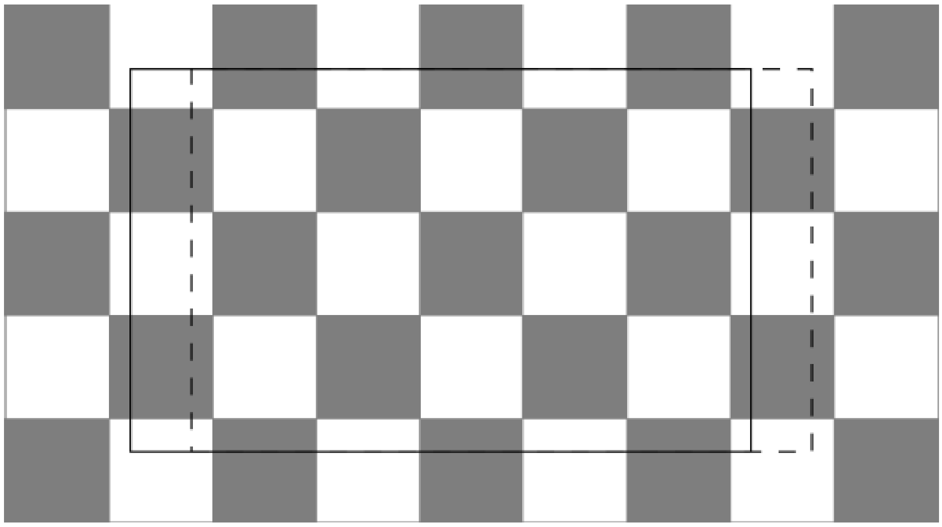
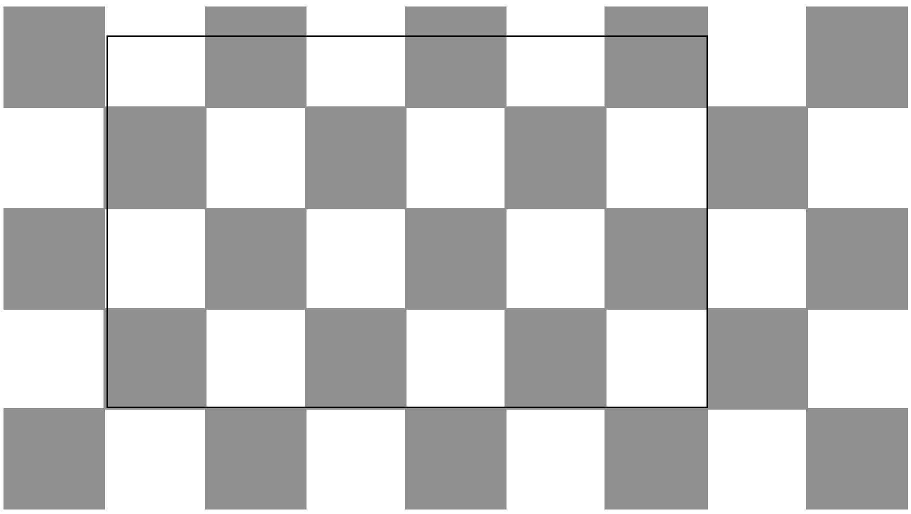
Vogliamo mostrare che gli unici rettangoli che si possono costruire accostando rettangoli belli sono rettangoli belli, ossia hanno almeno un lato intero. A questo scopo costruiamo una scacchiera composta da quadrati di lato 1/2.
Vogliamo mostrare due cose:

1. Se un rettangolo è bello, allora contiene tanto bianco quanto nero.
2. Se un rettangolo contiene tanto bianco quanto nero, è bello.

Per mostrare 1. consideriamo un qualsiasi rettangolo bello posto sulla scacchiera. Osserviamo che la quantità di bianco e di nero contenuta nel rettangolo non dipende dalla sua posizione sulla scacchiera. Supponiamo ad esempio di spostare il rettangolo in figura a sinistra nella posizione tratteggiata e analizziamo come cambia la quantità di bianco all'interno dello stesso.



