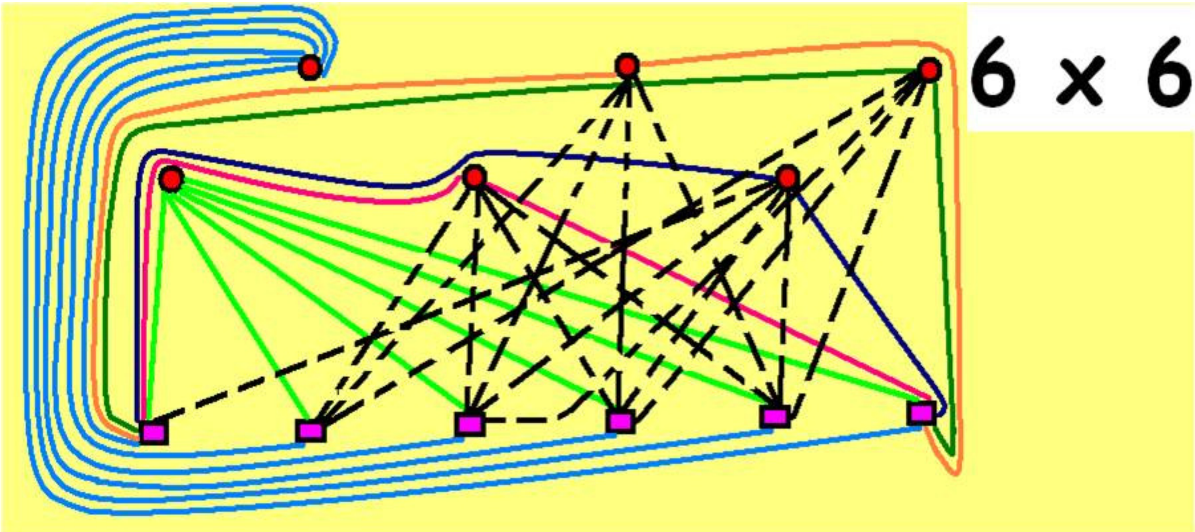





4 x 4


4 x 5


5 x 5


6 x 6

Abbiamo quindi raccolto i dati nella seguente tabella:

DATI	PERCORSI TOTALI	Percorsi totali in potenza	PERCORSI MANCANTI	Percorsi mancanti in potenza	Regioni del piano CHIUSE
2x2	4	2^2	0	0^2	1
2x3	6	\	0		2
3x3	9	3^2	1	1^2	3
3x4	12	\	2	\	4
4x4	16	4^2	4	2^2	5
4x5	20	\	6	\	6
5x5	25	5^2	9	3^2	7
5x6	30	\	12	\	8
6x6	36	6^2	16	4^2	9
6x7	42	\	20	\	10
7x7	49	7^2	25	5^2	11
7x8	56	\	30	\	12

Abbiamo notato che esiste la seguente regolarità:

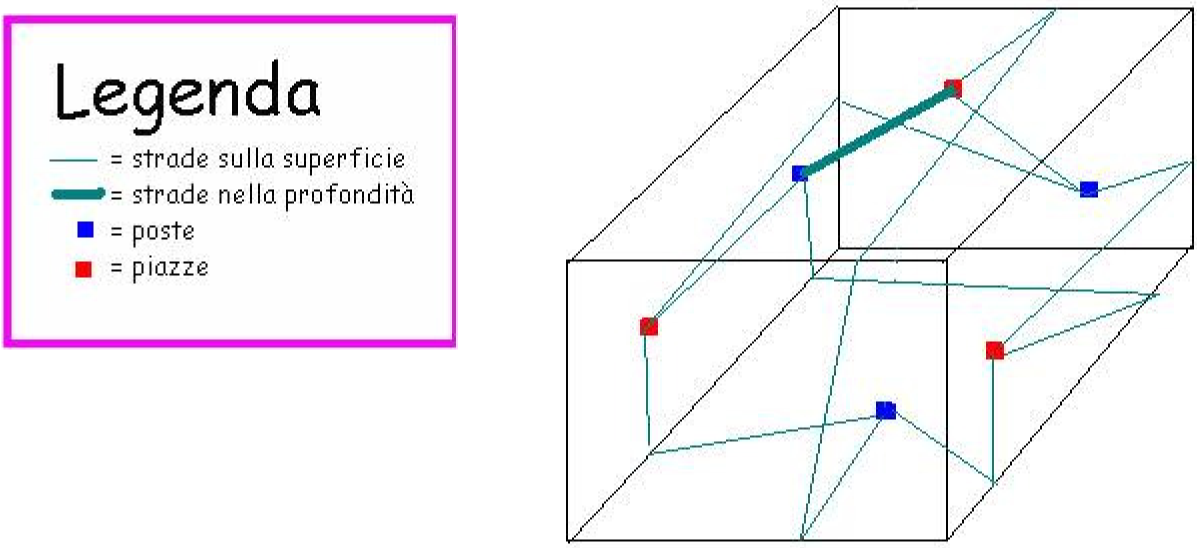
(BASE DELLA POTENZA DEI PERCORSI TOTALI) – (BASE DELLA POTENZA DEI PERCORSI MANCANTI) = 2.

Esempio: 2 – 0 = 2
3 – 1 = 2
4 – 2 = 2
5 – 3 = 2 etc.

3x3 IN 3D

Inizialmente abbiamo provato a risolvere il percorso 3x3 (cioè 3 piazze e 3 PT) su un mappamondo, vincolati quindi ad una superficie limitata immersa nello spazio tridimensionale, ma non siamo riusciti a risolvere il problema.

