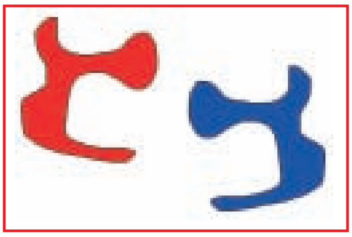
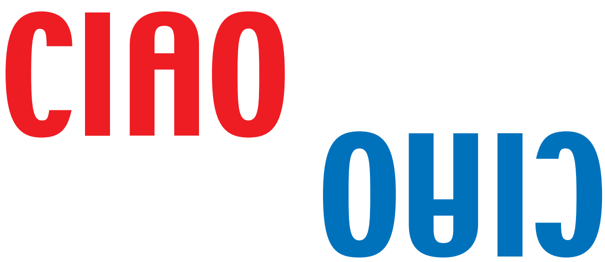
Una geometria, ta
Il programma

Non c'è una sola geometria! L'avevano già provato Bolyai e Lobachevsky, dando sostanza a geometrie diverse da quella euclidea e provocando un vero terremoto filosofico. Noi qui ci limitiamo a mostrare che c'è una gerarchia delle geometrie che non sempre si impara a scuola, ma che rappresenta una delle acquisizioni più importanti della matematica recente. E che si basa sulla dicotomia uguali/diversi

Quando due figure (ad esempio, due figure piane) sono "uguali"? Sembra una domanda "innocente", ma basta provare a rispondere per accorgersi che la questione non è affatto banale. E non è difficile immaginare situazioni in cui bisogna dare – sembra quasi un gioco di parole – un significato diverso alla parola "uguali". Chi sta commissionando a un falegname i pezzi per un gioco a incastro deve sapere se il pezzo di legno da cui verranno tagliati è verniciato su una delle due facce oppure se è identico sui due lati. Nel primo caso la figura rossa e quella blu qui a fianco sono da considerarsi diverse, nel secondo caso uguali.



Vi sono situazioni in cui ad importare è solo la forma della figura (i quadrati disegnati da un professore alla lavagna non sono mai uguali a quelli sui quaderni dei suoi studenti, ma nessuno sembra accorgersene e tutti parlano di diagonale DEL quadrato…), ma anche casi in cui bisogna che le due figure siano disposte allo stesso modo rispetto a un comune riferimento (la scrittura è un bell'esempio: una lettera non può essere rigirata!).



Tuttavia ciò non significa che sia completamente arbitraria la maniera con cui si decide il significato da attribuire alla parola "uguali": può cambiare il criterio di confronto, ma non cambiano le "regole" che lo governano.

Una tappa fondamentale nella storia della matematica moderna

In un certo senso fu Felix Klein, nel 1872, a portare all'evidenza come si può costruire una buona definizione di "uguaglianza di figure" .

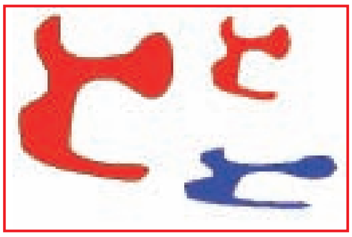
Lo fece nella relazione in cui, dovendo, come nuovo docente dell'Università di Erlangen, presentare il programma scientifico a cui si sarebbe ispirato per gli anni a venire, riuscì a mettere insieme: "i diversi filoni di ricerca allora esistenti in Geometria, creando un sistema da cui emergeva una panoramica di numerosi e nuovi problemi che si prestavano ad ulteriori sviluppi".

La chiave per mettere ordine fra i risultati che affollavano i libri di Geometria fu quella di intendere la geometria stessa come lo studio delle proprietà delle figure che non cambiano sotto l'azione di un "gruppo di trasformazioni". Non c'è allora una sola geometria, ma ce ne sono molte: fissare una di queste geometrie significa decidere quali sono le trasformazioni "lecite" con le quali si può passare da una figura data ad un'altra che le sia "uguale", cioè decidere quali sono gli "occhiali" con cui guardare.

Tornando all'esempio del falegname, le trasformazioni "lecite" sono tutte le *isometrie* (trasformazioni rigide del piano) se le due facce del pezzo di legno sono uguali, mentre sono soltanto le *isometrie dirette* (cioè le rotazioni e traslazioni, o, detto in altro modo, le trasformazioni rigide del piano che non scambiano destra e sinistra) se una sola delle due facce è verniciata. Invece, nel caso della scrittura, gli occhiali sono solo quelli delle *traslazioni*.