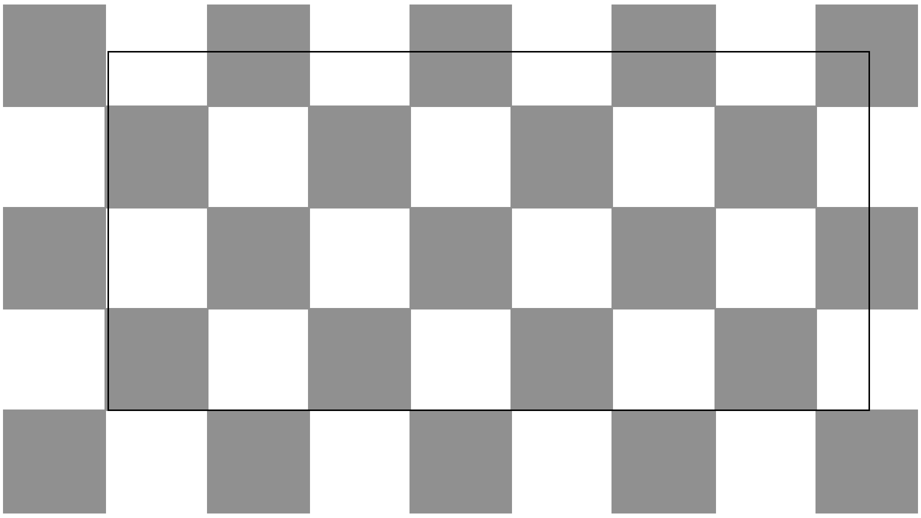
Su ogni riga il rettangolo perderà parti bianche a sinistra, ma guadagnerà altrettanto sulla destra. Possiamo quindi supporre che il rettangolo abbia il lato inferiore e sinistro concordi con la griglia. Essendo bello esso avrà un lato intero e possiamo supporre senza perdere in generalità che sia quello inferiore.



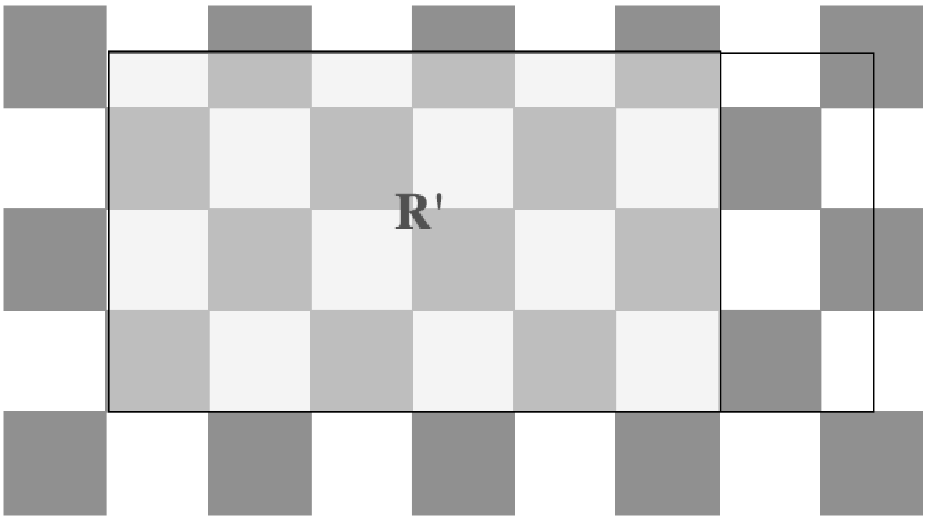
Quindi il lato inferiore sarà adiacente ad un numero pari di quadratini, essendo la scacchiera costituita da quadrati di lato 1/2. Distinguiamo allora le righe della scacchiera con quadrati interamente contenuti nel rettangolo e quelle che hanno quadrati che lo intersecano parzialmente. Nelle prime avremo tanti quadrati neri quanti bianchi contenuti nel rettangolo, e nelle seconde avremo tanti rettangolini bianchi e neri uguali, e in egual numero. Complessivamente quindi avremo tanto bianco quanto nero.

