

Lenti gravitazionali

di MARCO LOMBARDI

Non smetto mai di stupirmi dell'effetto che le grandi conquiste scientifiche producono sul pubblico. Nate spesso in ambienti di ricerca di punta, con gli anni finiscono per far parte del patrimonio culturale di tutti tanto che ci risulta poi difficile anche solo immaginare un tempo in cui non si aveva consapevolezza della loro esistenza.

La Gravità è forse uno degli esempi più belli di questo fenomeno di assimilazione culturale. Fino alla pubblicazione dei *Principia* di Newton (1687), le leggi che regolavano il moto di corpi celesti erano al centro delle discussioni di astronomi, fisici e filosofi. Già nel 1609 Keplero aveva pubblicato *Astronomia Nova*, dove

Ma che cosa succede a un raggio di luce che passi in prossimità di un corpo massiccio? Questa semplice domanda ha attraversato quasi quattro secoli di storia della Fisica ed è all'origine di uno dei più affascinanti filoni di ricerca dell'Astronomia moderna.

L'ORIGINE DEL FENOMENO

In virtù dell'universalità della forza di gravità, già i primi fisici che si occuparono del problema ipotizzarono che la luce venisse deviata da corpi massicci. Tuttavia solo nel 1915, con la pubblicazione della *Relatività Generale* di Einstein, il fenomeno poté essere descritto in modo completo. Le predizioni della traiettoria della luce fatte dalla Relatività differiscono significativa-

logo alla rifrazione della luce operata da una lente di vetro, tanto che, come per il vetro, si può parlare di "indice di rifrazione" di una lente gravitazionale. Tuttavia, rispetto alla normale rifrazione ci sono alcune importanti differenze. Innanzitutto le deflessioni sono piccolissime, tanto che se calcolassimo la "focale" di una lente gravitazionale otterremmo valori intorno alle 10^{-25} diottrie! Poi, la deflessione è continua, mentre tipicamente la luce che attraversa una lente o un prisma è soggetta ad improvvisi cambi di direzione (pensate all'immagine di una matita in un bicchiere d'acqua). Ciò è dovuto al carattere dell'indice di rifrazione, che cambia in modo brusco da un materiale all'altro (ad esempio, vale 1 nel

Un esempio di "miraggio" gravitazionale: la stessa immagine di un quasar distante è osservata quattro volte a causa della deflessione gravitazionale operata da una galassia a spirale posta tra noi ed il quasar.



Foto di J.Rhoads, S.Malhotra, I.Dell'Antonio (NOAO)/WIYN/NOAO/NSF

enunciava le sue famose tre leggi, ma la vera portata della sua scoperta non venne immediatamente compresa da molti contemporanei (scienziati come Galileo e Cartesio la ignorarono completamente). In realtà lo stesso Keplero non si rese conto della generalità della teoria del moto ellittico dei pianeti intorno al Sole: credeva, ad esempio, che le comete si muovessero lungo traiettorie rettilinee. Solo con la diffusione dei *Principia* questo scenario cambiò radicalmente. La Gravità venne elevata al rango di forza universale, cioè valida per ogni corpo materiale, tanto che il XVIII e XIX secolo videro un enorme sviluppo della Meccanica celeste.

mente da quelle fatte dalla Gravitazione di Newton: non a caso la misura della deflessione della luce fu una delle prime prove della Relatività Generale.

A partire dal 1979 gli astronomi hanno scoperto molti sistemi costituiti da un corpo massiccio (una galassia o un ammasso di galassie) e da una o più sorgenti di luce ben allineate nel cielo con esso, ma più distanti (come un'altra galassia): sono le "lenti gravitazionali". A causa del forte campo di gravità creato dalla lente, la luce proveniente dalla sorgente distante non percorre una traiettoria rettilinea, ma viene deviata. Il fenomeno è del tutto ana-

vuoto, circa 1.33 nell'acqua, e circa 1.5 nel vetro), mentre ha un andamento continuo nelle lenti gravitazionali. In particolare, la legge che regola l'indice di rifrazione di una lente gravitazionale è $n = 1 - 2 U / c^2$, dove U è il potenziale gravitazionale e c è la velocità della luce.