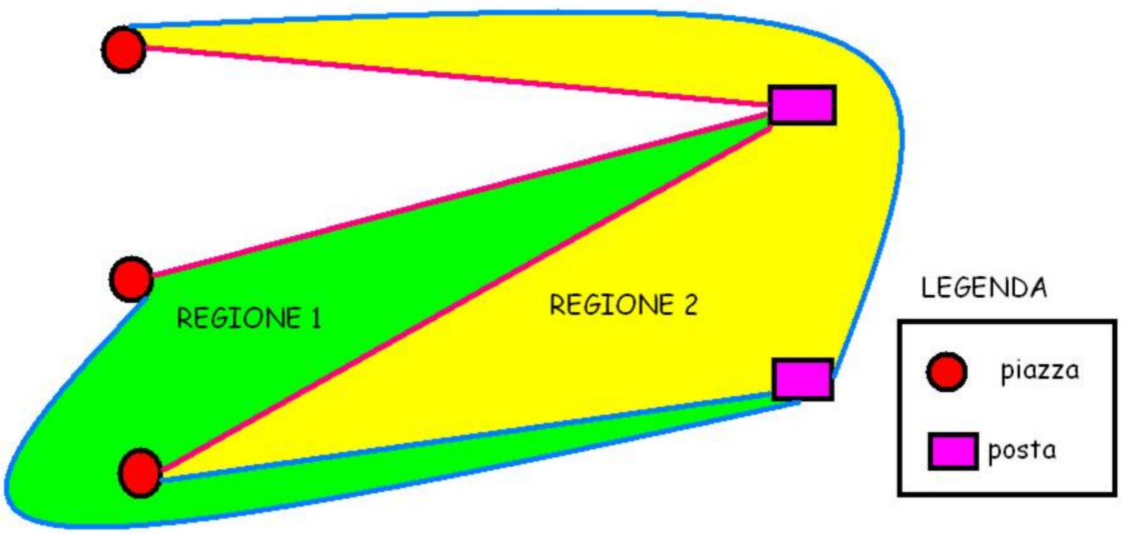
In seguito abbiamo utilizzato uno scatolone e siamo riusciti a risolvere il problema: se facciamo passare una strada attraverso lo scatolone o provando ad utilizzare un ponte il problema si può risolvere, ovvero tutte le piazze possono essere collegate alle poste senza far intersecare nessuna strada (questo non stupisce dal momento che passano infinite rette per un punto nello spazio!).



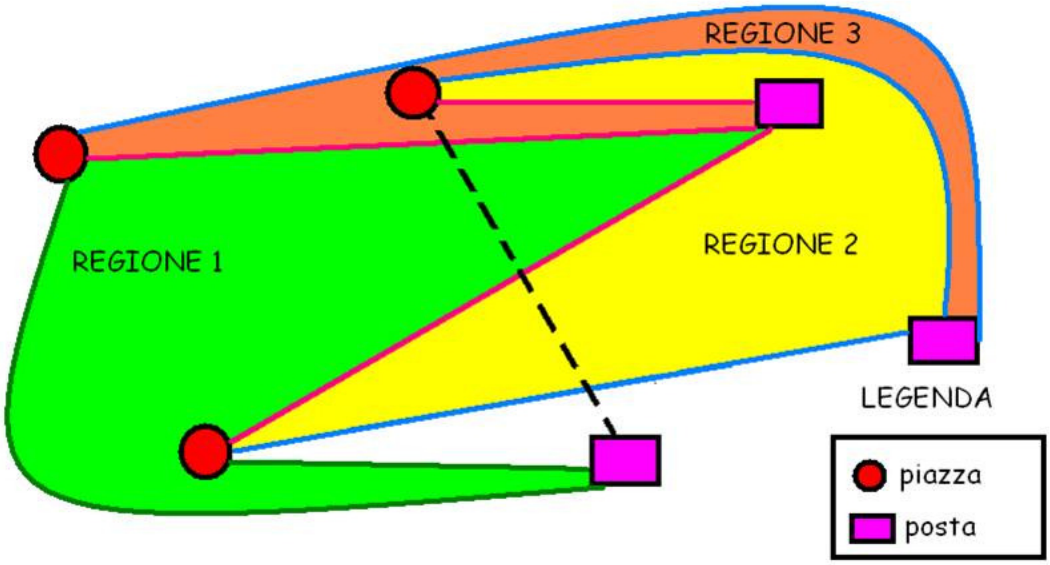
CONSIDERAZIONI SULLE REGIONI DEL PIANO

Per cercare di spiegare i risultati riportati nella tabella precedente, come prima cosa abbiamo cercato di unire piazze ed uffici ricreando una parziale configurazione risolutiva che ci poteva aiutare a giustificare l'impossibilità del problema.

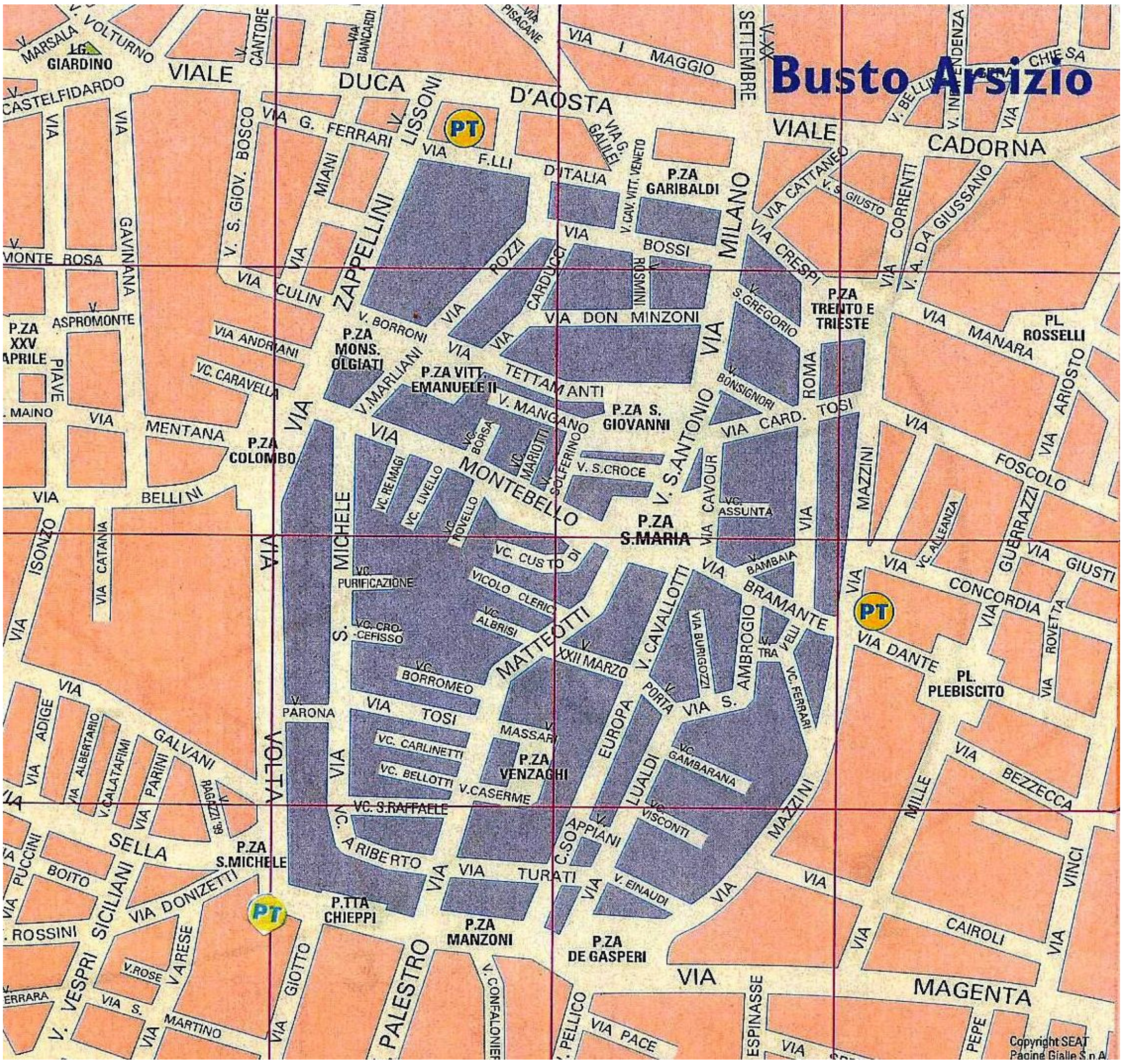
Consideriamo ora le tre piazze ma solo due uffici postali.



