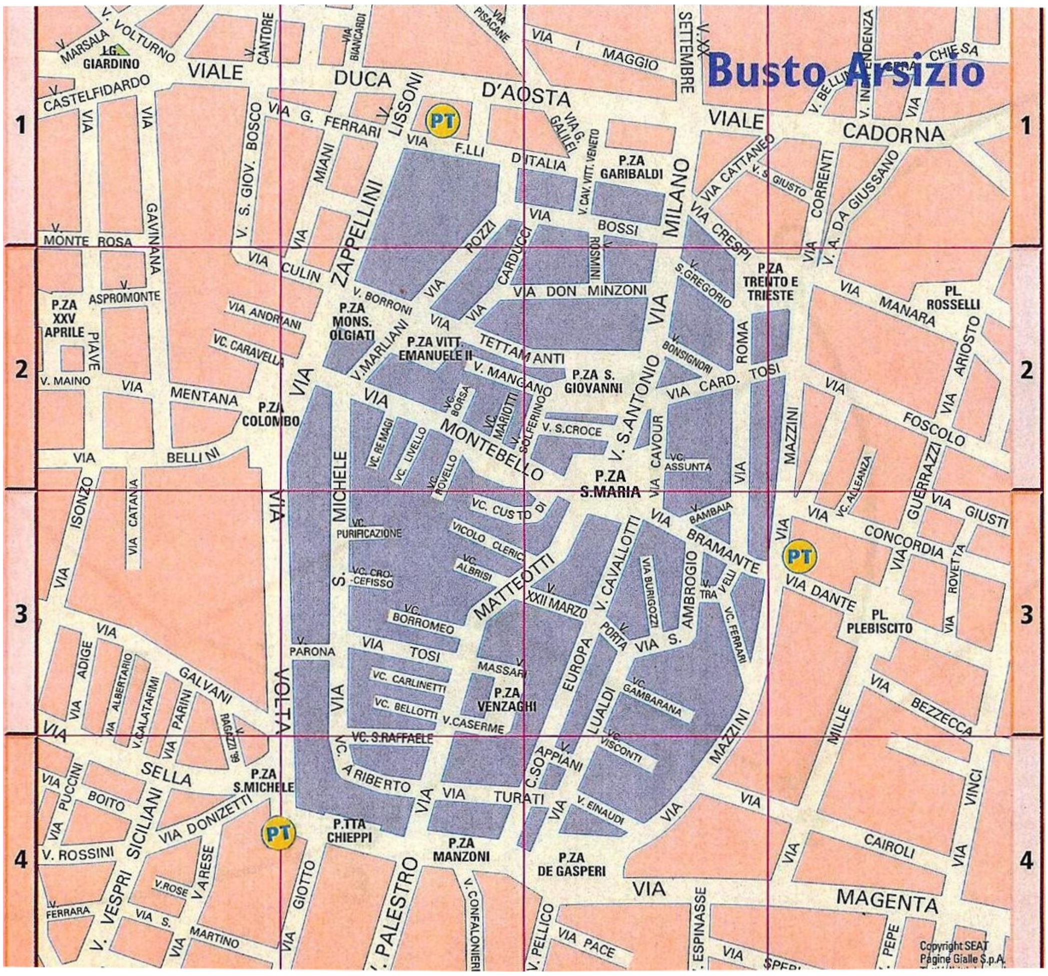
TRE × TRE

Avete a disposizione una cartina di Busto Arsizio su cui sono segnate tre importanti piazze: piazza S. Maria, piazza Colombo e piazza Garibaldi, e tre uffici postali. Si vuole progettare un percorso di superficie che colleghi direttamente ciascuno degli uffici postali con ciascuna delle tre piazze. Non importano la lunghezza o il tragitto delle linee, ma queste non devono intersecarsi. È possibile?

