

# Strutture *musicali* e strutture *matematiche*

*Ascoltando un brano musicale con un po' di attenzione e di partecipazione può capitare di intuire, al di là della macrostruttura del pezzo (quella che usualmente i musicisti chiamano "forma"), qualche struttura sottostante, qualche relazione, magari della natura più svariata e imprevedibile, che lega diversi elementi presenti nella composizione che stiamo ascoltando, come – ad esempio – il ricorrere di un intervallo o del rapporto di due note, la tendenza ad andare in una certa direzione di una linea melodica*

In genere però solo una attenta analisi può mettere in luce le relazioni, talvolta molto complesse e nascoste, che legano diversi elementi (come melodia, ritmo, dinamica, altezza dei suoni ecc.) di una composizione.

Questa direzione interpretativa di tipo razionale, che nulla toglie all'aspetto emotivo dell'ascolto usuale e lo rende anzi più consapevole, ha avuto un forte impulso nel '900 e ha portato allo sviluppo di una vera e propria disciplina, l'*analisi musicale*, che, partendo dallo spartito, cerca di descrivere e analizzare, se riconoscibili, queste strutture, queste interazioni tra vari elementi, questi processi compositivi, di cui talvolta lo spartito è solo una traccia.

Tale procedimento non sempre porta a delle certezze, ma consente almeno di formulare delle ipotesi.

In particolare, ha permesso di mettere in evidenza ancor di più le relazioni strutturali tra musica e matematica, favorendo anche il superamento di una etichettatura numerologica a sfondo mistico che ha portato spesso i matematici ad avvicinarsi a questo soggetto per puro divertimento. E, soprattutto, ha stimolato matematici e musicisti a collaborare nell'approfondire lo studio della struttura formale al fine di cogliere meglio le proprietà musicali.

## UN DENOMINATORE COMUNE

In questo dossier abbiamo cercato di sottolineare alcuni aspetti del binomio matematica e musica di tipo prevalentemente strutturale piuttosto che acustico (anche se non si potrà prescindere da questi ultimi), con lo scopo anche di mettere in evidenza alcune procedure condivise da queste due attività culturali dell'uomo, il fare matematica e il fare musica: una sorta di denominatore comune.

Analisi di tipo strutturale, anche molto complesse, non sono prerogativa della musica e sono state fatte ovviamente su moltissime opere del pensiero umano come poesia, letteratura, arti figurative ecc.; sicuramente la struttu-

ra non basta a determinare la bellezza e il successo, o meno, di un'opera, ma dal nostro punto di vista è interessante riconoscerne l'esistenza.

Prendiamo, a titolo di esempio, la poesia: "S'i fosse foco" di Cecco Angiolieri.

*S'i fosse foco, arderei 'l mondo;  
s'i fosse vento, lo tempestarei;  
s'i fosse acqua, i' l'annegherai;  
s'i fosse Dio, manderei' en profondo;*

*s'i fosse papa, sarei allor giocondo,  
ché tutt'i cristiani imbrigherei;  
s'i fosse 'mperator, sa che farei?  
a tutti taglierei lo capo a tondo.*

*S'i fosse morte, andarei a mi' padre;  
s'i fosse vita, fuggerei da lui:  
similmente faria da mi' madre,*

*S'i fosse Cecco, com'i' sono e fui,  
torrei le donne giovani e leggiadre:  
le vecchie e laide lasserei altrui.*

*Cecco Angiolieri*

**Fabrizio Brogna**

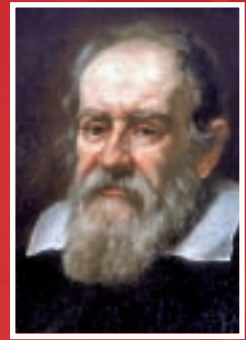
Insegna matematica e non è un musicista.

**Giulia Fianza**

Laureata in matematica a Pisa, suona diversi strumenti da dilettante e aspira a diventare precaria dell'insegnamento.



"[...] non è la ragion prossima ed immediata delle forme de gl'intervalli musici la lunghezza delle corde, non la tensione, non la grossezza, ma sì bene la proporzione de i numeri delle vibrazioni e percosse dell'onde dell'aria che vanno a ferire il timpano del nostro orecchio, il quale esso ancora sotto le medesime misure di tempi vien fatto tremare. Fermato questo punto, potremo per avventura assegnar assai congrua ragione onde avvenga che di essi suoni, differenti di tuono, alcune coppie siano con gran diletto ricevute dal nostro sensorio, altre con minore, ed altre ci feriscano con grandissima molestia; che è il recar la ragione delle consonanze più o men perfette e delle dissonanze. La molestia di queste nascerà, credo io, dalle discordi pulsazioni di due diversi tuoni che sproporzionatamente colpeggiano sopra 'l nostro timpano, e crudissime saranno le dissonanze quando i tempi delle vibrazioni fusero incommensurabili [...]"