In questo caso otteniamo due regioni, o aree chiuse, tra poste e piazze, delimitate dalle linee di collegamento.

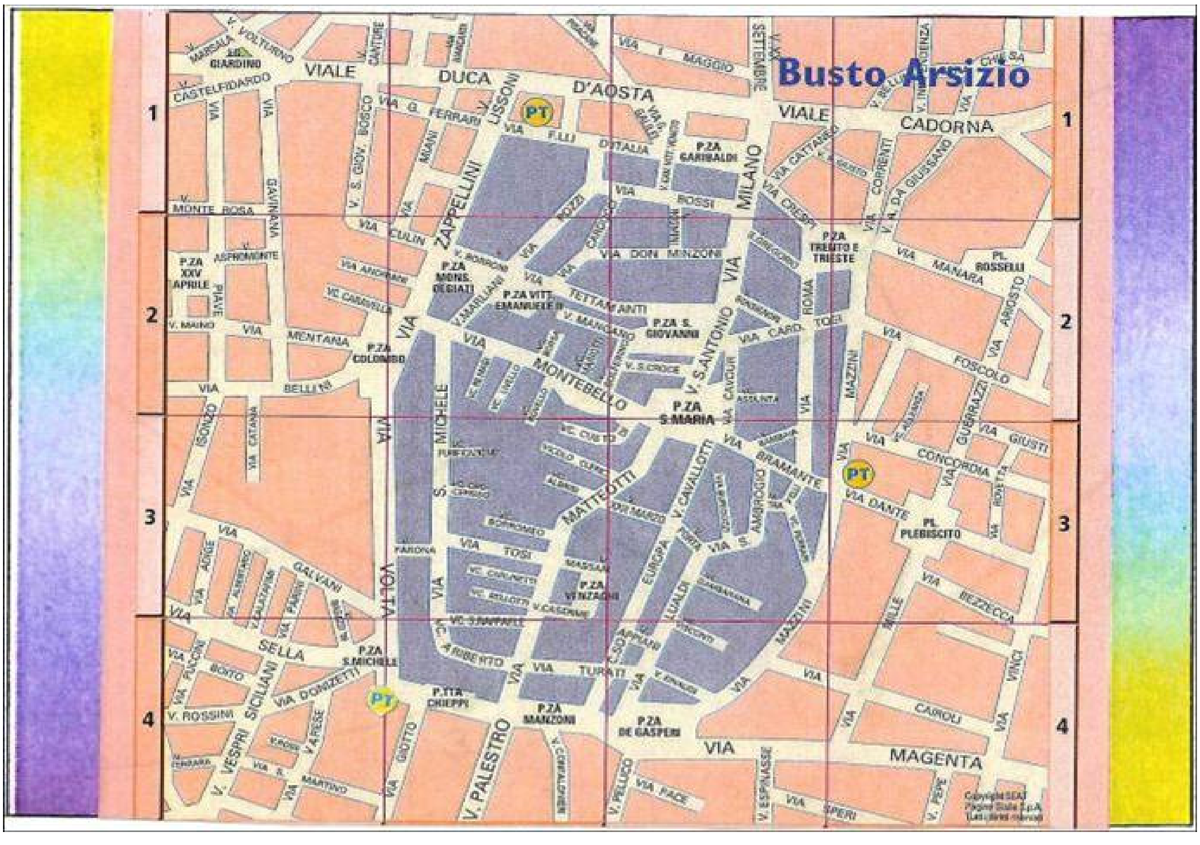


In quest'altro caso le regioni o aree chiuse sul piano sono tre e impediscono di unire la posta alla terza piazza. Così si formano le regioni 1,2,3.
La visualizzazione del problema mediante regioni chiuse aiuta a capire perché non è possibile risolvere il problema 3x3 sul piano.