IL CONTESTO ASTRONOMICO

Una delle caratteristiche più spettacolari delle lenti gravitazionali è la formazione di immagini multiple da un'unica sorgente. L'esempio più noto di questo fenomeno di "miraggio" è la croce di Einstein, un quasar quadruplo osservato attraverso il nucleo di una galassia a spirale.

NASA, ESA, Richard Ellis (Caltech) and Jean-Paul Kneib (Observatoire Midi-Pyrenees, France)



L'ammasso di galassie Abell 2218 osservato dal telescopio spaziale Hubble. Il forte campo gravitazionale prodotto dalle galassie di Abell 2218 (in giallo in questa immagine) e dalla materia oscura presente produce forti distorsioni nelle immagini di galassie distanti, che vengono così osservate come archi giganti (rossi e blu) o archetti.

(I quasar sono oggetti dall'apparenza stellare molto distanti. Si ritiene che siano regioni compatte in prossimità di buchi neri super-massicci posti al centro di galassie.)

Spesso, se la sorgente è estesa, le immagini multiple osservate sono fortemente distorte e appaiono in forma di archi intorno al centro di massa della lente. Tutti questi effetti sono facilmente spiegabili attraverso la semplice teoria dell'indice di rifra-

zione della lente accennata sopra, purché ovviamente si scelga una distribuzione di massa (e quindi un potenziale gravitazionale) appropriata. In realtà, questa è anche una delle applicazioni più interessanti di questo fenomeno: partendo dalle osservazioni di una configurazione (sorgenti deflesse e sistema di lenti) è possibile, sotto opportune ipotesi, risolvere il "problema inverso" e risalire alla distribuzione di massa che produce l'effetto. In questo modo gli astronomi hanno a disposizione un mezzo potente per "pesare" le galassie e gli

ammassi di galassie lente, e per studiarne le proprietà. Inoltre, dal momento che gli effetti gravitazionali sono indipendenti dalla composizione e dallo stato della materia che li produce, le misure di massa operate tramite le lenti gravitazionali sono molto affidabili e comprendono tutta la materia contenuta nella lente (compresa, quindi, l'eventuale materia oscura ivi presente).

Un altro modo tipico di sfruttare le lenti è quello di utilizzarle come "telescopi gravitazionali". Come si è

Figura 1

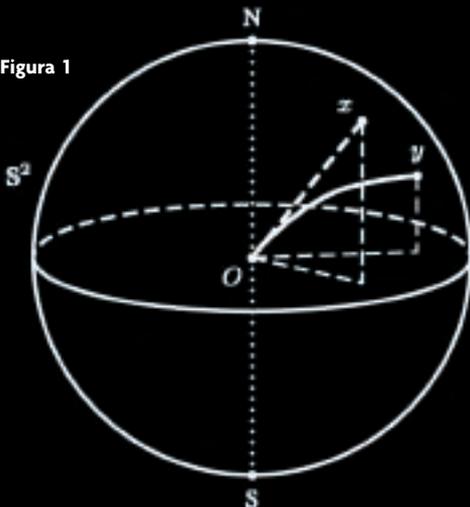
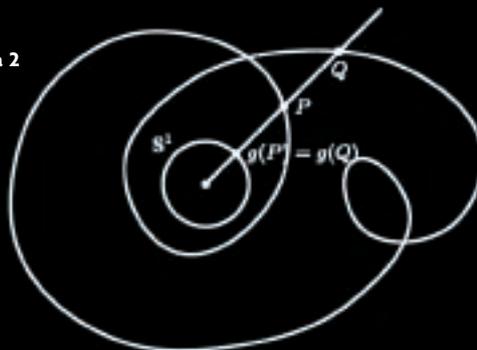


Figura 2



L'indice di avvolgimento di questo laccio è 2

scritto poco sopra, le deflessioni prodotte dalle lenti sono molto piccole e corrispondono a focali dell'ordine di 10^{25} metri. Ciò ha indotto molti astronomi a cercare di sfruttare questi formidabili telescopi che la natura ci mette a disposizione per studiare sorgenti distanti che altrimenti non sarebbero alla portata dei nostri strumenti. Studi spettroscopici si prestano particolarmente bene a queste applicazioni perché non risentono delle forti distorsioni che spesso le lenti gravitazionali producono nelle sorgenti.