Non basta. Alcuni programmi informatici permettono di prendere un'immagine e di "stiracchiarla" usando due

nte geometrie *di Erlangen*



numeri: uno precisa lo "stiracchiamento" in orizzontale e l'altro in verticale. Se i due numeri sono uguali, la forma della figura non cambia e anche nel linguaggio comune si dice che le due figure sono uguali per *similitudine*; in generale, però, se i due numeri possono anche essere differenti, le trasformazioni che mandano la figura di partenza in quella deformata non conservano la forma e anzi diventa difficile dire che cosa esse lasciano invariato. Potete fare un po' di prove con un fascio di raggi luminosi tutti paralleli fra loro che investono una sagoma piana. L'ombra lasciata da un quadrato non è in generale un quadrato (basta che i due piani su cui stanno la figura e la sua ombra non siano paralleli), quella lasciata da un cerchio può diventare un'ellisse, più o meno allungata. Si dice che due ombre sono equivalenti per *affinità*.
È davvero difficile dire che cosa è rimasto "uguale" fra le due figure in questo modo, ma qualcosa si può cogliere: per esempio, le ombre dei lati opposti del quadrato continuano a individuare due rette parallele e le ombre dei lati consecutivi continuano ad avere un punto in comune.

La geometria proiettiva

Tuttavia ci sono modi ancora più generali di ritenere uguali due oggetti.
Per esempio, che cosa rimane invariato in fotografie, scattate da punti diversi, della facciata di una stessa casa, oppure di uno stesso disco? Che cosa cambia?
Che cosa rimane invariato nelle diverse ombre che una stessa sagoma proietta su un piano quando è illuminata da punti diversi? Che cosa cambia?
Se si prescinde da questioni cromatiche e ci si limita ad osservare i profili delle immagini, tanto in un caso quanto nell'altro, le differenze sembrano molte di più delle somiglianze.
Se la fotografia è presa di fronte, le finestre avranno forme simili a rettangoli, ma se è presa di scorcio, le forme delle finestre saranno quadrangoli irregolari; se una foto è presa dall'alto e l'altra dal basso, le proporzioni tra le varie parti saranno completamente stravolte, e così via.

Eppure qualcosa in comune tra le due foto o tra le due ombre c'è: ad esempio i tratti che sono rettilinei in una foto lo sono anche nell'altra, le ombre della sagoma circolare hanno comunque un profilo "smussato", senza punte né "bitorzoli".

La trasformazione del piano che fa passare da una fotografia della facciata all'altra oppure da un'ombra della sagoma all'altra è una *proiettività* e le due immagini fotografiche della facciata – o le due ombre della sagoma – sono uguali dal punto di vista proiettivo; la geometria proiettiva le studia come se fossero la stessa cosa.

Le proiettività alterano le lunghezze e i rapporti tra le lunghezze dei segmenti: due finestre identiche nella realtà appaiono assai diverse in una foto di scorcio. Eppure l'esperienza di tutti i giorni ci dice che c'è qualcosa che ci permette di riconoscere la regolarità, anche in immagini di scorcio. Guardate le immagini qui a fianco…

È immediatamente evidente che i birilli della foto 1 non sono disposti in modo regolare, mentre quelli ripresi nella foto 2 appaiono equidistanti anche se le distanze tra le loro immagini sono diverse e vanno calando.

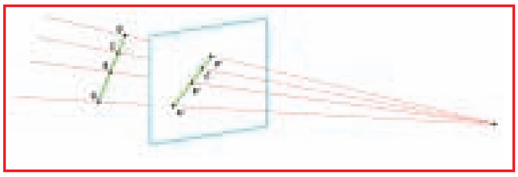
Che cosa ci fa riconoscere la regolarità nella foto 2? O, meglio, che cosa ci permette di escludere la regolarità nel caso della foto 1?

È il birapporto, un invariante numerico della geometria proiettiva. Anche se le lunghezze e i rapporti tra le lunghezze dei segmenti non si conservano per proiettività, si conservano i rapporti tra i rapporti di segmenti allineati. Dati quattro punti allineati A, B, C e D, il rapporto tra i rapporti AC/BC e AD/BD o, come si dice, il loro birapporto (ABCD), coincide con il birapporto (A'B'C'D') dei loro trasformati in una qualsiasi proiettività.