Osserviamo (e questo ci sarà utile nel seguito) che esattamente nello stesso modo si può dimostrare che, per un rettangolo qualsiasi sulla scacchiera, non necessariamente bello, il rapporto tra l'area della parte della scacchiera in bianco dentro il rettangolo e l'area della parte in nero NON cambia traslando il rettangolo.

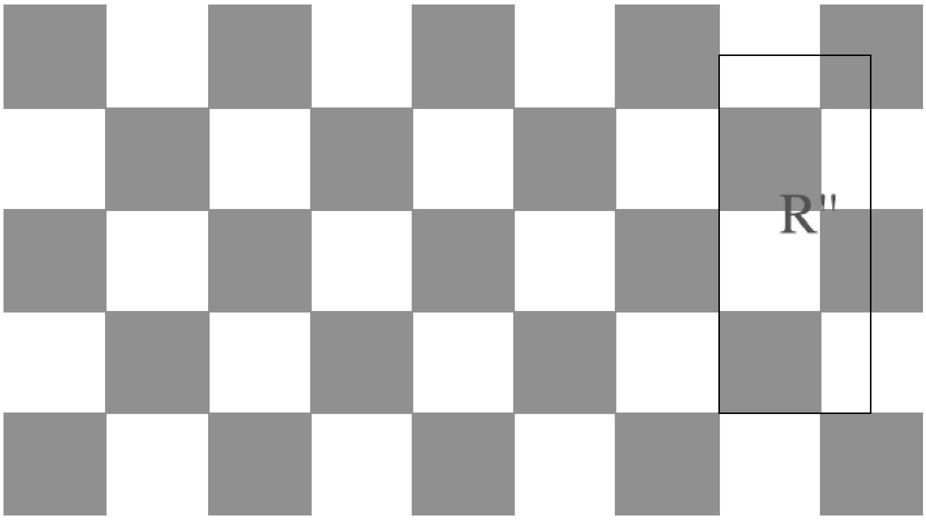
Per mostrare 2. consideriamo un rettangolo R posto sulla scacchiera e che contenga tanto bianco quanto nero. Come abbiamo già osservato questa proprietà non dipende dalla posizione sulla scacchiera perciò possiamo supporre che il rettangolo sia posto con i lati inferiore e sinistro concordi con la quadrettatura.



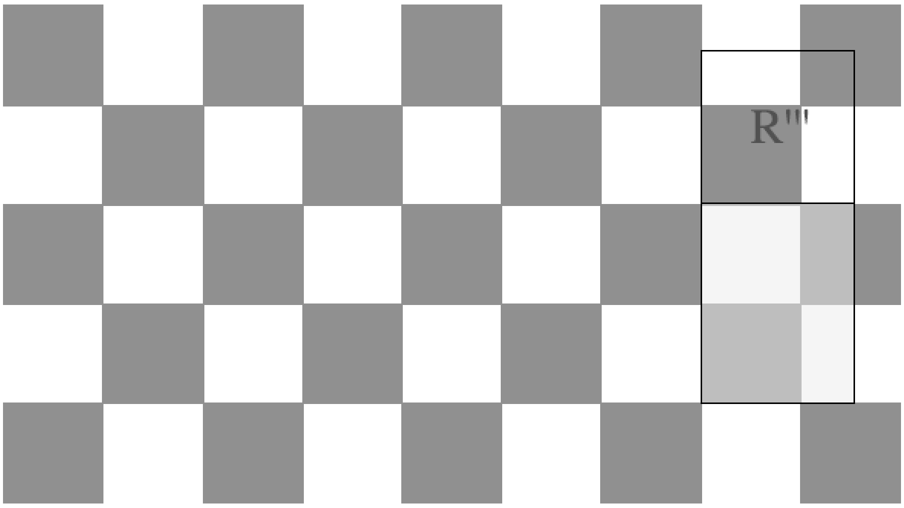
Procederemo per assurdo supponendo che nessun lato di R sia intero. Consideriamo il più grande rettangolo bello R’ contenuto (e diverso per ipotesi) in R. Per determinarlo basterà prendere il lato maggiore *l* di R e costruire R’ con un lato pari alla parte intera di *l* e l’altro lungo quanto quello di R.