Una delle caratteristiche più interessanti delle lenti gravitazionali è il fatto che molte delle loro applicazioni sono legate a risultati matematici non banali, gran parte dei quali si basano su un semplice concetto, comune ad ogni problema di ottica: la funzione di *ray-tracing* f . Questa funzione assegna ad ogni possibile direzione di osservazione x la *posizione reale* y della sorgente la cui luce verrà osservata in direzione x . Per semplicità, entrambi i punti x e y possono essere presi sulla superficie di una sfera centrata nell'osservatore e passante per la sorgente (vedi

Figura 1), così che x di fatto è la posizione ipotetica della sorgente in assenza di ogni deflessione. La funzione di *ray-tracing* in un certo senso "percorre" la traiettoria della luce a ritroso, e quindi, se l'indice di rifrazione varia con continuità, è una funzione continua. (Un inciso: questa funzione è al centro di programmi di *ray-tracing* quali *Pov-ray*, usati anche in *XLaTangente* per produrre immagini tridimensionali realistiche.)

Fissata una direzione di osservazione x , esiste un'unica posizione della sorgente y la cui luce viene osservata in x , cioè f è una "vera" funzione. L'inverso non vale; infatti a una posizione della sorgente y possono corrispondere più immagini x , cioè f in generale non è invertibile: ciò corrisponde proprio alla situazione più interessante, quella in cui una lente produce più immagini di una stessa sorgente.

IL NUMERO DELLE IMMAGINI DI UNALENTE GRAVITAZIONALE

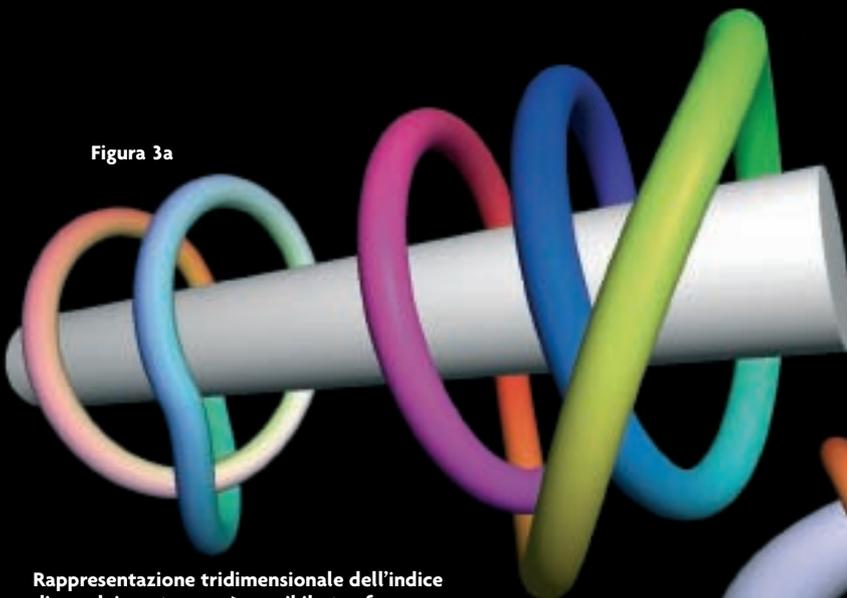
Uno dei primi teoremi formulati sulle lenti gravitazionali riguarda il

numero di immagini generate a partire da una sorgente puntiforme. Come mostrato da Burke nel 1981, una lente gravitazionale produce "quasi sempre" un numero dispari di immagini multiple. Il "quasi sempre" può essere formulato rigorosamente mostrando che le posizioni y per cui la funzione di *ray-tracing* ammette un numero pari di soluzioni $f^{-1}(y)$ costituiscono un insieme di area nulla.

Questo teorema è di natura prettamente topologica e sfrutta poche e semplici proprietà della funzione di *ray-tracing* (essenzialmente la sua continuità). A fronte di un enunciato molto semplice, la dimostrazione del teorema, anche se non difficile, richiede l'uso di metodi piuttosto avanzati.

