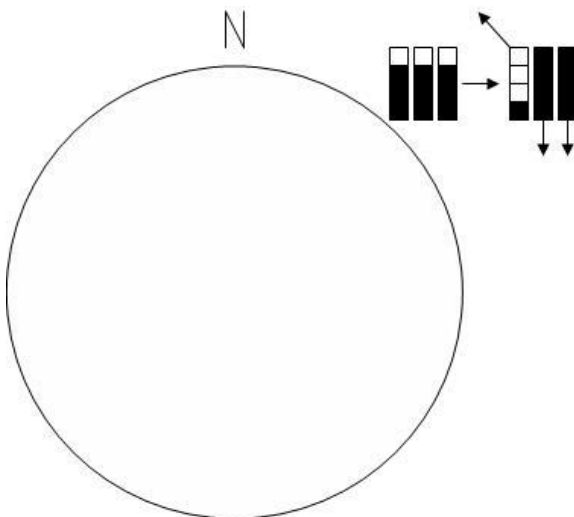
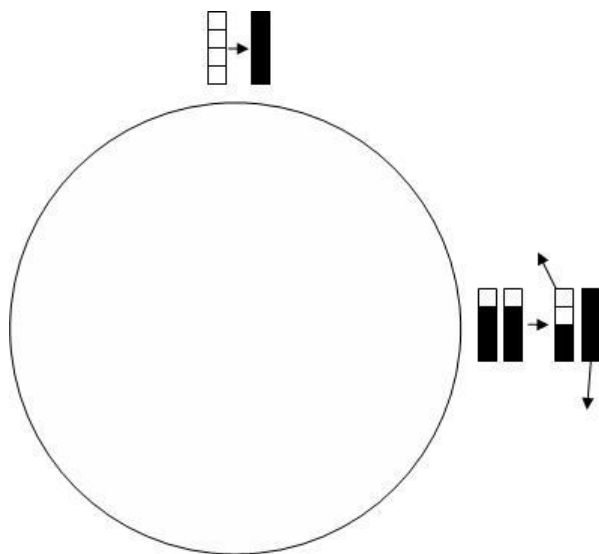


Piani di volo: soluzione

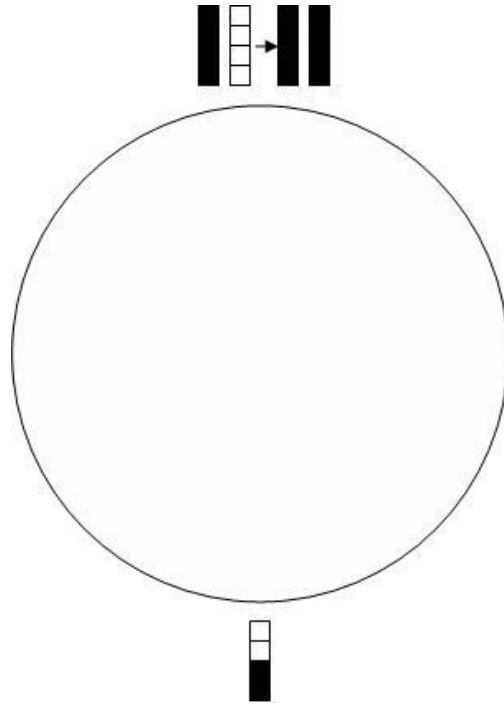
Si può escogitare un piano di volo che utilizzi solamente tre aerei. I tre aerei A, B e C partiranno simultaneamente dalla base al Polo nord. Quando gli aerei avranno consumato un quarto del carburante, l'aereo A fornirà un quarto di pieno sia a B che a C, rimanendo con un quarto del carburante iniziale.



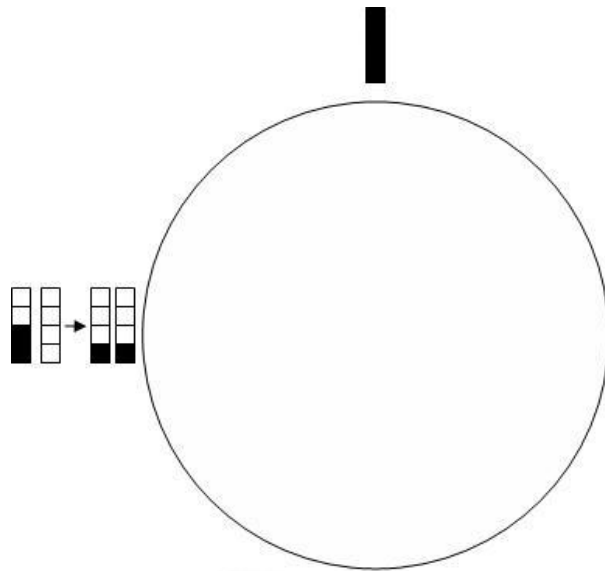
B e C proseguiranno il loro volo a serbatoio ora pieno, mentre A tornerà indietro, avendo carburante (appena) sufficiente per arrivare alla base. Nel frattempo, quando B e C avranno consumato un quarto del loro carburante (ossia all'equatore), B fornirà un quarto di pieno ad A (che avrà quindi serbatoio pieno), e tornerà indietro.