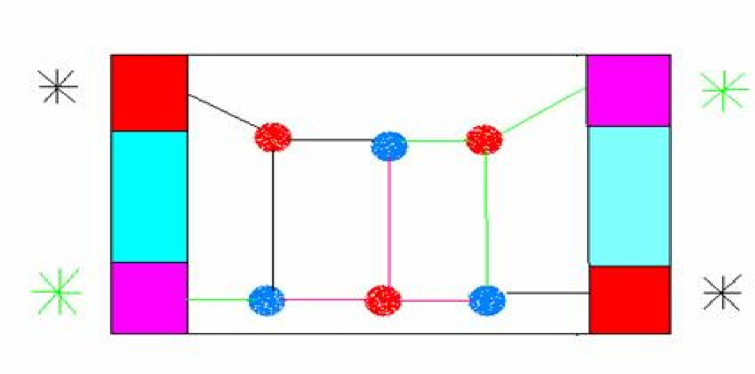


Consideriamo infatti il tragitto piazza S. Maria→ufficio postale1→piazza Colombo→ufficio postale2→piazza Garibaldi→ufficio postale3→piazza S. Maria.
Questo tragitto forma una curva chiusa e senza incroci e tale curva divide il piano in due parti: una “interna” e l’altra “esterna”. Quindi, i tre percorsi mancanti, per non incrociarsi con gli altri sei, devono essere tracciati ciascuno in una delle due parti.
Se tracciamo il primo percorso mancante nella regione interna, il secondo deve essere necessariamente nella regione esterna, dal momento che in quella interna non può stare senza intersecarsi. Analogamente, se tracciamo il primo percorso mancante nella regione esterna, il secondo deve essere necessariamente nella regione interna, dal momento che in quella esterna non può essere delineato senza creare intersezioni. In entrambi i casi, il terzo percorso mancante rimane bloccato sia dall’esterno che dall’interno. Per collegare anche l’ultima piazza con l’ultima posta, quindi, dovremmo sovrapporre una linea alle altre.
Siccome non si possono tracciare nove percorsi sul piano senza farli intersecare, non è possibile risolvere il problema.
Stabilito che **il problema 3x3 non si può risolvere nel piano**, abbiamo provato con delle superfici ottenute in modi particolari.

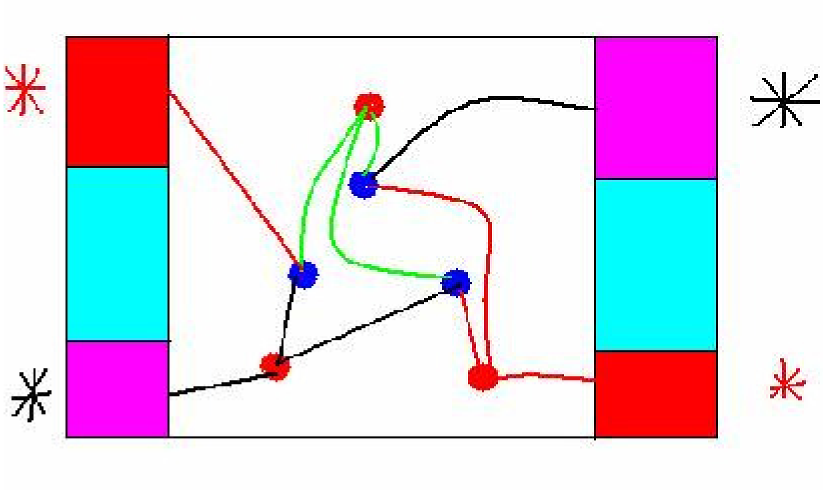
RISOLUZIONE DEL PROBLEMA SULLE CARTINE COLORATE
Partendo dalla cartina di Busto Arsizio, con dei colori su due lati opposti, ma in ordine inverso, abbiamo provato a far combaciare ogni colore con il suo corrispondente.



La regola da rispettare è che possiamo “uscire” dal foglio nella striscia colorata e “rientrare” dal lato opposto purché nell’area dello stesso colore.
Questo corrisponde a prendere in considerazione un rettangolo come in figura, in cui i lati con le frecce indicano che questi ultimi devono essere identificati nel verso indicato dalle frecce:

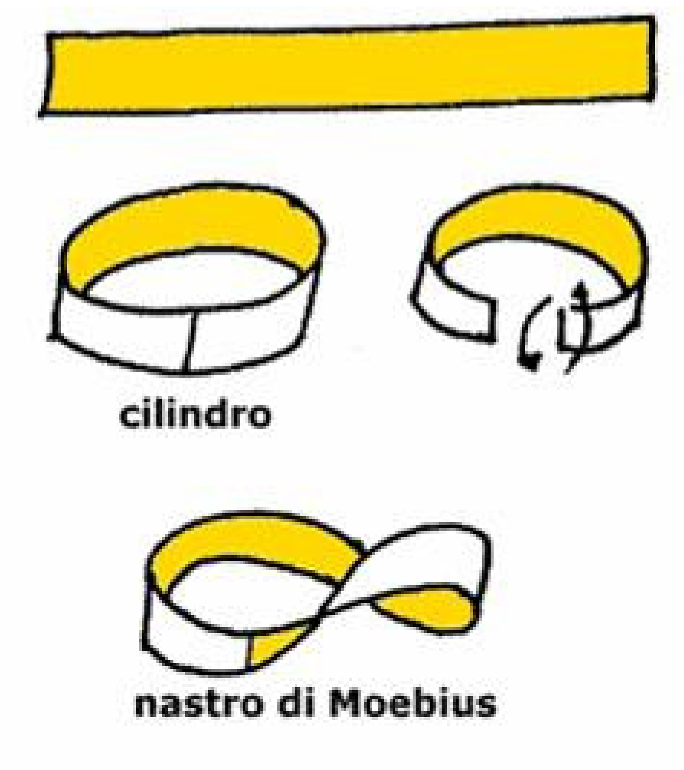


In questo caso, utilizzando la regola dei colori, possiamo collegare i tre punti con gli altri tre senza intersecare le linee che li uniscono, quindi **è possibile risolvere il quesito iniziale**.

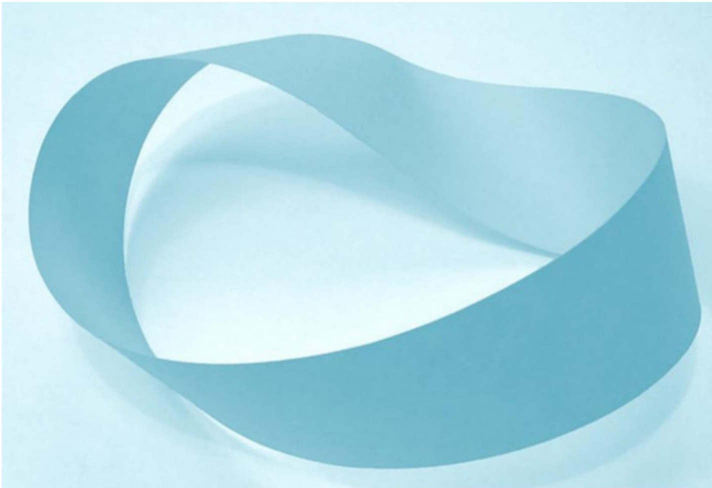


Rispettando la “regola dei colori” opposti siamo riusciti, anche in questo caso, a risolvere il problema del 3x3.
Dai nostri numerosi tentativi abbiamo osservato, come nel caso precedente, che la posizione dei punti sul piano è ininfluente rispetto alla risoluzione del problema.
Grazie alla regola dei colori è come se si creasse un percorso che ci porta fuori dal piano e ci permette di rientrare senza intersecare le altre linee.