Galileo Galilei

Consonanti, e con diletto ricevute, saranno quelle coppie di suoni che verranno a percuotere con qualche ordine sopra 'l timpano [...] sarà dunque la prima e più grata consonanza l'ottava [...] seconda, cioè nel tuono sesquiottavo, per ogni nove pulsazioni una sola arriva concordemente a percuotere con l'altra della corda più grave; tutte l'altre sono discordi e con molestia ricevute su 'l timpano, e giudicate dissonanti dall'udito."

da Galileo Galilei: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*  
in *Opere di Galileo Galilei*, Utet, *Classici della Scienza*, 1980

---

## *Il concetto di consonanza non è un concetto costante nel tempo e neppure nello spazio*

---

Volendo fare delle semplici osservazioni di tipo strutturale, balza all'occhio che i "S'i fosse", la cui ostinata e ossessiva ripetizione ci rende indelebile nella memoria questa successione di periodi ipotetici, nella prima quartina occupano ognuno un verso, diviso esattamente in due parti (la protasi la prima metà e l'apodosi la seconda) conferendo così al testo un ritmo incalzante; quattro versi, quattro periodi ipotetici, ognuno un'invettiva contro i quattro elementi che costituiscono l'universo: fuoco, aria ("vento") acqua e terra ("mondo").

Nella seconda quartina i periodi ipotetici sono solo due, perché due sono i pilastri che reggono la società medioevale, Papa e Imperatore: la protasi coincide ancora con la prima metà del verso mentre l'apodosi risulta dilatata dall'inserimento di un inciso ("sare' allor giocondo, sa che farei?") e questo rallenta il ritmo. Ma

il ritmo ritorna incalzante nella prima terzina, dove continua il processo di avvicinamento verso l'obiettivo dell'invettiva, il padre e la madre, mentre nella seconda terzina il ritmo, simmetricamente alla seconda quartina e con la stessa tecnica (l'inserimento cioè tra protasi e apodosi di una proposizione), viene rallentato di nuovo per risolversi alla fine in una battuta tranquillizzante.

Queste semplici considerazioni mettono in evidenza tra l'altro che la composizione, che ad un primo approccio può apparire come uno sfogo immediato e spontaneo, risulta ad un'analisi più attenta una costruzione accurata e simmetrica, sia a livello tematico che espressivo, e che l'effetto di immediatezza e spontaneità in realtà è anche il risultato di accurati artifici formali e di calibrata disposizione degli elementi.

**UN PO' DI STORIA**

La nascita del rapporto tra matematica e musica può essere datata alla fine del V secolo a. C. quando i Pitagorici cominciarono a cercare una giustificazione "matematica" della gradevolezza di alcune coppie di suoni, cioè della *consonanza* di certi intervalli musicali.

I Pitagorici notarono che i suoni emessi da due corde, nelle stesse condizioni, lunghe una la metà, i 3/4 o i 2/3 dell'altra, risultavano particolarmente consonanti: erano gli intervalli rispettivamente di ottava, di quarta e di quinta. La nota generata dall'oscillazione di una corda è determinata dal numero di oscillazioni nell'unità di tempo, la *frequenza*, che a sua volta è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda: una corda lunga  $L/2$  ha frequenza doppia rispetto ad una lunga  $L$ , e genera la stessa nota all'ottava superiore, analogamente per gli altri rapporti citati.

La convinzione che rapporti "semplici" (espressi cioè da frazioni con numeratore e denominatore abbastanza piccoli) tra le frequenze diano luogo a intervalli consonanti si trova ancora nel XVII secolo in Galileo nel suo *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*.

Come si legge nel box della pagina precedente, Galileo sostiene che il grado di consonanza di un bicordo (un intervallo) risulta direttamente proporzionale (e quindi il grado di dissonanza inversamente proporzionale) alla frequenza del suono complessivo (che è la somma dei suoni singoli). L'orecchio, sempre secondo Galileo, apprezza finemente la maggiore o minore regolarità del suono risultante: dissonante è l'intervallo di seconda, che è caratterizzato dal rapporto 9/8, come proposto dai Pitagorici.

