Piani di rottura: soluzione

È possibile determinare il piano di rottura con al più 6 lanci.
Consideriamo il problema più generale di determinare il piano di rottura fra n piani possibili. Chiamiamo $f(n)$ il minimo numero di lanci necessari per determinare con due bicchieri il piano di rottura di un palazzo di n piani. Il nostro problema consiste nel determinare $f(21)$. Supponiamo di aver determinato la migliore sequenza di lanci e che questa ci prescriva di lanciare il primo bicchiere dal piano h. Se si rompe non ci saranno alternative, dovremo lanciare il bicchiere dal primo piano, poi dal 2 secondo e così via fino al piano di rottura. Nel peggiore dei casi, il bicchiere si romperà solo al piano $h - 1$. In tutto avremo fatto h lanci nella peggiore delle ipotesi, quindi $h \leq f(n)$.
In altre parole l'altezza a cui dobbiamo effettuare il primo lancio non può essere maggiore del minimo numero di lanci necessari a determinare il piano di rottura.
Torniamo ora al nostro problema con 21 piani e chiamiamo m la soluzione del nostro problema (ossia il minimo numero di lanci necessari). Il primo lancio lo effettueremo quindi al piano m. Supponiamo che il bicchiere non si rompa: saremo in effetti nella situazione iniziale, ci rimangono da esaminare gli ultimi $21 - m$ piani e abbiamo già effettuato un lancio. Abbiamo allora $m-1$ lanci a disposizione e quindi potremo lanciare il bicchiere al più $m-1$
piani più in alto del piano m.
Se non si dovesse rompere avremo allora $21-m-(m-1)$ piani da esaminare in al più $h-2$ lanci e quindi potremo lanciare il bicchiere al più $m-2$ piani più in alto e così via. Il penultimo lancio avverrà nella peggiore delle ipotesi dal penultimo piano e se il bicchiere non dovesse ancora rompersi, effettueremo l'ultimo lancio dall'ultimo piano. In questa ipotesi dovremmo aver esaurito i piani e dovrà valere

$$21 \leq (m + (m - 1) + (m - 2) + ... + 2 + 1)$$

osservando che $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ otteniamo che 6 `e la soluzione. Questo argomento permette una semplice generalizzazione che utilizza la famosa formula

$$1 + 2 + 3 + ... + m = m(m + 1)/2$$

Sapreste dire com'è fatta $f(n)$?