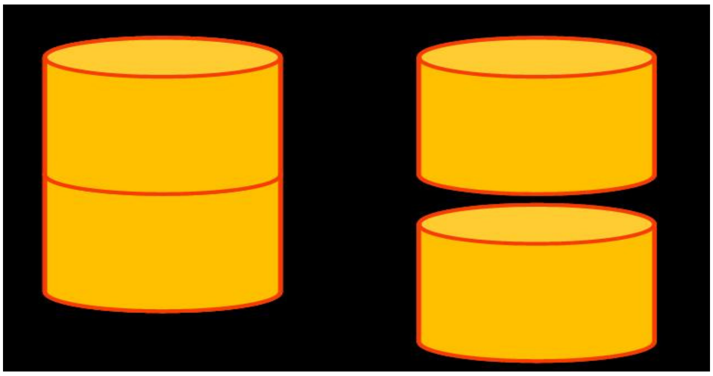
Se immaginiamo di allargare la cartina precedente fino a formare una lunga striscia e colleghiamo in senso inverso i lati brevi, come indicato dai colori, si ottiene uno “strano anello”. Abbiamo scoperto che questa superficie si chiama **anello o nastro di Moebius**.
Abbiamo provato a costruire un anello di Moebius: abbiamo tagliato una striscia di carta e con dei colori sui due lati messi in ordine inverso abbiamo fatto combaciare ogni colore col suo corrispondente, con una torsione di 180°.
Senza nessuna torsione si ottiene invece un cilindro, il cui bordo è costituito da due circonferenze.

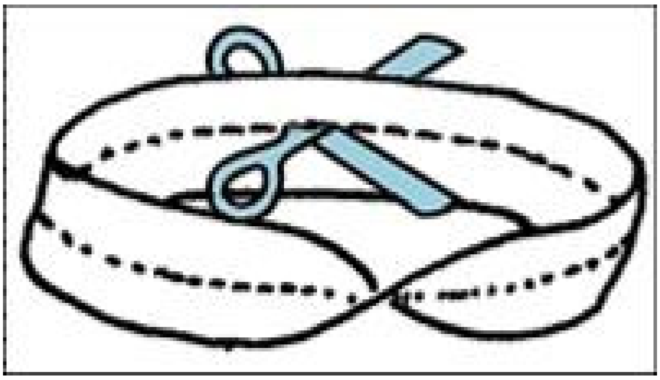


L’anello di Moebius è una superficie il cui bordo è costituito da una sola circonferenza. Inoltre, se si traccia una linea continua lungo tutto il bordo dell'anello di Moebius, si torna al punto di partenza.



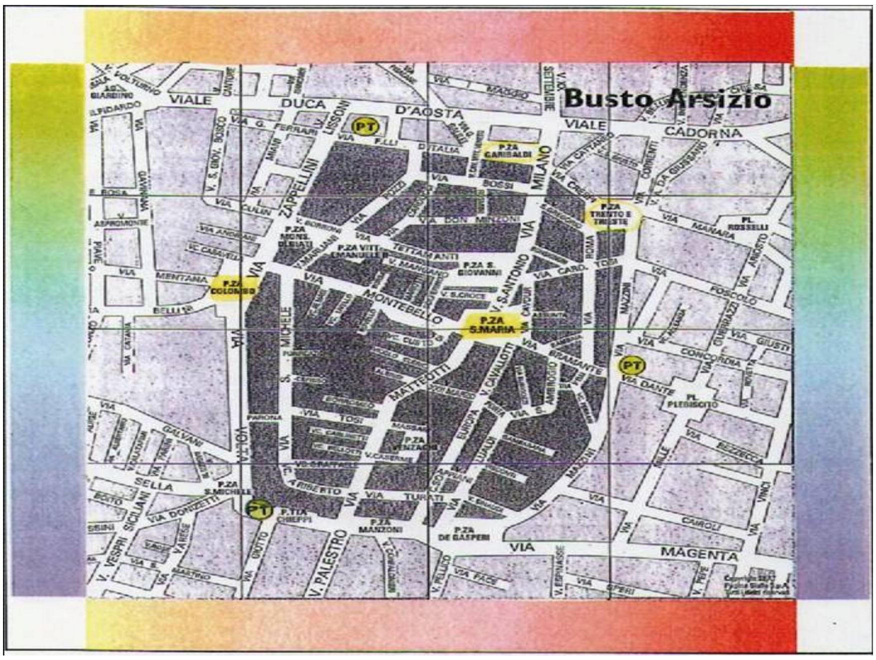
Se tagliamo a metà un cilindro lungo la circonferenza centrale si ottengono due cilindri, mentre se tagliamo a metà un nastro di Moebius lungo la sua circonferenza centrale, questo non si separa, ma otteniamo un unico oggetto (che è in realtà uguale a un cilindro, dal momento che il suo bordo è costituito da due circonferenze).