**CONSONANZE**

Il concetto di consonanza però non è un concetto costante nel tempo e neppure nello spazio: perché, ad esempio, se si ascolta una musica medioevale la si riconosce subito come tale? Oppure, perché talvolta ci suonano "strane" musiche di altre culture, come ad esempio la musica cinese o indiana? Ciò corrisponde a un modo diverso dal nostro abituale di organizzare i suoni: nel Medioevo si usavano scale modali e sia i Cinesi che gli Indiani dividono l'ottava in modo diverso dal nostro, utilizzando anche intervalli più piccoli di un semitono (che è la distanza minima tra due tasti del pianoforte).

Questo è un argomento che approfondiremo più avanti; al solo fine esemplificativo dell'artificialità di quello che ci sembra in realtà naturale, e di quanto il nostro gusto acustico risenta dei tre secoli in cui ha dominato il sistema tonale, nell'articolo "Scale mobili" viene accennato brevemente allo sviluppo storico di alcune scale usate nella cultura musicale occidentale: da quella pitagorica a quella naturale (sancita nel 1558) e a quella

diatonica, che è la scala a cui siamo più abituati. Quest'ultima è quella che è alla base del sistema tonale e dei sistemi dell'ultimo secolo: è ottenuta dalla divisione dell'ottava in dodici parti uguali (i semitoni del temperamento equabile) e pone una gerarchia sui rapporti tra le note privilegiandone alcuni (tonica-dominante ecc.).

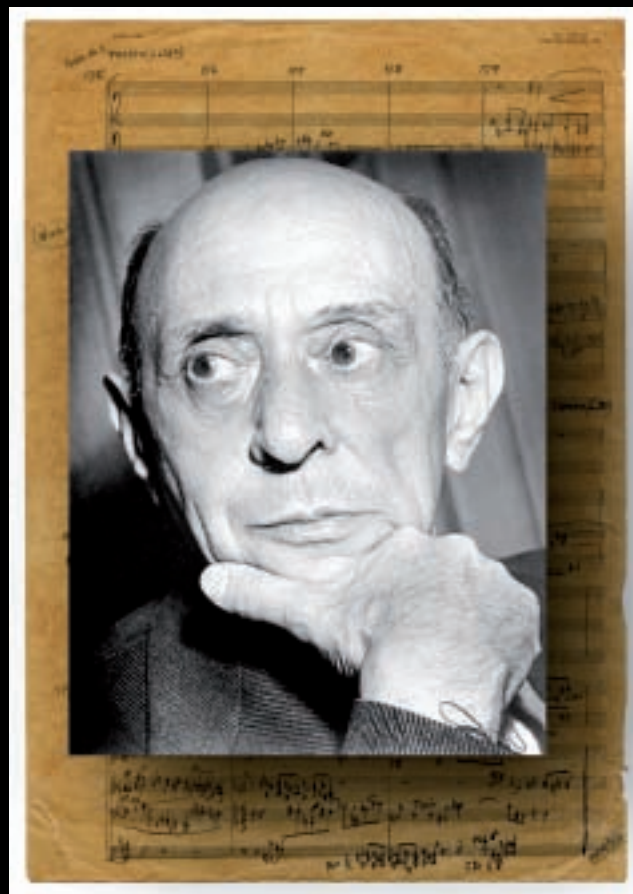
Questa divisione dell'ottava, benché altamente artificiale, permetteva, grazie alla sua duttilità (nuova per l'epoca), di passare facilmente da una tonalità all'altra, superando la rigidità dei "modi" e favoriva la nuova tendenza ad abbandonare la concezione polifonica (in cui prevale una lettura "orizzontale", ove cioè le singole voci procedono singolarmente, senza dare un'eccessiva rilevanza alle sovrapposizioni), a favore di una lettura principalmente "verticale", ove invece si pone un forte accento sui rapporti tra le note eseguite contemporaneamente, sugli accordi: nasceva, tra qualche critica, la tonalità.

