

... un po' di somme ...

Soluzione :

Le possibili scelte sono un numero molto grande:

$$81 \cdot 80 \cdot 79 \dots 3 \cdot 2$$

che ha più di 100 cifre! Essendo però un numero finito la soluzione del problema certamente esiste. Cerchiamo di scoprire alcune caratteristiche dell'estremante e supponiamo quindi di lavorare con la scelta ottimale. Distinguiamo, nella tabella descritta, due tipi di righe essenzialmente diverse: le righe *crescenti*, ossia quelle in cui le cifre crescono andando da sinistra a destra, e le altre, quelle *decrescenti*. Osserviamo che se abbiamo scelto due numeri su due righe di tipo diverso, il numero sulla riga decrescente deve essere più a sinistra del numero sulla riga decrescente. Infatti se così non fosse potrei scambiare la posizione orizzontale dei due numeri aumentando la somma:

1	2	.	.					
.								
.								
36	35	34	33	32	31	30	29	28
.								
.	.							
55	56	57	58	59	60	61	62	63
.								
						.	80	81

↓

1	2	.	.					
.								
.								
36	35	34	33	32	31	30	29	28
.								
.	.							
55	56	57	58	59	60	61	62	63
.								
						.	80	81

Quindi i numeri nelle righe decrescenti (che sono quattro) devono stare nelle prime quattro colonne, mentre quelli nelle righe crescenti nelle ultime cinque. Questa condizione non è solamente necessaria affinché la scelta sia massima possibile, ma anche sufficiente. Analizziamo ad esempio i numeri sulle righe crescenti: essi dovranno essere stati scelti all'interno del quadrato 5x5

formato dalle ultime cinque posizioni delle cinque righe crescenti:

5	6	7	8	9
23	24	25	26	27
41	42	43	44	45
59	60	61	62	63
77	78	79	80	81

che possiamo riscrivere così:

5	6	7	8	9
18+5	18+6	18+7	18+8	18+9
36+5	36+6	36+7	36+8	36+9
54+5	54+6	54+7	54+8	54+9
72+5	72+6	72+7	72+8	72+9

Una qualsiasi scelta di cinque posizioni non sulla stessa riga o colonna darà quindi come somma

$$18 + 36 + 54 + 72 + (5 + 6 + 7 + 8 + 9)$$

in un qualche ordine. Analogamente comunque scegliendo quattro posizioni nelle prime quattro colonne delle quattro righe decrescenti, la somma sarà sempre:

$$9 + 27 + 45 + 63 + (6 + 7 + 8 + 9)$$

Una fra le numerose possibilità è ad esempio:

								9
18								
							26	
	35							
						43		
		52						
					60			
			69					
				77				

che fornisce la massima somma possibile 389.

Siete in grado di formulare la soluzione per una scacchiera arbitrariamente grande (diciamo con n righe e n colonne)?