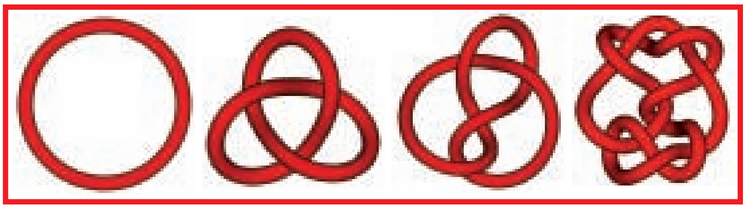
Nodi e link

di Carlo Petronio

Un "nodo" è quello che si fa ai lacci delle scarpe, ma anche quello che si forma quando si lascia un gomitolo di lana a disposizione di un gatto o quello che (purtroppo per il pescatore inesperto) spesso si forma in una lenza. Se adottiamo il punto di vista di un topologo, che considera uguali due oggetti quando li sa deformare, senza strappi, l'uno nell'altro, è chiaro che, usando magari molta pazienza, una volta staccato l'amo, il pescatore riesce sempre a districare il groviglio della sua lenza, poiché c'è sempre un estremo libero che può far scorrere attraverso il garbuglio: bisogna ricordare che il nodo è fatto di un materiale elastico, quindi può liberamente accorciarsi o estendersi. Pertanto, per un topologo, un nodo ottenuto da un pezzo di spago può diventare davvero annodato solo se, fatto il groviglio, vengono saldati insieme i due estremi rimasti liberi: con una corda di nylon da bucato e un accendino non è difficile farlo davvero. Alcuni esempi di nodo si trovano qui sotto.

Con gli estremi liberi, un nodo non è mai veramente annodato



Il nodo banale, il nodo a trifoglio, il nodo a otto e un nodo più complicato

Nodi e link

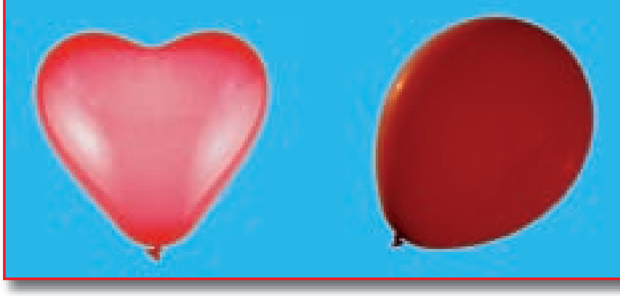
Il nodo del topologo è un'**astrazione** del nodo di tutti i giorni perché il filo di lana o la lenza, per quanto sottili, hanno sempre un determinato spessore, mentre in termini matematici si deve intendere che lo spessore del materiale con cui il nodo è realizzato sia "nullo". La formalizzazione di questa idea richiede nozioni tecniche e di fatto non è particolarmente interessante, dunque per noi ***un nodo è un oggetto nello spazio ottenuto da una corda sottilissima, perfettamente flessibile ed elastica, con la quale viene formato un garbuglio e della quale alla fine vengono saldati insieme i due estremi. Lo spessore della corda è così piccolo che non bisogna mai preoccuparsene mentre la si manipola***.

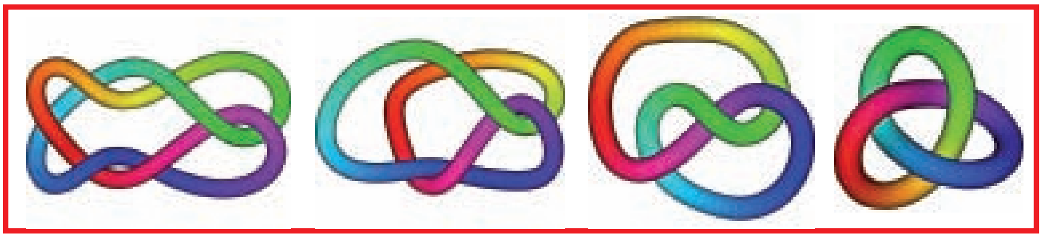
Un altro termine che conviene precisare è quello di **uguale** riferito a un nodo rispetto a un altro. Secondo il significato quotidiano di questa parola, i quattro nodi multicolori nella figura in basso in questa pagina certamente non sono "uguali" tra loro. Per esprimere il fatto che appaiono invece uguali agli occhi del topologo, verranno chiamati equivalenti. O meglio diremo che ***due nodi sono tra loro equivalenti quando si possono deformare l'uno nell'altro senza strappi o rotture***. La figura suggerisce appunto un esempio di tale deformazione.

Oltre ai nodi si può parlare dei loro "cugini", i **link**. ***Un link è un oggetto formato da due o più nodi che non si toccano a vicenda*** (e che possono o meno intrecciarsi fra loro); ***due link sono equivalenti se sono deformabili l'uno nell'altro***. Alcuni esempi di link sono mostrati nella prima figura della prossima pagina.