Questo modo di organizzare e di ascoltare i suoni, questa *struttura*, che oggi può sembrare naturale, è in realtà conseguenza di un'invenzione dell'uomo, perfettamente collocabile in un ambito storico, la nascita del teatro musicale, e deve il proprio successo anche alla reciproca interazione tra il gusto di un'epoca e l'opera di artisti cui questo strumento, aperto e dinamico, of-

---

**Questo modo di organizzare e di ascoltare i suoni è in realtà conseguenza di un'invenzione dell'uomo, perfettamente collocabile in un ambito storico**

---



Arnold Schönberg, fondatore della Seconda Scuola di Vienna



friva la possibilità di raccontare storie d'amore, tradimenti, abbandoni e morte, in modo impensabile con le scale modali. Quanto questa struttura sia lontana dalla natura lo si può forse intravedere anche nel fallimento del tentativo di trascrizione in questo ambito del canto degli uccelli (fatto naturalissimo) che fece il compositore e ornitologo francese Olivier Messiaen (1908-1992); egli infatti ammise "sono obbligato a sopprimerne i *microintervalli* che i nostri strumenti non riescono a suonare".

#### LA MATEMATICA NELLA MUSICA

È abbastanza naturale che il linguaggio matematico si presti bene per la descrizione e la comprensione di molti fatti musicali (vedi ad esempio il fenomeno dei battimenti). Infatti i fenomeni musicali hanno una natura fisica e la fisica utilizza il linguaggio e i metodi della matematica. In quest'ultimo secolo sia in ambito matematico che in ambito musicale il concetto di struttura ha giocato un ruolo via via sempre più importante: non vi è quindi da stupirsi che il linguaggio matematico possa essere risultato idoneo anche per portare all'evidenza l'aspetto strutturale di alcune composizioni.

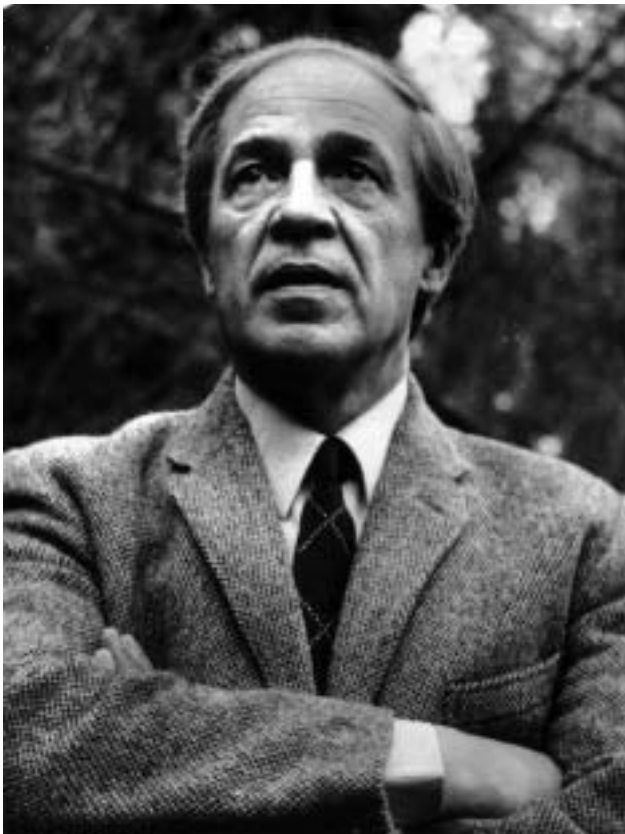
Nell'ultimo secolo strumenti propri del mondo matematico hanno anche fornito spunti per cambiare il modo stesso di comporre musica; alcuni compositori hanno

usato parametri gestiti matematicamente per comporre le loro opere: solo per citare qualche esempio, ci sono opere composte in modo stocastico, in cui cioè la nota che segue un gruppo di note non è determinata in base alle regole dell'armonia tradizionale ma è determinata su base probabilistica o in funzione della frequenza con cui le note sono intervenute in precedenza, (Messiaen, Xenakis, Ligeti) o opere in cui la gestione dei parametri è basata sul gruppo di simmetria del cubo (Xenakis).

Tutto ciò si inserisce nel quadro creatosi nel XX secolo dove, come reazione alla tradizione romantica europea del secolo precedente, vennero ricercate e introdotte novità stilistiche e formali per scardinare il principio di consonanza e dissonanza degli accordi musicali; Arnold Schoenberg (1874-1951), fondatore della *Seconda Scuola di Vienna*, assieme ai suoi allievi Alban Berg (1885-1935) e Anton Webern (1883-1945), introdusse l'*atonalità* e la *dodecafonia*, abolendo i rapporti gerarchici tra le 12 note e usando in tale sistema compositivo anche tecniche combinatorie molto simili a quelle barocche, che, anche qui, diventano parte integrante dell'atto compositivo. Olivier Messiaen (1908-1992) provò ad applicare le stesse tecniche sia alle altezze, che ad altri parametri della composizione musicale, per arrivare infine al *serialismo integrale* di Pierre Boulez (n. 1925) che ha portato all'estremo la tecnica introdotta dalla Scuola di Vienna.