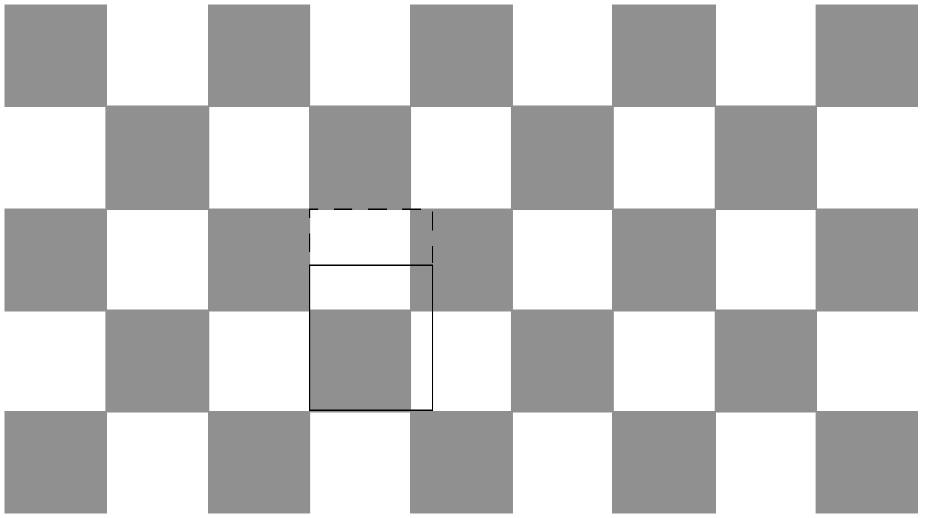
Togliendo R’ a R otteniamo un rettangolo R’’, che contiene ancora tanto bianco quanto nero visto che R’ era bello e conteneva quindi tanto bianco quanto nero.



Togliamo ancora il rettangolo bello più grande contenuto in R'' per ottenere R'''.



Quest'ultimo rettangolo ha per costruzione il lato inferiore e sinistro adiacenti alla quadrettatura, entrambi i lati (strettamente) minori di 1 e contiene tanto bianco quanto nero. Supponiamo che l'angolo retto in basso a sinistra coincida con quello di un quadrato nero (se fosse bianco l'argomento sarebbe identico). Vogliamo mostrare che allora il rettangolo non può contenere tanto bianco quanto nero, ottenendo un assurdo. Questo è chiaramente vero se entrambi i lati superiore e destro giacciono nel quadrato nero, perché allora il rettangolo conterrebbe solo nero. Se così non fosse supponiamo che ad esempio il lato superiore intersechi un quadrato bianco. Sollevando il lato superiore fino a toccare il bordo della quadrettatura:



La quantità di bianco è sicuramente aumentata più della quantità di nero, e quindi adesso nel rettangolo c'è più bianco che nero. Ma questo è impossibile perché questo rettangolo è bello e contiene quindi tanto bianco quanto nero.

Possiamo ora dimostrare che gli unici rettangoli che si possono ottenere accostando rettangoli belli sono belli. Sia R un rettangolo ottenuto per accostamento di rettangoli belli: in ogni rettangolo bello c'è tanto nero quanto bianco per il punto 1., quindi anche in R c'è tanto nero quanto bianco. Ma allora R è bello per il punto 2.