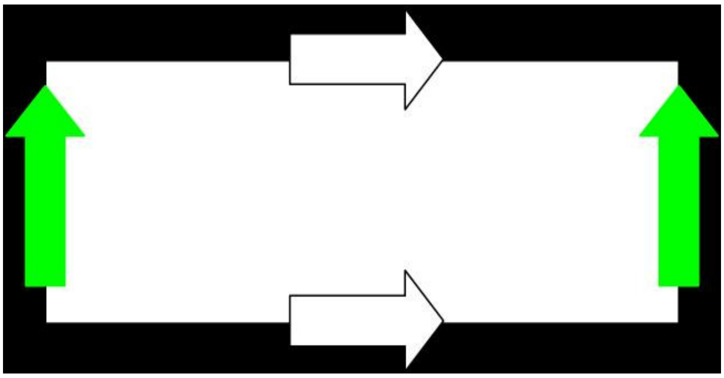


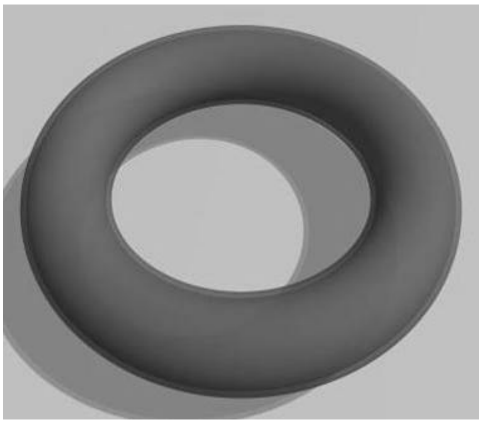
Se si taglia un nastro di Moebius in tre parti lungo la circonferenza, si ottengono due oggetti concatenati: un cilindro ed un anello di Moebius.
Guardandoci un po’ intorno ci siamo accorti che il nastro di Moebius è una forma che ritorna in diversi simboli, per esempio nel logo del riciclaggio o in varie opere d’arte.

Abbiamo poi lavorato su un’altra cartina, con le regole precedenti.



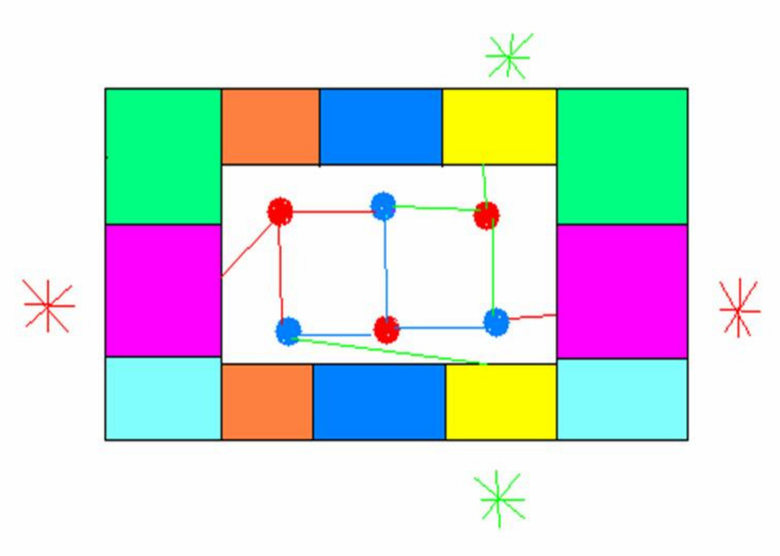
La cartina può essere rappresentata dalla seguente figura, in cui viene rappresentato un rettangolo nel quale abbiamo identificato basi e altezze come indicato nel disegno: i colori sono disposti nello stesso ordine.





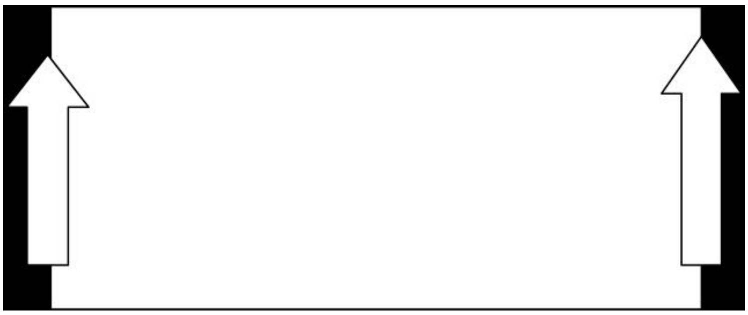
Facendole combaciare otteniamo un solido che abbiamo chiamato "ciambella".

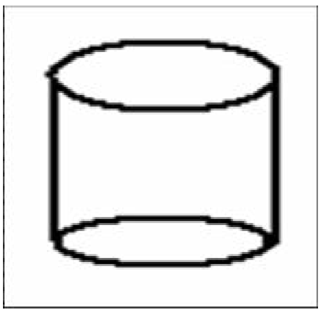
Siamo arrivati alla conclusione che **è possibile risolvere il problema 3x3**, come mostra la figura seguente:



STUDIO DI ALTRE SUPERFICI

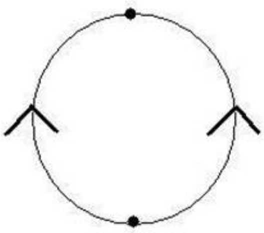
1) Come figura di base abbiamo un rettangolo con i lati identificati come indicano le due frecce. Sovrapponendo le frecce otteniamo un **cilindro**.

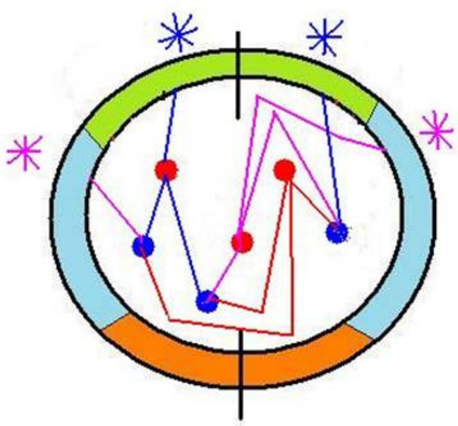


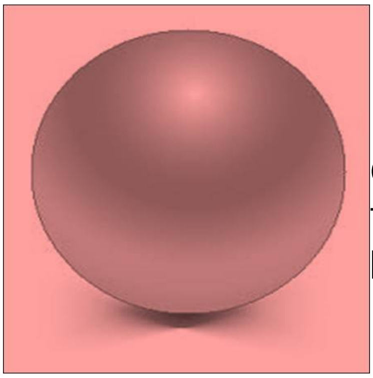


In questo caso è **impossibile risolvere il nostro problema**, perché è come lavorare sul piano.