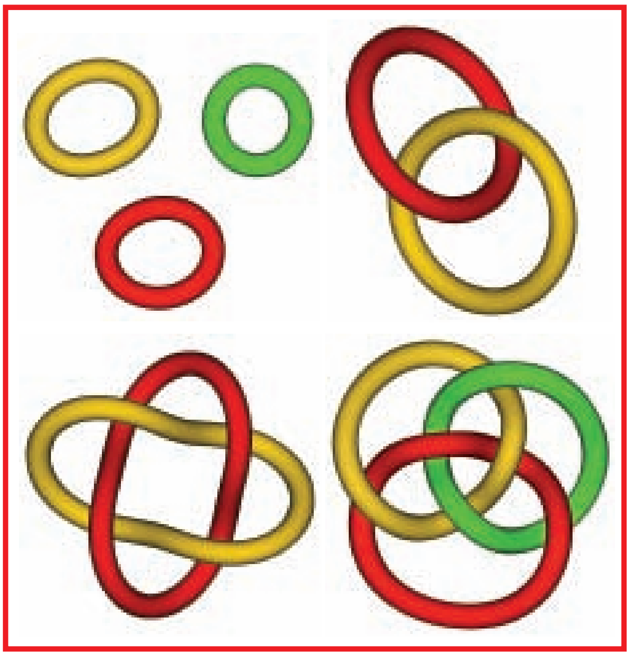
La topologia

La topologia studia gli oggetti come se fossero fatti di gomma elastica, cioè privi di proporzioni definite, nonché deformabili a piacimento (senza però tagli e lacerazioni). Dal punto di vista di un topologo, un palloncino a forma di cuore è proprio uguale a uno ovale, dato che egli può trasformarli l'uno nell'altro senza strappi.





Una deformazione del nodo a trifoglio



Alcuni link: banale a tre componenti, di Hopf, di Salomone, anelli borromei

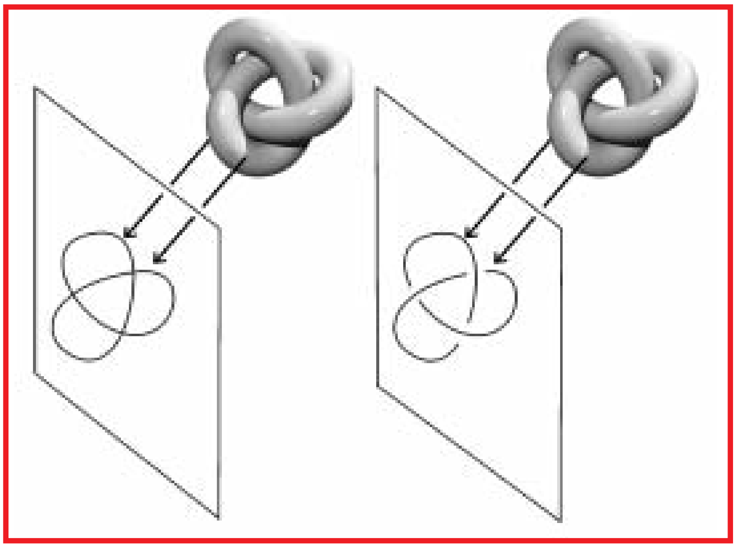
Una questione molto interessante e molto studiata in teoria dei nodi è il **problema dell'equivalenza**: se ci vengono presentati due nodi molto complicati, come possiamo stabilire se sono o meno equivalenti? Il tentativo più naturale è quello di prendere due corde da bucato molto lunghe e molto sottili, realizzare fisicamente i nodi (ricordando di saldare bene insieme gli estremi con l'accendino) e passare un pomeriggio a manipolarle: senza usare le forbici e senza fare imbrogli! All'ora di cena, due cose possono essere successe: o siamo riusciti a modificare i due nodi in modo che alla fine siano proprio identici, oppure no. Nel primo caso concludiamo che i nodi iniziali erano equivalenti, ma nel secondo? La risposta, purtroppo, è che non possiamo dire nulla! Infatti la nostra abilità e fantasia potrebbero essere state insufficienti a farci intuire il modo giusto di rigirare tra le mani i nodi. Per stabilire che due nodi non sono equivalenti, non basta dunque un numero anche molto grande di tentativi falliti di deformarli l'uno nell'altro: serve un argomento generale da cui segua che *nessuna* deformazione potrà mai trasformare un nodo nell'altro.

