Una chance per il secondo: soluzione

Analizziamo direttamente il caso di un numero generico di carte, numerate dalla più bassa, 1, alla più alta, n. Vogliamo dimostrare per induzione che, se il numero delle carte è maggiore o uguale a 3, il secondo giocatore (che chiameremo B) batte il primo giocatore (che chiameremo A) di un punto. Analizziamo il caso $n = 3$:

1. A gioca 1. B risponderà 2 e rigiocherà 3, totalizzando 2 punti e quindi vincendo.

2. A gioca 2. B risponderà 3 e rigiocherà 1. Ora per non perdere subito A giocherà 3, ma sarà poi costretto a giocare 1, perdendo il secondo punto sulla risposta 2 di B.

3. A gioca 3. B risponderà 1 e rigiocherà 2, che vince sicuramente, così come il 3 che gli è rimasto.

Supponiamo quindi di conoscere la strategia vincente per il secondo giocatore per ogni numero dispari minore di n e maggiore di 3 e mostriamo che esiste una strategia vincente per B anche per n carte. Vediamo che possibilità ha il primo giocatore:

1. A gioca la carta più alta, n. B allora risponderà 1 e rigiocherà n. Dovendo necessariamente perdere la scelta migliore per A è allora di perdere con la carta più bassa che ha e quindi giocherà 1. Ora sono rimaste $n - 2$ carte, da 2 a $n - 1$, entrambi hanno fatto un punto e tocca di nuovo ad A. B attuerà la sua strategia vincente sulle carte rimaste, vincendo.

2. A gioca una carta inferiore a n, diciamo k. Allora B risponderà $k + 1$, vincendo il punto e rigiocherà k. Ora A ha due possibilità:

   (a) Decide di vincere il punto nel miglior modo possibile, giocando quindi $k + 1$. Ma ora per induzione vincerà ancora B, essendo state giocate da entrambi le carte k e $k + 1$ con il risultato di 1 a 1.

(b) Decide di perdere anche questo punto, giocando quindi 1. Allora B si trova ad avere due punti di vantaggio, sono rimaste $n-2$ carte e tocca a A. Le carte rimaste però non sono uguali, quindi il passo induttivo non è immediatamente applicabile. Poco male: B truccherà la sua carta 1 scrivendoci sopra $k+1$ e continuerà a giocare secondo quella che, per induzione, è la sua strategia vincente. Naturalmente nel momento in cui giocherà la sua carta truccata A la considererà per il suo reale valore (1), che è sempre perdente. Questo farà fare un punto in meno a B, ma essendo comunque in vantaggio di due punti, quest'ultimo vincerà in ogni caso.

In maniera del tutto analoga si può mostrare per induzione che se ilo numero delle carte è pari il risultato è sempre patta (più precisamente bisognerà mostrare che A ha una strategia per fare almeno $n/2$ punti e che B ne ha una per farne $n/2$).

Una versione molto più difficile di questo gioco si ottiene cambiando un po' le regole. Invece che giocare a turno, il primo a giocare sarà quello che ha appena fatto il punto.
Sapreste dire, al variare del numero di carte distribuite, chi vince in questa versione del gioco?.