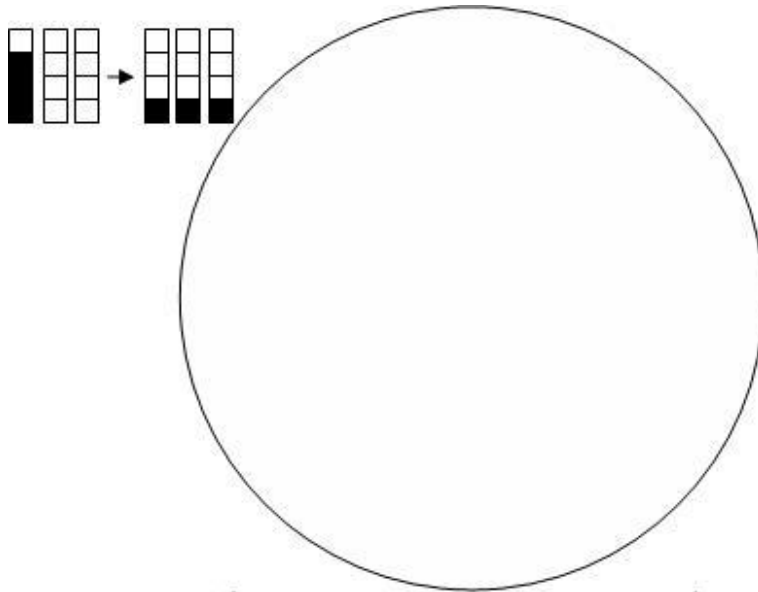
Avendo mezzo carburante pieno all'equatore, B arriverà sano e salvo al polo nord. Mentre B torna alla base, C proseguirà il suo volo, e sarà arrivato al polo sud (con mezzo pieno a disposizione) quando B sarà arrivato.



Ora basterà fare le cose a ritroso: B, fatto il pieno, partirà alla volta dell'equatore, dove incontrerà C (oramai a secco) per fornirgli un quarto di pieno.



Torneranno insieme per incontrare A a un quarto di pieno di distanza dal Polo nord, che fornirà un quarto di pieno ciascuno e infine torneranno tutti e tre sani e salvi alla base.



È facile vedere che con due aerei non è possibile effettuare il giro del mondo. Osserviamo innanzitutto che con una percentuale p di carburante si effettua $p/2$ giro del mondo.

Se i due aerei partissero in momenti diversi il secondo non potrebbe mai rifornire il primo, che sarebbe condannato a cadere. Se invece partissero insieme, uno dei due, diciamo A, dovrebbe tornare indietro. Supponiamo che questo avvenga dopo che gli aerei abbiano consumato una percentuale p di carburante. Perché A possa tornare alla base deve essere $p=1/2$. La massima percentuale di carburante che A potrebbe passare a B sarebbe quindi in teoria $q=1-2p$. Ora B non può arrivare al Polo nord con un solo rifornimento, perché può effettuare al massimo $1/2(1+p) \leq 3/4$ di giro del mondo, essendo $p \leq 1/2$. Quindi dovrà essere rifornito in volo un'altra volta. Poiché nel momento del rifornimento i due aerei sono nello stesso punto, il secondo rifornimento deve avvenire necessariamente agli antipodi e quindi B deve avere il serbatoio pieno dopo il primo rifornimento, dovendo percorrere mezzo giro del mondo. Quindi $q \geq 1-p$ ossia $p \leq 1/3$. Questo significa che l'antipodo del primo rifornimento sarà $p/2$ dopo l'equatore, punto dal quale per arrivare al Polo nord occorre almeno $1-p$ carburante. Poiché al secondo rifornimento B sarà a secco, in quel momento A dovrebbe avere a disposizione $2(1-p)$ carburante, il che è impossibile visto che $p < 1/3$: infatti è $2(1-p) \geq 4/3 > 1$.

D'altra parte ci si potrebbe domandare se i serbatoi utilizzati dagli aerei non siano eccessivamente capienti. Sapreste dire qual è la minima autonomia che permette di effettuare il giro del mondo con tre aerei?