Matematica e musica - parte VI

La scala naturale e i suoni armonici

Nella precedente puntata di questa serie abbiamo visto che nella scala tolemaico-zarliniana alcuni rapporti fra le frequenze delle note risultavano più semplici di quanto non avvenisse con la scala pitagorica. Nel sistema greco soltanto gli intervalli di ottava, quinta e quarta erano descritti da rapporti semplici, e quindi suonavano come consonanti. Con l'introduzione della scala naturale, anche le terze e le seste furono ammesse in questo "club" esclusivo.

Come abbiamo già appurato, il prezzo pagato per questa innovazione fu la perdita della semplicità pitagorica. Non c'era più un solo intervallo elementare corrispondente al *tono*, ma due: il maggiore, pari a 9:8 (do-re, fa-sol, la-si) e il minore, uguale a 10:9 (re-mi, sol-la). Per giunta, diventavano dissonanti l'intervallo di quinta re-la, correlato al rapporto per nulla semplice di 40:27 (anziché 3:2), e il suo complementare intervallo di quarta la-re, associato a 27:20 (anziché 4:3).

Per quanto riguarda le terze e le seste, occorre distinguere tra maggiori e minori.

Le terze maggiori (do-mi, fa-la e sol-si) suonavano armoniose perché corrispondenti al rapporto semplice di 5:4. Le terze minori (mi-sol, la-do e si-re) risultavano legate al rapporto semplice di 6:5, per cui erano anch'esse consonanti: faceva eccezione l'intervallo re-fa, reso "stonato" dal rapporto non semplice di 32:27.

E le seste? Quelle maggiori (do-la, re-si e sol-mi) erano intonate in quanto connesse al rapporto di 5:3, ma va segnalata l'anomalia dell'intervallo fa-re, con il rapporto lievemente dissonante di 27:16. Le seste minori (mi-do, la-fa e si-sol) suonavano invece tutte intonate, grazie al loro rapporto semplice di 8:5.

Nasce a questo punto una legittima domanda: qual è la ragione profonda per cui suonando insieme note le cui frequenze stanno tra di loro in rapporti semplici percepiamo una sensazione piacevole e armoniosa, mentre se la frazione è formata da numeri più grandi l'accordo "stona"?

La risposta a questa domanda richiede un breve excursus sulla fisica dei suoni armonici.

Supponiamo di suonare una nota su un pianoforte. Se scoperchiamo lo strumento, ci accorgiamo che i martelletti hanno messo in vibrazione la corda corrispondente al tasto premuto. Quando facciamo vibrare una corda fissata a due estremi, per esempio una corda del pianoforte, essa può vibrare in molteplici *modi* di oscillazione, ciascuno caratterizzato da una frequenza propria (o, equivalentemente, da una specifica lunghezza d'onda). Il primo modo è quello associato alla lunghezza complessiva della corda L, il secondo a una lunghezza L/2, il terzo a L/3, e così via (si veda la figura).

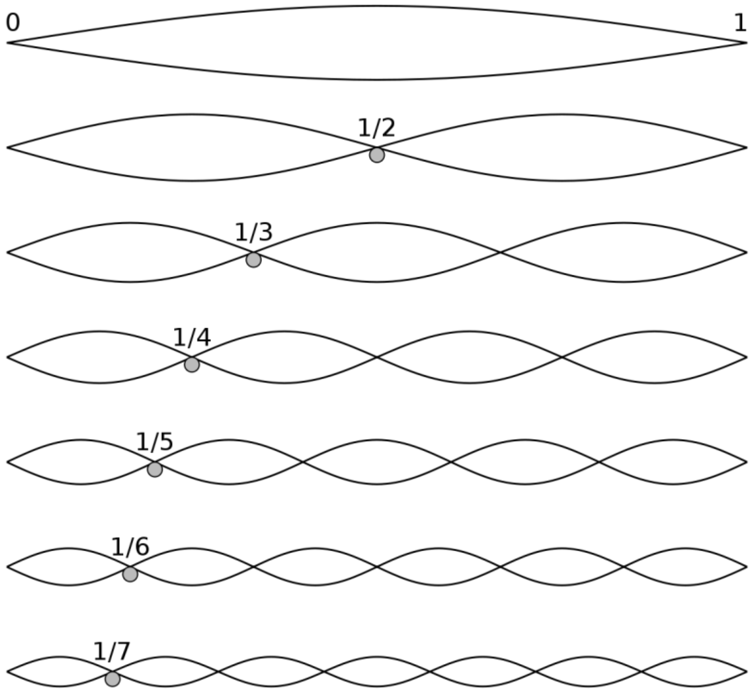

Immagine tratta da Wikimedia (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c5/Harmonic_partials_on_strings.svg/220px-Harmonic_partials_on_strings.svg.png)

Dato che la frequenza di un suono è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda, le frequenze dei modi di oscillazione sono rispettivamente F (frequenza della nota fondamentale, corrispondente al tasto premuto), 2F, 3F, e così via.

Questo fatto ha una conseguenza sorprendente: quando suoniamo una nota su un pianoforte, in realtà non esce soltanto un suono con la frequenza di quella nota (F), ma anche tutti i suoni contraddistinti dalle frequenze multiple di quella fondamentale (2F, 3F, ecc.). Detto in modo alternativo, l'onda sonora che generiamo non è un'onda "pura" come quella del diapason, che esibisce un profilo sinusoidale (come il grafico della funzione goniometrica "seno"), ma è la somma di più onde sinusoidali a frequenza diversa.

Il fenomeno è universale: non si verifica solo con gli strumenti a corda, ma si osserva sempre e comunque.

I suoni elementari che vengono emessi sono chiamati *armonici*: nonostante si trovino a frequenze diverse, sono così ben mescolati tra di loro che la sensazione che proviamo all'ascolto è quella di un'unica nota ben definita. Se suonassimo la stessa nota con una tromba, produrremmo la stessa collezione di suoni a frequenze multiple della nota fondamentale, ma la ripartizione dell'intensità sonora sui diversi armonici sarebbe diversa, a causa delle differenti caratteristiche meccaniche dello strumento. È proprio il "dosaggio" relativo dei vari suoni armonici a plasmare il timbro distintivo dello strumento: così il suono del pianoforte è diverso da quello della tromba, da quello della chitarra, da quello della voce umana, e così via.

Man mano che saliamo nella sequenza degli armonici, l'intensità tende a diminuire (in modalità diverse a seconda dello strumento), fino a spegnersi gradualmente in corrispondenza degli armonici più acuti. Per questo motivo la nota fondamentale viene percepita come dominante rispetto ai suoi armonici.

L'esistenza dei suoni armonici ha offerto ai matematici lo spunto per battezzare una delle più famose *serie*, quella definita dalla seguente sommatoria infinita:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Avete capito il legame tra questa serie (detta appunto *serie armonica*) e i suoni armonici, vero? Se immaginiamo di far vibrare una corda lunga 1 metro, i termini della sommatoria esprimono le diverse lunghezze d'onda degli armonici generati.

Ma cosa c'entrano i suoni armonici con la scala naturale di Zarlino? Dovete pazientare ancora un po', perché lo scopriremo nel prossimo articolo.

Paolo Alessandrini