Istituto comprensivo "Leonardo Da Vinci" – Castellanza (VA)
Classe: II C
Insegnante di riferimento: prof.ssa Nicoletta Bonacina
Ricercatore: dott.ssa Cristina Oppi
Partecipanti: Luca Albertini, Ermes Bandera, Fabiana Bellizoni, Ilaria Bignotti, Silvia Borroni, Simone Bottini, Tania Cabezas, Daniele Colombo, Emanuela Dajani, Alessandro D'Amico, Luca D'Amone, Aisha Ghezzi, Davide Guzzetti, Silvia Lazzarini, Claudio Martignoni, Valentina Musazzi, Mirko Papa, Andreina Rivas, Alessia Silvestri, Gabriele Starvaggi

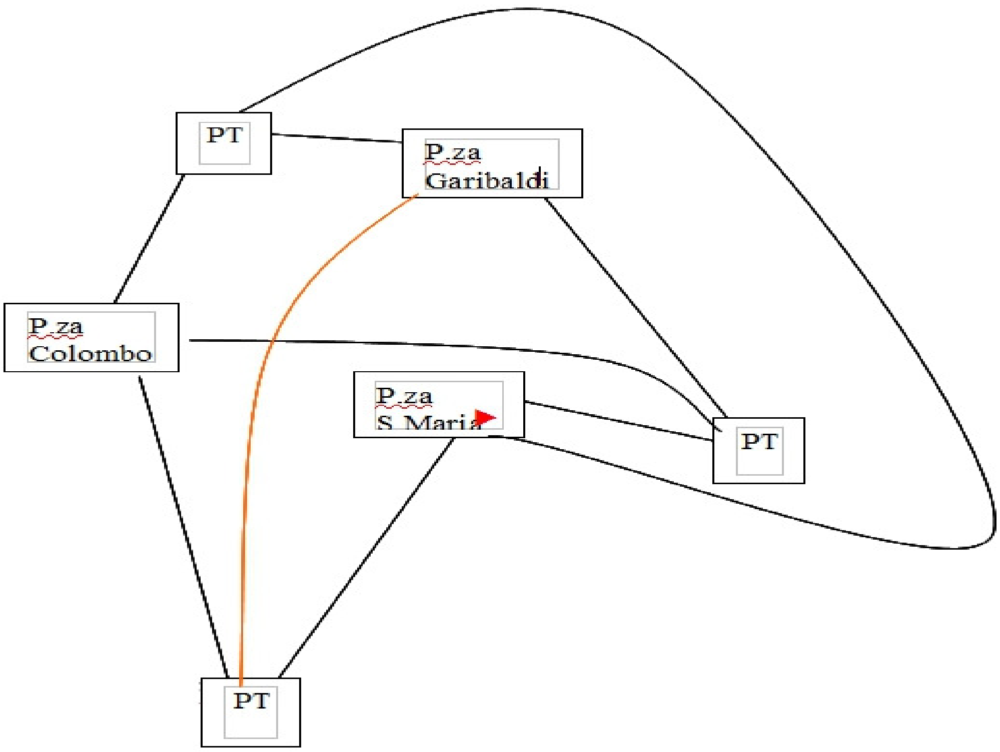


Il lavoro è stato svolto con la professoressa Nicoletta Bonacina, insegnante di Matematica, e la dott.ssa Cristina Oppi, in qualità di ricercatrice MATh.en.JEANS del Centro "matematita" di Milano.
Al primo incontro abbiamo ricevuto la cartina di Busto Arsizio e il problema su cui abbiamo poi svolto il lavoro.

Prima di incominciare il lavoro ogni gruppo ci ha pensato, si è confrontato con i compagni, ed alla fine ha chiesto delucidazioni e fatto delle osservazioni. Ci siamo posti le seguenti domande:

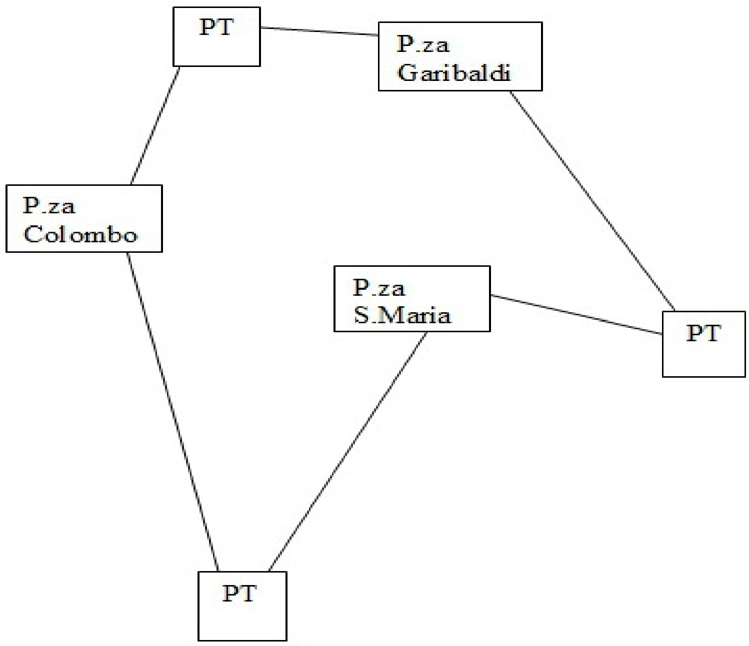
- le strade da percorrere devono essere quelle della cartina, o possono essere delle nuove strade?
- sulla stessa strada si può passare con due tragitti paralleli (ovviamente senza che questi si intreccino)?
- due tragitti passanti per la medesima piazza da parti opposte si devono ritenere intrecciati?

Dopo un confronto in classe abbiamo tutti concordato, in base ad alcune proposte che sono state fatte, che le strade da seguire potevano essere intese come delle linee, per cui non dovevano necessariamente coincidere con delle strade segnate sulla cartina. Abbiamo poi osservato che due linee sovrapposte, rappresentanti tragitti paralleli, si intersecano.
Dopo numerosi tentativi, non riuscendo a risolvere il problema, ci siamo posti le seguenti domande, più curiose, per tentare di dimostrare l'esistenza di una soluzione al nostro problema:
* si può passare da dietro il foglio?
* si possono prevedere ponti o sottopassi?
In entrambi i casi citati il problema diventa risolubile; tuttavia queste operazioni non erano consentite con la cartina che avevamo a disposizione.
Abbiamo fatto numerose prove ed abbiamo ipotizzato che il problema **non sia risolubile** sulla cartina di Busto Arsizio perché nel migliore dei casi, due percorsi si incrociano sempre.



Alla fine abbiamo deciso di schematizzare come in figura la rete di percorsi possibili, indicando in rosso il percorso mancante che, in qualsiasi modo venga tracciato, ne interseca almeno un altro.

Abbiamo successivamente osservato che il problema diventa risolubile nel caso in cui si chiede di collegare ciascuna piazza con solo due delle tre poste.



Abbiamo fatto qualche altra prova e abbiamo ottenuto i risultati riportati nella seguente tabella:

combinazioni possibili	Il problema è risolubile?
3 piazze 3 poste	no
3 piazza 2 poste	sì
4 piazze 3 poste	no
4 piazze 2 poste	sì

Sembra quindi che la risolubilità del problema dipenda dal numero di piazze e poste: se il numero delle poste e quello delle piazze è maggiore o uguale a 3, allora non si trova una soluzione.

In un incontro successivo, vista la difficoltà nel dimostrare l'impossibilità del problema, il ricercatore ci ha suggerito di considerare una parziale configurazione risolutiva come quella sopra riportata in cui sono disegnate solo sei delle nove linee che occorrono, e di provare a rispondere alle seguenti domande:

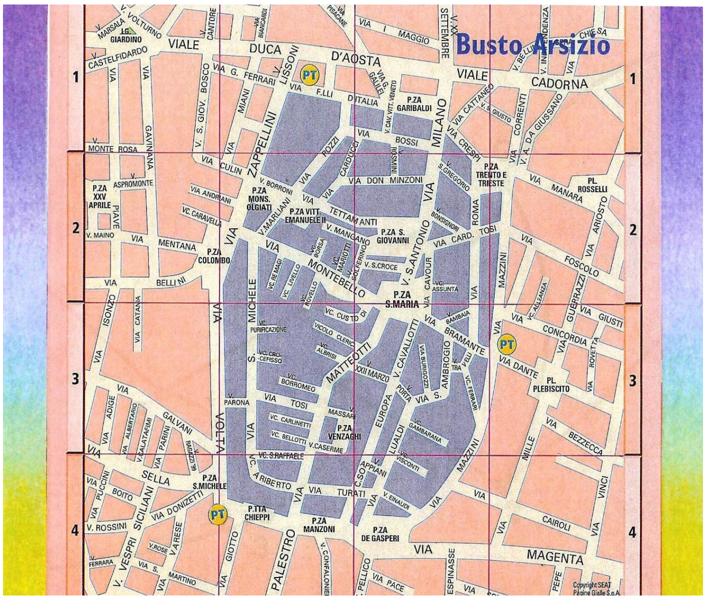
1. Che tipo di linea formano i 6 percorsi di base?
2. In quante regioni questa curva divide il piano?
3. Questo numero dipende da come sono stati tracciati i percorsi?