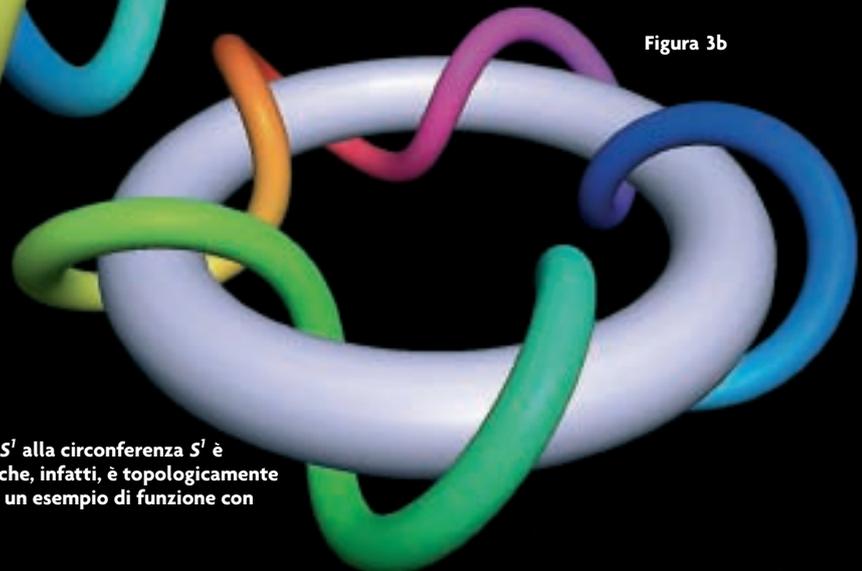
Una possibile dimostrazione passa attraverso l'uso del *grado topologico*. Per avvicinarci a questo strumento, conviene abbassare la dimensione del problema e considerare prima una funzione g dalla circonferenza S^1 alla circonferenza S^1 . Un buon modo per rappresentare funzioni di questo genere è quello di usare *lacci*, cioè curve chiuse nel piano (vedi Figura 2): per ogni valore x , si considera il punto corrispondente del laccio e lo si proietta lungo una circonferenza centrata nell'origine, ottenendo così l'immagine $y = g(x)$. Questa rappresentazione è comoda perché mette subito in luce una proprietà fondamentale: il numero di "giri" che la curva compie intorno

Figura 3a



Rappresentazione tridimensionale dell'indice di avvolgimento: non è possibile trasformare uno dei due lacci colorati nell'altro senza rompere il laccio o farlo uscire dalla barra grigia, perché i due lacci hanno indici di avvolgimento differenti (2 e 3)

Figura 3b



Una funzione dalla circonferenza S^1 alla circonferenza S^1 è meglio rappresentata su un toro (che, infatti, è topologicamente equivalente a $S^1 \times S^1$). Nella figura un esempio di funzione con indice di avvolgimento 5

Una funzione dalla sfera S^2 in sé è rappresentata come una “maglia elastica” deformata. Nell'esempio in figura, la funzione ha grado topologico 1: infatti contando, con il segno, le intersezioni della semiretta mostrata con la superficie usata per rappresentare la funzione si ottiene +1



Figura 4

all'origine non può essere modificato fintanto che si deforma la curva senza farla passare per l'origine stessa. Questa proprietà prende il nome di *indice di avvolgimento* ed è appunto un invariante topologico: deformazioni del laccio non ne cambiano il valore. Ad esempio, si immagini un elastico arrotolato più volte intorno ad un tubo: non sarà possibile cambiare il numero di avvolgimenti dell'elastico senza sfilarlo (almeno parzialmente) dal tubo. Incidentalmente, ogni volta che leghiamo la nostra bicicletta ad un palo con una catena sfruttiamo proprio questa invarianza topologica: non è possibile passare dallo stato “bicicletta legata” (caratterizzato, ad esempio, da un indice di avvolgimento 1) allo stato “bicicletta sciolta” (indice di avvolgimento 0) senza aprire la catena (vedi Figura 3a e 3b)!