Diagrammi e mosse di Reidemeister

Tutte le figure di nodi (e link) mostrate finora, per il fatto stesso di essere stampate su un foglio di carta, sono piatte (cioè bidimensionali), ma non dovrebbe essere sorto alcun dubbio sul fatto che rappresentino pezzi di corda per annodare i quali bisogna operare nello spazio, cioè nell'ambiente tridimensionale (fanno eccezione il nodo e i link banali, che possono in effetti essere piatti). La rappresentazione bidimensionale di un nodo si chiama **diagramma**. L'intuizione ci aiuta a percepirla come una curva continua (come di fatto è nello spazio tridimensionale) anche se nel diagramma ad ogni incrocio uno dei due tratti è interrotto: l'intersezione serve proprio a capire quale tratto di spago è più lontano da noi mentre osserviamo il diagramma. Ci conviene però essere più precisi.

Si chiama proiezione ortogonale di un oggetto su un piano la figura piatta che si ottiene riportando sul piano tutti i punti dell'oggetto lungo la direzione perpendicolare al piano.
Consideriamo ora un nodo (nel senso di una corda da bucato ingarbugliata con gli estremi saldati) e prendiamone una proiezione ortogonale su un piano. Se tutto va bene (vedi il box "Le scene indecenti"), la proiezione sarà, nel piano, una curva continua e liscia, che però avrà degli incroci. Ma da questa curva, come si vede nella prima figura qui sotto, non si riesce a ricavare un'immagine tridimensionale del nodo. Invece otteniamo un'ottima immagine se nella proiezione, vicino agli incroci, interrompiamo leggermente la parte di curva che corrisponde al tratto di corda più lontano dal piano su cui proiettiamo.

In definitiva ***si chiama diagramma di un nodo una sua proiezione ortogonale con interruzione ad ogni incrocio del ramo più lontano dal piano di proiezione***.

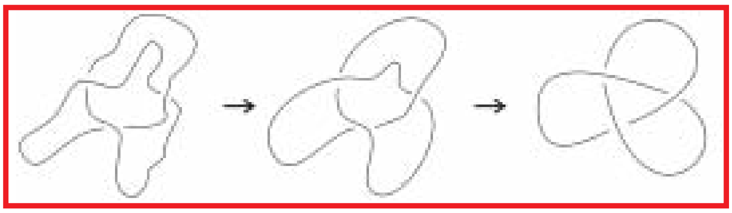


Proiezione ortogonale di un nodo a trifoglio e diagramma, ottenuto con un piccolo ritocco di tale proiezione, che consente di ricostruire il nodo spaziale

Mosse sui diagrammi

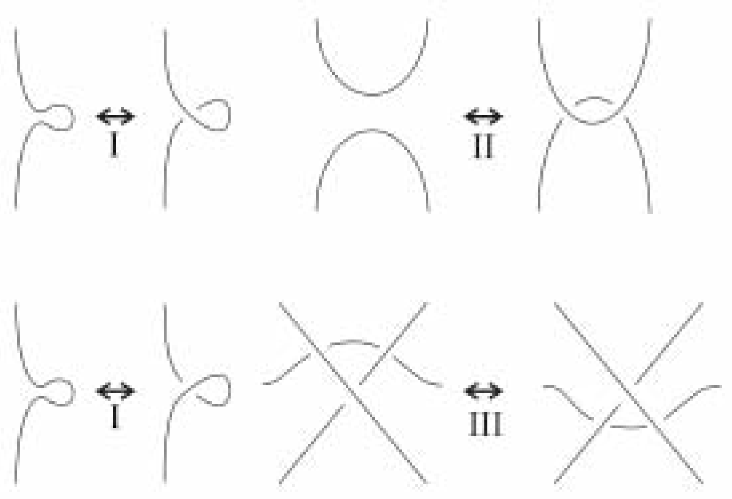
Avendo spiegato l'interpretazione corretta delle figure dei nodi (i diagrammi), possiamo ora illustrare come si traduca l'idea di deformazione usando i diagrammi. Se infatti un diagramma non è altro che una proiezione ritoccata in modo che negli incroci si capisca ciò che è vicino e ciò che è lontano, una deformazione non sarà altro che una sequenza di proiezioni. Come al cinema, però, ci saranno alcune sequenze nelle quali non succede quasi nulla, e altre in cui la scena cambia in modo importante.

Le sequenze poco interessanti sono quelle che corrispondono a deformazioni del diagramma di nodo in quanto oggetto contenuto nel piano, mentre i passi salienti della



Deformazione planare di un diagramma di nodo

deformazione sono quelli in cui il diagramma cambia davvero. E il bello è che di quest'ultimi ce ne sono pochi, e precisamente quelli che contengono una delle situazioni messe in evidenza nel box qui sotto. Siccome però una proiezione di un nodo che contiene una di queste situazioni non dà luogo a un diagramma, la consuetudine è quella di saltare bruscamente dal diagramma che si aveva poco prima della "scena indecente" a quello che si ha subito dopo. Dopo l'opera del censore, i salti sono tutti dei tipi descritti qui sotto.