Quattro punti allineati e scanditi alla stessa distanza hanno birapporto 4/3, quindi tutte le loro immagini proiettive continuano ad avere birapporto 4/3. Nella figura 1 i "piedi" dei birilli non hanno birapporto 4/3, mentre quelli di figura 2 hanno birapporto 4/3. E, anche se non lo sappiamo, il nostro occhio è abituato ad accorgersene: sa "misurare" alcuni


1


2



Una storia singolare… di classificazione


Felix Klein (Dusseldorf 25 aprile 1849, Gottinga 22 giugno 1925)

Nato a Dusseldorf nel 1849, Klein ha avuto sin dall'inizio dei suoi studi la fortuna di avere ottimi maestri e la capacità di instaurare rapporti personali con matematici di alto livello. Che si sia trattato di fattori importanti nella sua formazione, lo dichiara egli stesso negli "schizzi biografici di proprio pugno" del 1923: "In generale, … ho imparato molto di più per mezzo dei contatti personali che attraverso le lezioni".

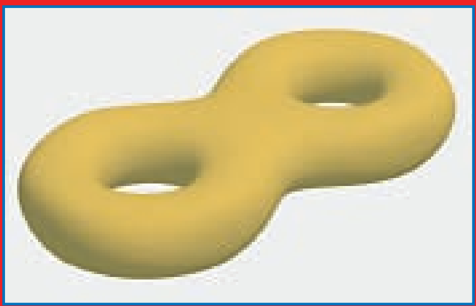
I nomi coinvolti sono davvero eccezionali: prima, a Bonn, Julius Plücker (1801–1868), che lo avvia "con un insegnamento attivo" allo studio della geometria proiettiva, poi Alfred Clebsch, Ernst Kummer, Karl Weierstrass e, soprattutto, Sophus Lie.

Nell'estate del 1870 Klein e Lie si recano a Parigi per "avere una visione il più possibile ampia della scienza". Ma il progetto viene bruscamente interrotto dallo scoppio della guerra franco-tedesca. Klein ritorna in Germania in fretta, mentre il norvegese Lie pensa di essere al sicuro e rimane. Durante un controllo, gli vengono trovate in casa le lettere, in tedesco, di Klein. Gli argomenti di matematica trattati sono così incomprensibili per la polizia che Lie viene "classificato" come spia e tenuto quattro settimane in prigione fino all'intervento chiarificatore di un grande matematico francese, Gaston Darboux.

Che la matematica sia per necessità e per statuto una disciplina internazionale qualche volta è rischioso…

(L'autobiografia di Felix Klein è stata tradotta in italiano da Gianni Riela per *Note di Matematica, Storia, Cultura* n. 3-4, Spinger-Verlag Italia, Milano 2000)

Quando una ciambella è “uguale” a una tazzina da caffè



Se credete di aver raggiunto il massimo della condiscendenza permettendo ai matematici (ma anche a Piero della Francesca e ai pittori dopo di lui) di ritenere uguali le immagini in prospettiva di uno stesso oggetto (la prospettiva “è” una proiettività!), vi sbagliate.
Potete mettervi gli occhiali della Topologia e… ne vedrete delle belle. Per un topologo, intanto, tutte le informazioni legate alle misure non hanno alcun senso e quindi, per esempio, un cubo di lato 3cm e uno di lato 300km sono “uguali”. Di più: in Topologia, si può immaginare di stiracchiare un oggetto quanto si vuole e l’oggetto rimarrà sempre “uguale” a quello che era in partenza, purché sia fatto di un materiale sufficientemente deformabile da non spezzarsi: tagliare non è un’operazione legittima per il topologo (a meno che poi non si rincollino i pezzi curando di attaccare insieme esattamente i punti che si erano prima staccati). Così un cubo e una sfera sono, topologicamente, la stessa cosa, ma sono diversi da una ciambella e così, con gli occhiali del topologo, la mongolfiera stellata in alto a destra è “uguale” a una sfera, come una tazzina è “uguale” alla Grande Arche di Parigi ed è “uguale” a una ciambella, mentre la scultura qui a sinistra è come una doppia ciambella.
Se volete saperne di più, nei prossimi numeri di *XlaTangente* troverete un intero dossier dedicato a questa geometria, che non può vantare cultori antichi ma che ha tutto il fascino della libertà da pesi e misure.