CONCIERTO BANDA de MUSICA IJMM-ULE ULE - 21.4.07, @juanluisg. 2007  
http://www.flickr.com/photos/scharwenka/469041522/



**Pierre Boulez (1925-), prima di affermarsi come compositore e direttore d'orchestra intraprese gli studi di Matematica**

Processi analoghi li troviamo anche nelle composizioni del minimalista Steve Reich (n. 1936), ad esempio in *Music for Pieces of Wood* (1973) per cinque coppie di clavi intonate, che si sviluppa su cellule ritmiche immediate e dipana il discorso creativo sulla ripetizione ossessiva di tali moduli.

Nulla di nuovo sotto il sole nell'uso di processi combinatori nella composizione: già nel Medioevo Guillaume de Machaut (ca. 1300-1377) nel rondeau "*Ma fin est mon commencement*" percorre il testo palindromo prima in un verso e poi nell'altro, cosa che tra l'altro dà origine al titolo, e molte tecniche contrappuntistiche in gran voga nel periodo barocco sono di questa natura (si veda per un esempio l'articolo "La Matematica su Fra Martino").

#### MUSICISTI MATEMATICI

Di fatto, molti di questi procedimenti sono stati evidenziati dagli analisti nelle analisi a posteriori delle opere e si potrebbe pensare che essi siano frutto di elucubrazioni lontanissime dalla mente del compositore: esistono tuttavia, anche se rari, scritti in cui un autore descrive esplicitamente il procedimento di tipo combinatorio usato per la composizione di un pezzo: uno di questi è una lettera di Alban Berg al suo maestro Schoenberg, riportata a pag. 441 del libro di Luigi Rognoni "La scuola musicale di Vienna" (Einaudi), dove Berg stesso descrive la combina-

toria usata come base del pezzo che aveva dedicato al suo maestro in occasione del compleanno.

In questo contesto val la pena di notare che alcuni tra i maggiori compositori degli ultimi due secoli non sono privi di cultura matematica; ad esempio Boulez ha intrapreso gli studi di matematica a Lione prima di entrare al Conservatorio di Parigi, Philip Glass (n. 1937), compositore minimalista statunitense, ha studiato Matematica e Filosofia all'Università di Chicago, Iannis Xenakis (1922-2001), compositore e teorico della musica, si è laureato in Ingegneria ed è stato anche assistente di Le Corbusier.

Inoltre molti musicisti non si sono limitati ad usare tecniche compositive matematiche, ma le hanno formalizzate in veri e propri trattati scientifici, come Olivier Messiaen in *Technique de mon langage musical* (1944) o lo stesso Iannis Xenakis in *Musica formalizzata* (1971).

Questi scritti testimoniano la consapevolezza dei compositori e dei teorici della musica dell'uso di metodi matematici come strumento per strutturare l'opera musicale, o per riconoscerne le proprietà strutturali.

#### UN LEGAME PROFONDO

I rapporti tra matematica e musica sono di molteplice natura e sono venuti aumentando nel corso dell'ultimo secolo: su ciò si è scritto e si è detto moltissimo e vi è una letteratura vastissima.

La matematica e la musica sono discipline con molti aspetti anche formali in comune: il linguaggio criptico da apprendere, ad esempio, o la necessità di padronanza di un certo tecnicismo, non sufficiente tuttavia

a garantire prodotti di elevato livello senza un valido supporto di idee.

In entrambe le discipline l'aspetto strutturale riveste un ruolo importante, la musica trasuda micro e macro

strutture da ogni parte, dall'organizzazione del tempo alla struttura formale dell'intera composizione. Il linguaggio matematico si è prestato e si presta bene sia per la descrizione e comprensione di molti fatti musicali che per evidenziare l'aspetto strutturale di alcuni brani.

Addirittura, la matematica ha anche fornito metodi, ispirazioni, tecniche per alcune composizioni.

Ma un aspetto che a nostro parere accomuna queste due attività culturali è dato dalle caratteristiche dell'impegno intellettuale che entrambe richiedono in certe realizzazioni: questo aspetto, strutturale in senso lato, non è certo una prerogativa né della matematica né della musica, forse perché è un modo diffuso di procedere nell'organizzare l'attività intellettuale, l'attività creativa e la conoscenza.