Le mosse I, II e III di Reidemeister

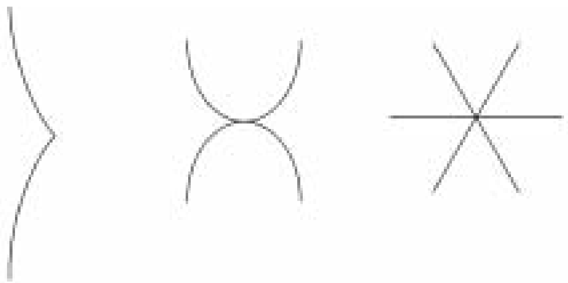
Le trasformazioni descritte in figura si chiamano mosse di Reidemeister e vanno intese nel modo seguente: dato un diagramma di nodo, si seleziona una porzione del diagramma che appaia come uno qualsiasi dei frammenti in figura, quindi, lasciando inalterato il resto del diagramma, si sostituisce la porzione prescelta con il frammento in figura collegato con una doppia freccia al precedente.

Siamo quindi arrivati a poter enunciare un teorema: ***Ogni diagramma rappresenta un nodo. Ogni nodo può essere rappresentato da diagrammi. Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti precisamente quando si possono ottenere l'uno dall'altro tramite deformazione piana ed esecuzione (ripetuta) di mosse di Reidemeister***.

Come applicazione di questo teorema, accenniamo almeno alla dimostrazione del fatto che il nodo banale e quello a trifoglio, cioè i primi due che abbiamo incontrato, sono in effetti non equivalenti.
Già nel numero scorso di *XlaTangente*, discutendo di invarianti, si era parlato della 3-colorabilità di un nodo (nell'articolo "Quando non bastano gli invarianti" di P. Harasser a p. 35); il tassello che mancava in quel momento e che ora possiamo mettere è proprio il fatto di far vedere che la 3-colorabilità è un invariante dei nodi. Ma a questo punto abbiamo uno strumento fatto apposta per verificarlo: basta controllare che, per ciascuna delle tre mosse di Reidemeister, se un nodo era 3-colorabile prima di effettuare la mossa, lo è anche dopo (e se non lo era prima, non lo è neanche dopo).
Il lettore può controllarlo da sé: basta un po' di pazienza!
E con questo, dall'osservazione che il diagramma del nodo banale non è 3-colorabile e quello del nodo a trifoglio lo è, possiamo dedurre che il nodo banale e il trifoglio non sono equivalenti. Dato che il nodo a trifoglio appare così "manifestamente" annodato, può sembrare strano che dimostrarlo sia così complicato, ma nessuno ha mai trovato un argomento più semplice. Per la cronaca, il nodo a otto non è 3-colorabile (basta fare qualche prova con un suo diagramma). Dunque il nodo a otto non è equivalente al nodo a trifoglio. In realtà si può vedere che non è neppure equivalente al nodo banale, ma non basta un'argomentazione elementare come quella sulla 3-colorabilità.

Le scene "indecenti"

Abbiamo detto che "se tutto va bene" la proiezione è come ci si aspetta. In realtà ci sono alcune sfortunate scelte del piano di proiezione per le quali non tutto va così bene. Ad esempio possono presentarsi i fenomeni descritti in figura, e anche di peggiori.



Proiezioni "cattive" di un nodo: un punto in cui la curva non è liscia (cuspide); un punto in cui due rami della curva si toccano senza incrociarsi; un punto in cui si incrociano tre rami della curva

Di fatto, però, le proiezioni "cattive" sono rarissime: scegliendo a caso un piano di proiezione, infatti, si ha la quasi certezza che esso sia "buono" e comunque, se è "cattivo", basta modificarlo di pochissimo per farlo diventare "buono".

Punto di vista intrinseco ed estrinseco

Un oggetto di interesse topologico come un nodo si può anche guardare "dal di dentro" (come nel box "Due dialoghi"): se ci immedesimiamo in un abitante del nodo, cioè in qualcuno per il quale il nodo rappresenta l'unico orizzonte visivo, i nodi appaiono tutti uguali. Ad esempio, come è spiegato nella seconda parte dello stesso box, tagliando un nodo a trifoglio in un punto, deformando e poi riattaccando, si ottiene il nodo banale. Dunque intrinsecamente questi due nodi sono uguali.
Dal punto di vista intrinseco, ogni nodo è equivalente al nodo banale. Invece, come illustrato prima, dal punto di vista estrinseco (cioè delle deformazioni nello spazio) il nodo a trifoglio non è equivalente a quello banale. In realtà si può dire molto di più: ***esistono infiniti nodi estrinsecamente distinti, ovvero a due a due non equivalenti tra loro tramite deformazioni***.

Carlo Petronio
Carlo Petronio ha studiato matematica a Pisa, dove ora insegna Geometria presso la Facoltà di Ingegneria.