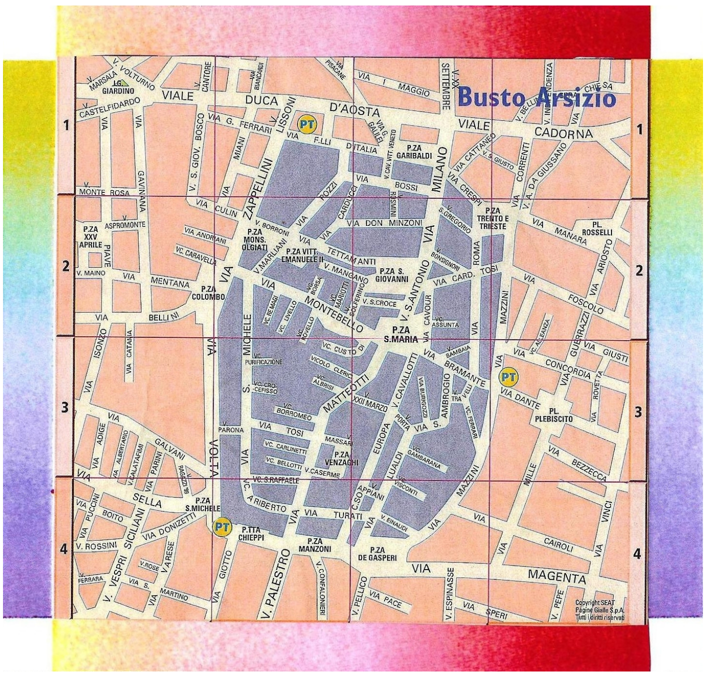
In seguito ad un confronto in classe, abbiamo risposto nel seguente modo:

1. Si forma una linea (spezzata) chiusa e senza incroci.
2. Si creano una regione limitata, racchiusa dalla linea, ed un'altra illimitata.
3. No, dipende solo dal modo in cui sono connessi i vertici, non dalla posizione o dalla distanza, e neanche dal percorso scelto per le diverse linee.

Partendo da queste risposte e dalla discussione da esse generata, abbiamo infine concluso che il problema non si può risolvere: infatti, ciascuno dei tre cammini che restano da inserire è tutto interno o tutto esterno rispetto alla curva semplice e chiusa costituita dai sei cammini della figura precedente. Se si traccia uno di questi tre cammini all'interno della curva, questo impedirà il passaggio per l'interno agli altri due, poiché i cammini non possono incrociarsi; invece, tracciando uno dei tre cammini all'esterno della curva, per lo stesso motivo questo impedirà il passaggio per l'esterno agli altri due. In tutti e due i casi, l'ultimo cammino resta bloccato.

Abbiamo allora provato a risolvere lo stesso problema su altre tre cartine, con la regola che, per tutti e tre i casi, è possibile uscire con il percorso in un determinato punto di una scala cromatica e sbucare dall'altra parte della scala nel punto dello stesso colore da cui siamo usciti.