2) Abbiamo poi provato a considerare un **cerchio**, disponendo i colori in modo simmetrico.
   Lavorando sul piano con la regola dei colori abbiamo concluso che in questo caso **il problema 3x3 non è risolvibile** perché le linee “escono” ma non possono “rientrare” nell’area dello stesso colore; infatti se le facessimo rientrare nello stesso punto le linee si intersecherebbero, come mostra la seguente figura:

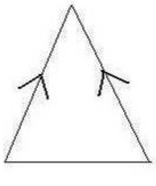


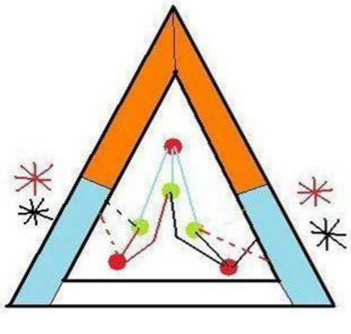


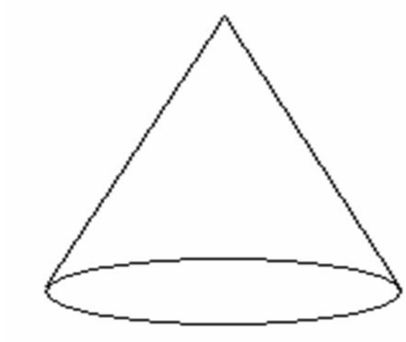


Considerando il cerchio, accostando le parti come in figura si ottiene una **sfera**. Anche in questo caso **non è possibile risolvere il problema**.

3) Abbiamo poi provato anche a considerare un **triangolo**, disponendo i **colori in modo simmetrico**.
   Abbiamo notato, ancora, che **il problema non è risolvibile** perché, come visto nel caso precedente, le linee non possono “rientrare” nel punto corrispondente a dove sono “uscite”, senza intersecarsi.

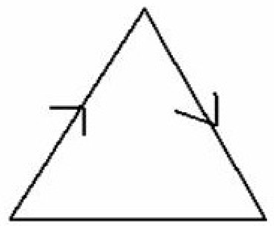


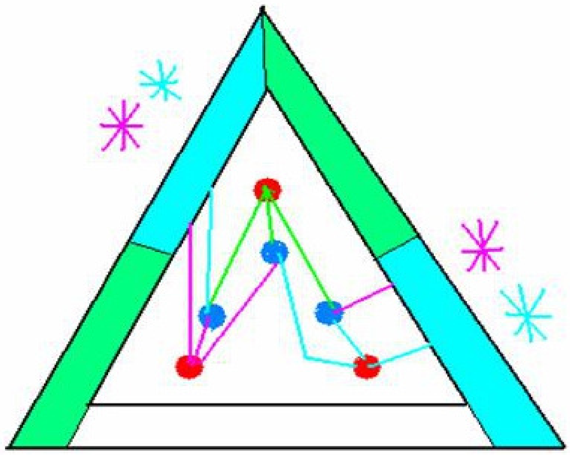




Partendo dal triangolo, accostando i lati coincidenti, otteniamo un **cono**. Anche in questo caso confermiamo che è **impossibile risolvere il nostro problema**.

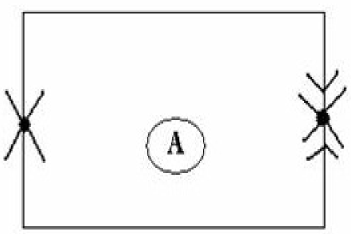
4) Prendiamo in considerazione lo stesso **triangolo**, ma con i **colori invertiti** sui due lati. Notiamo che in questo caso **il problema 3x3 è risolvibile**; infatti secondo la regola dei colori, come si vede dal disegno, le linee “escono” e “rientrano” nel punto con lo stesso colore senza intersecarsi.

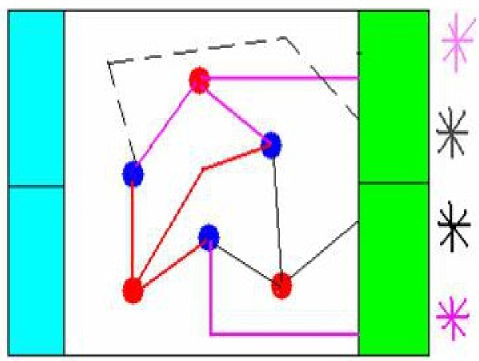


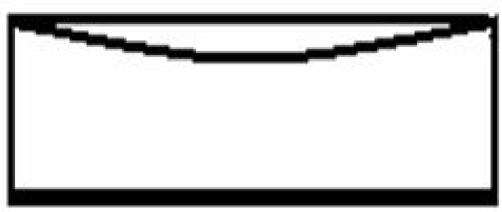


Non siamo però riusciti a capire che cosa si ottiene accostando i lati corrispondenti: potrebbe essere qualcosa di analogo al nastro di Moebius.

5) Analizziamo un rettangolo in cui i colori sono disposti sui due lati minori, in modo simmetrico, rispetto all’asse orizzontale del rettangolo, come mostrato nella figura A.
Notiamo che **anche in questo caso il problema non è risolvibile.** Le linee, infatti, dovrebbero “uscire” e “ rientrare” in modo simmetrico. Invece sono disposte in modo diverso e, come nel caso precedente, se le immaginiamo uscire dal piano, si intersecano.