L'indice di avvolgimento è proprio un esempio, in dimensione uno, di quel potente strumento matematico, il *grado topologico*, che andremo

subito a conoscere in un caso di dimensione due. Consideriamo una funzione continua dalla sfera in se stessa, come ad esempio la funzione di ray-tracing f , e rappresentiamola in modo analogo a quanto abbiamo fatto sopra per funzioni della circonferenza. Ad esempio, immaginiamo una maglia elastica che avvolge una sfera e che possiamo deformare in modo continuo, cioè senza strapparla; associamo allora a ogni punto x della maglia la sua proiezione y sulla sfera (vedi Figura 4). Con questa semplice rappresentazione di funzioni dalla sfera in sé, cerchiamo una generalizzazione dell'indice di avvolgimento. Consideriamo un punto y della sfera e contiamo tutti i punti della maglia elastica che vengono proiettati in y , ovvero tutte le intersezioni tra la semiretta passante per l'origine della sfera ed y e la maglia (pensando alla funzione f , stiamo considerando tutte le controimmagini $f^{-1}(y)$ di y). Assegniamo un valore +1 a ciascuno di questi punti se la

semiretta considerata sopra attraversa la maglia dall'interno verso l'esterno, e -1 se la attraversa dall'esterno verso l'interno: quest'ultimo caso si realizza, ad esempio, quando la maglia fa una “piega” come nella Figura 4. Pensando alle possibili deformazioni della nostra maglia, è facile rendersi conto che i punti “marcati” con valori +1 e -1 appaiono e scompaiono in coppia: ad esempio, ogni volta che aggiungiamo una nuova piega della maglia che viene fatta passare attraverso la semiretta, si aggiungono un punto con valore +1 ed uno con valore -1. Di conseguenza la somma di tutte le intersezioni considerate con il loro valore è chiamato il *grado topologico* di f e per quanto detto sopra è invariante per deformazioni continue di f , una proprietà che tecnicamente si indica come *invarianza omotopica*. La funzione identica, cioè quella che assegna un punto della sfera a se stesso, ha grado +1, e così accade per ogni deformazione di questa funzione.

Torniamo ora alle lenti gravitazionali ed alla funzione di ray-tracing. Per punti distanti dalla lente, un raggio di luce subirà una deflessione molto piccola e quindi la funzione di ray-tracing sarà molto vicina all'identità. In queste condizioni, quindi, la lente non sarà in grado di produrre immagini multiple e la sorgente y verrà osservata solo in una direzione x (ovvero, c'è solo una controimmagine $f^{-1}(y)$ di y). Pertanto, il grado topologico di f è $+1$ e quindi per ogni punto della sfera avremo un numero dispari di controimmagini di f : questo perché dobbiamo ottenere il valore del grado di f che, per definizione, è la somma di vari termini ± 1 , e se questa somma vale $+1$ il numero degli addendi deve necessa-

riamente essere dispari! Non solo: per ogni y , l'equazione $f(x) = y$ ha sempre almeno una soluzione x . In altre parole, una lente gravitazionale non può nascondere sorgenti! È interessante notare che, a fronte di questo risultato teorico, la maggior parte delle lenti gravitazionali osservate presenta un numero *pai* di immagini. Questa apparente contraddizione è in realtà ben spiegabile come il risultato di una serie di effetti non considerati nella semplice formulazione del teorema di Burke: molte sorgenti sono estese e non puntiformi; anche in presenza di sorgenti puntiformi, alcune immagini potrebbero essere difficili da osservare in quanto "sovrapposte" a immagini di altri oggetti più

brillanti (come, ad esempio, la lente stessa); una o più immagini potrebbero essere fortemente "de-magnificate" e risultare quindi troppo deboli per poter essere osservate (una lente gravitazionale è in grado sia di ingrandire che di rimpicciolire le immagini delle sorgenti).

Insomma, sembra che almeno per questa volta la Natura si sia divertita a giocare qualche scherzo ai matematici e agli astronomi!

Marco Lombardi

È ricercatore di Astronomia ed Astrofisica presso l'Università degli Studi di Milano, si occupa di lensing gravitazionale e di formazione stellare in nubi molecolari oscure.