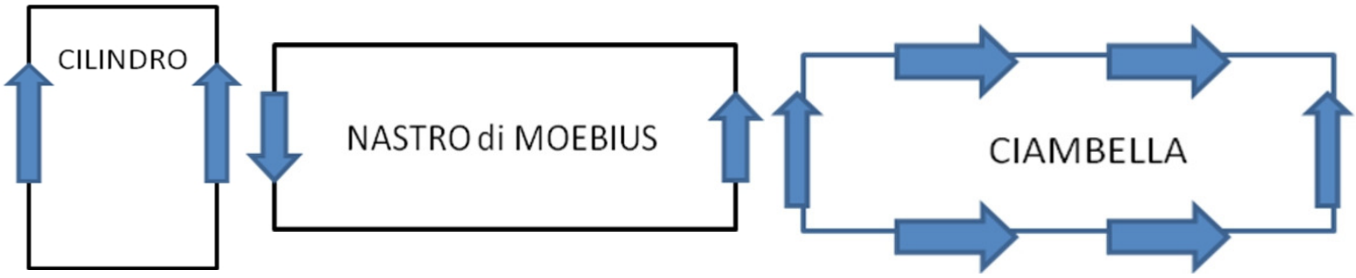




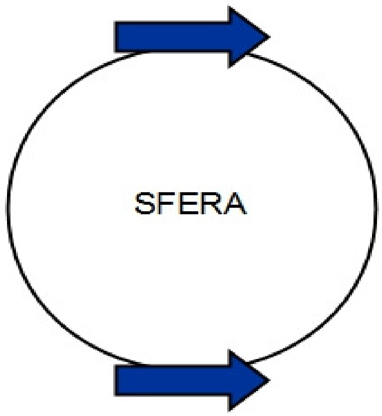
Cercando di “modellare” il foglio delle cartine seguendo la regola indicata dalle scale cromatiche, si ottengono delle superfici particolari:

- scale cromatiche solo laterali con gradazioni cromatiche dall’alto verso il basso uguali → cilindro;
- scale cromatiche solo laterali con gradazioni cromatiche opposte → nastro di Moebius;
- scale cromatiche laterali con gradazioni cromatiche dall’alto verso il basso uguali + scale cromatiche sopra e sotto con gradazioni cromatiche da sinistra verso destra uguali → ciambella.

Per immaginare meglio le superfici che si ottengono, il ricercatore ci ha suggerito di realizzare i disegni sotto riportati, in cui abbiamo sostituito alla scala cromatica una freccia orientata che seguiva la scala dei colori.



Tutto questo per riproporre il problema sulle superfici creati dall’incollaggio dei lembi della pianta nei diversi modi indicati dalla scala cromatica.
Le figure che si formano sono: un cilindro, una ciambella, una palla ed infine un nastro di Moebius.
Ci è risultato difficile immaginare il problema in queste situazioni e così abbiamo deciso di realizzare dei modelli dei solidi.



Abbiamo quindi cominciato a fare delle prove, riportando piazze e poste sui singoli solidi per vedere se era cambiato qualcosa rispetto al caso del piano.
Alla fine abbiamo scoperto che su alcuni dei solidi che abbiamo costruito, il problema delle 3 poste si può risolvere, e precisamente **su ciambella e nastro i percorsi non si intrecciano**.
Ciò dipende dal fatto che, in questi casi, è possibile trovare una curva semplice e chiusa che non divide ciascuna delle superfici in "due parti".
Invece sulla sfera, così come sul piano, non siamo riusciti a risolvere il problema. In questi casi infatti, se disegnavamo sulla superficie una qualsiasi curva come sopra, questa divideva sia il piano che la sfera in "due parti".

Ragionando assieme al ricercatore su queste superfici, ne abbiamo poi trovato alcune differenze. Una di queste risiede in quelli che abbiamo chiamato **"Punti di bordo".**

Secondo quanto concordato insieme in classe per noi i **punti di bordo** sono i punti per cui non è possibile trovare un cerchietto (anche piccolissimo) centrato nel punto stesso, che sia **tutto contenuto** nella superficie del solido.

Abbiamo allora riassunto le nostre osservazioni nella seguente tabella:

Tipo di solido	Ci sono punti di bordo?	Quante curve formano?	Che forma hanno?
Ciambella	No	Nessuna	Nessuna
Nastro	Sì	1	Circonferenza
Cilindro	Sì	2	Circonferenze
Sfera	No	Nessuna	Nessuna


MIND THE GAP
SWEET