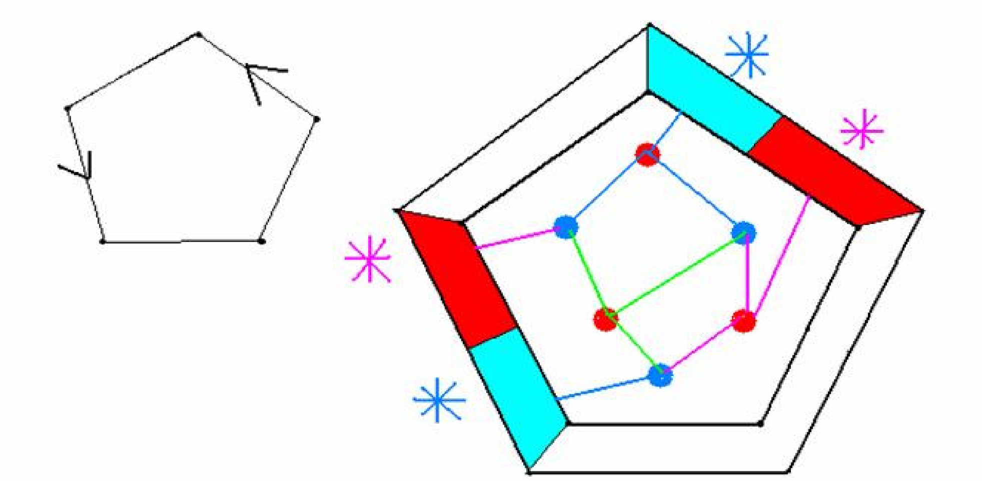






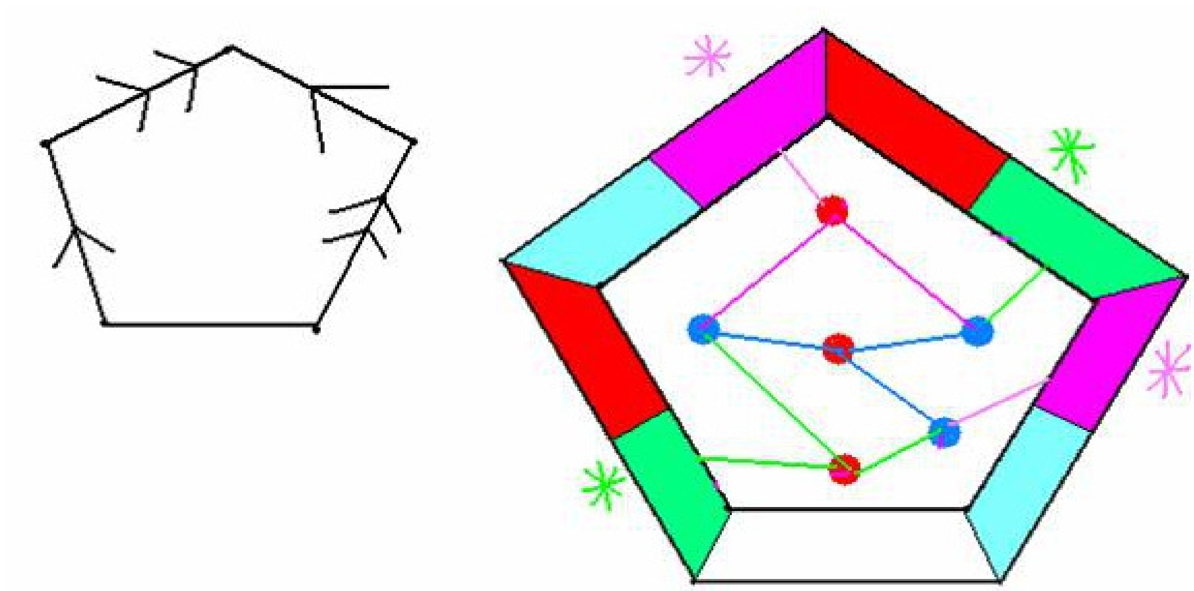
Unendo i simboli uguali di questo rettangolo e piegando là dove ci sono i punti otteniamo un’altra figura che abbiamo chiamato: “cappello da marinaio”.

6) Utilizziamo come forma nel piano un **pentagono** nel quale i colori sono localizzati su due lati opposti non consecutivi. I **colori** sono **invertiti**.



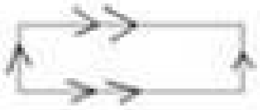
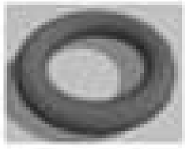
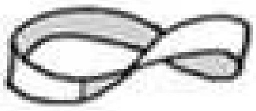
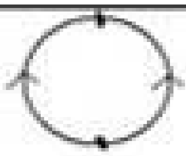
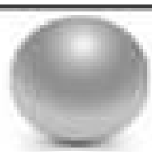
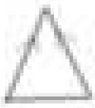
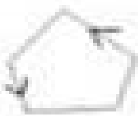
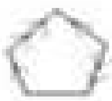
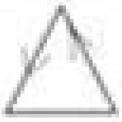
Il problema è risolvibile, perché le linee rientrando nell'area dello stesso colore da cui sono uscite, esattamente nello stesso punto, non si intersecano tra di loro. Sovrapponendo le frecce otteniamo un nastro di Moebius. Dal momento che si possono riportare le osservazioni fatte per il nastro di Moebius, è possibile risolvere il problema.

7) Consideriamo un altro **pentagono** con i **colori disposti in modo simmetrico su due lati opposti a due a due**.



Il problema si può risolvere, come mostrato dai percorsi sul piano. Unendo i colori corrispondenti otteniamo qualcosa di analogo alla ciambella.

TABELLA RIASSUNTIVA DEI CASI STUDIATI

Caso	Figura piana con identificazione lati	Solido ottenuto	Risoluzione del problema 3x3
1			NO
2			SI
3			SI
4			NO
5			NO
6			SI
7			SI
8			SI
9			NO

CONCLUSIONI

Durante il nostro lavoro ci siamo chiesti più volte quale fosse la spiegazione della possibilità di risolvere o meno il problema 3x3 nei diversi casi studiati.
Analizzando la tabella riepilogativa, abbiamo notato che i casi che portavano ad una risoluzione del problema erano riconducibili al nastro di Moebius (casi 3, 6 e 8), o alla ciambella (casi 2 e 7).
Ci siamo allora chiesti, in particolare, che differenza ci fosse tra due oggetti a noi molto familiari: una sfera (caso senza soluzione) e una ciambella (caso con soluzione).
Abbiamo intuito che la spiegazione poteva essere nel fatto che, comunque si scelga una curva semplice e chiusa sulla sfera, questa divide la sfera "in due pezzi", mentre con la ciambella si può trovare una curva semplice e chiusa che mantiene la superficie in "un pezzo solo". Abbiamo poi capito che questa regola poteva funzionare per tutti i casi.
È evidente che la giustificazione dell'impossibilità del problema nei casi che abbiamo studiato ha un'analogia con quanto visto sul piano: sul piano non siamo riusciti a risolvere il problema proprio perché abbiamo trovato una linea senza incroci (semplice) e chiusa che lo divideva in due parti (due regioni).

Possiamo quindi concludere che:

- il problema 3x3 **non ha soluzione** se qualsiasi linea semplice e chiusa divide la superficie in "due pezzi", o il piano in due regioni.
- il problema 3x3 ha soluzione se è possibile trovare una linea semplice e chiusa che non divide la superficie in "due pezzi" lasciando così un "unico pezzo".