INDICE DI RIFRAZIONE, DIOTTRIE E ABERRAZIONE CROMATICA

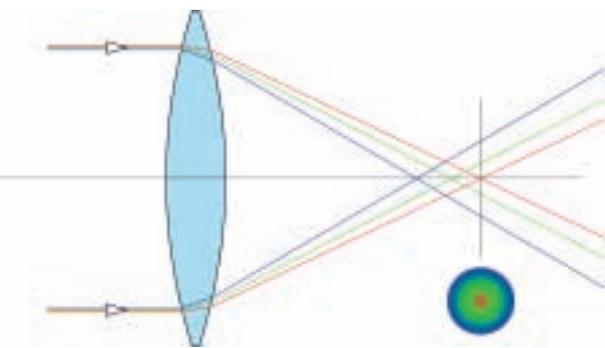
La **focale** di una lente è la distanza (con segno) tra la lente e il suo fuoco, ovvero il punto in cui raggi luminosi paralleli (cioè provenienti da un oggetto molto distante) convergono; per le lenti divergenti la focale è negativa. Il reciproco di questa quantità (misurata in metri) è chiamato **diottria**, e viene comunemente utilizzata dagli ottici per classificare le lenti. Il vantaggio di usare le diottrie, invece che le focali, è che la legge di accoppiamento delle lenti è banale: due lenti con diottrie d_1 e d_2 avvicinate tra di loro si comportano esattamente come una lente di diottria $d_1 + d_2$. Questa semplice legge è comunemente utilizzata dagli ottici per correggere difetti visivi come la miopia.

L'**indice di rifrazione** n di un materiale è il rapporto tra la velocità c della luce nel vuoto e la velocità di propagazione della luce nel materiale in questione. Poiché la velocità massima possibile è c , l'indice n non può essere minore di uno: ad esempio, l'indice di rifrazione dell'acqua è 1.33, mentre quello del vetro è circa 1.5. A parità di forma, una lente avrà una focale tanto più corta quanto maggiore sarà il suo indice di rifrazione. Per tutti i materiali, l'indice di rifrazione varia con la frequenza della luce e ad esempio è differente per luce blu o rossa: questo fenomeno, chiamato **dispersione**, è alla base della scomposizione della luce bianca nelle varie componenti operata da un prisma o da gocce d'acqua in sospensione che creano gli arcobaleni.

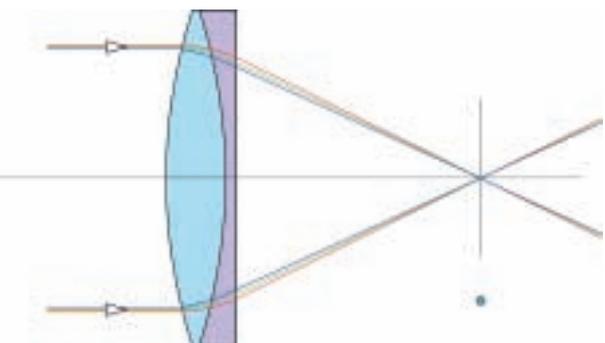
La dispersione è anche all'origine di un difetto ottico delle lenti, l'**aberrazione cromatica**: a causa del differente indice di rifrazione, la focale di una lente è differente per la luce blu o rossa. Il risultato è che risulta impossibile mettere a fuoco contemporaneamente la luce blu e la luce rossa provenienti dallo stesso oggetto, così che si formano degli aloni colorati intorno ad ogni sorgente. I costruttori di lenti cercano di ridurre questo effetto utilizzando un accorgimento, il "doppio acromatico": si accoppiano due lenti, una convergente e una divergente, composte da materiali differenti, con differenti varia-

zioni dell'indice di rifrazione con la frequenza. Con un'opportuna scelta dei materiali e della forma delle lenti è possibile fare in modo che, in prima approssimazione, la lente risultante sia acromatica.

L'indice di rifrazione di una lente gravitazionale è completamente indipendente dalla frequenza della luce: le lenti gravitazionali sono cioè perfettamente **acromatiche**.



Rappresentazione schematica dell'aberrazione cromatica. A causa della variazione dell'indice di rifrazione con la frequenza, una normale lente ha lunghezze focali differenti per la luce blu, verde e rossa. Per questo, l'immagine prodotta da una sorgente puntiforme bianca sul piano focale indicato (linea nera verticale) sarà un disco esteso con differenti colori ai vari raggi.



Accoppiando due lenti (una concava e una convessa) composte da materiali differenti (opportunitamente scelti) è possibile ridurre fortemente l'effetto dell'aberrazione cromatica.