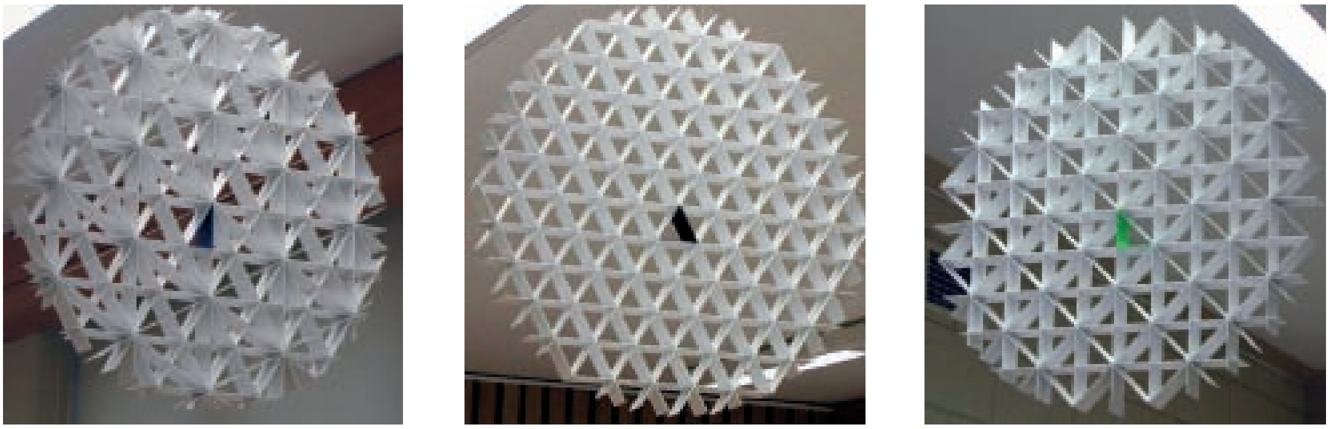
Il caleidoscopio

di H.S.M. Coxeter

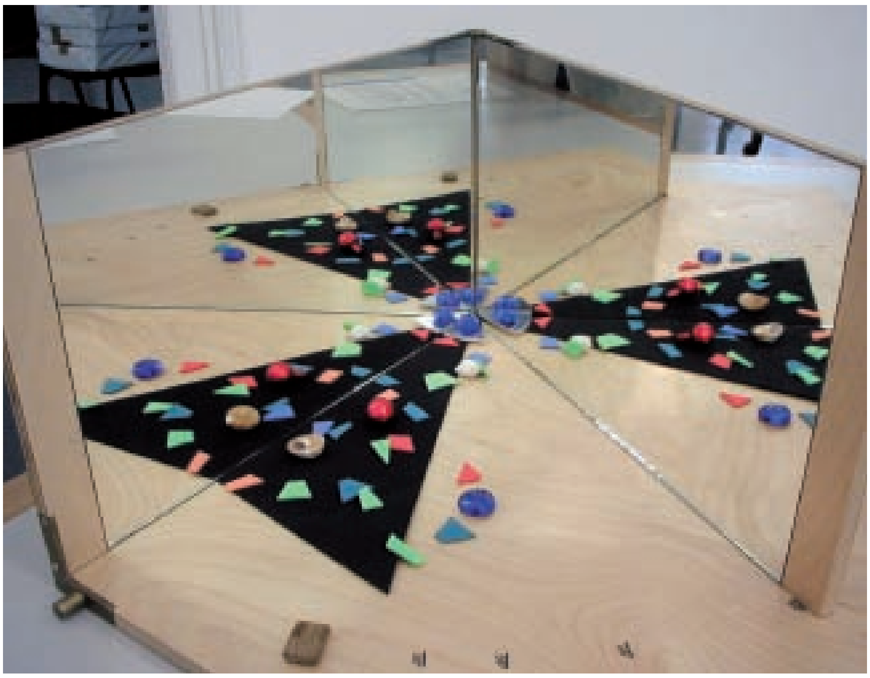


Tre griglie di triangoli. Dalla mostra *Simmetria, giochi di specchi*

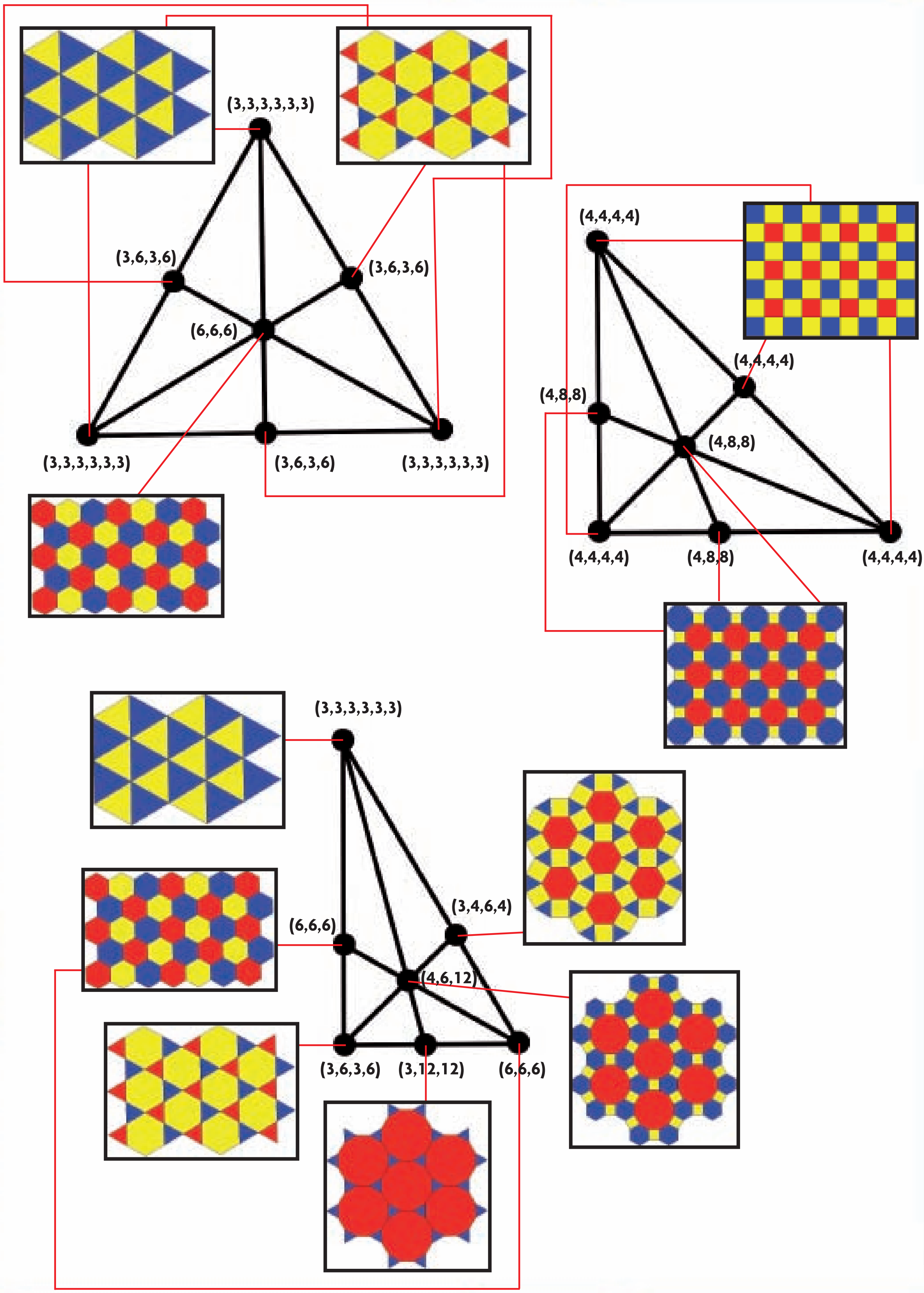
Un normale caleidoscopio consiste essenzialmente di due specchi piani, inclinati fra loro di 60° oppure di 45°; si dispone un oggetto nell'angolo fra questi due specchi in modo che sia riflesso in entrambi e il risultato che si ottiene è di vedere lo stesso oggetto sei oppure otto volte (a seconda dell'angolo), in una disposizione piacevolmente simmetrica.
Si può anche utilizzare una cerniera per unire fra loro i due specchi (privi di cornice). In questo modo l'angolo potrà variare a piacere ed è chiaro che un angolo di $180°/n$ corrisponderà a $2n$ immagini: l'oggetto reale e $(2n–1)$ immagini virtuali.
Come caso limite, si possono prendere due specchi paralleli dove si vedrà un numero teoricamente infinito di immagini (limitato soltanto dalla qualità dell'illuminazione e dalla qualità degli specchi).
Se l'oggetto è un punto sulla bisettrice dell'angolo fra gli specchi, le immagini sono i vertici di un $2n$-gono regolare; se l'oggetto è un punto su uno dei due specchi, allora le immagini coincidono a coppie e sono i vertici di un n-gono regolare. Quello che anche nel seguito chiameremo "oggetto-punto" può essere rappresentato in pratica da una pallina, o anche dalla fiamma di una candela.
Immaginando gli specchi verticali, possiamo aggiungere un terzo specchio verticale in modo tale che ciascuno dei tre specchi formi con gli altri due un angolo che sia un sottomultiplo intero di 180°. In altre parole, qualunque sezione orizzontale deve essere un triangolo di angoli

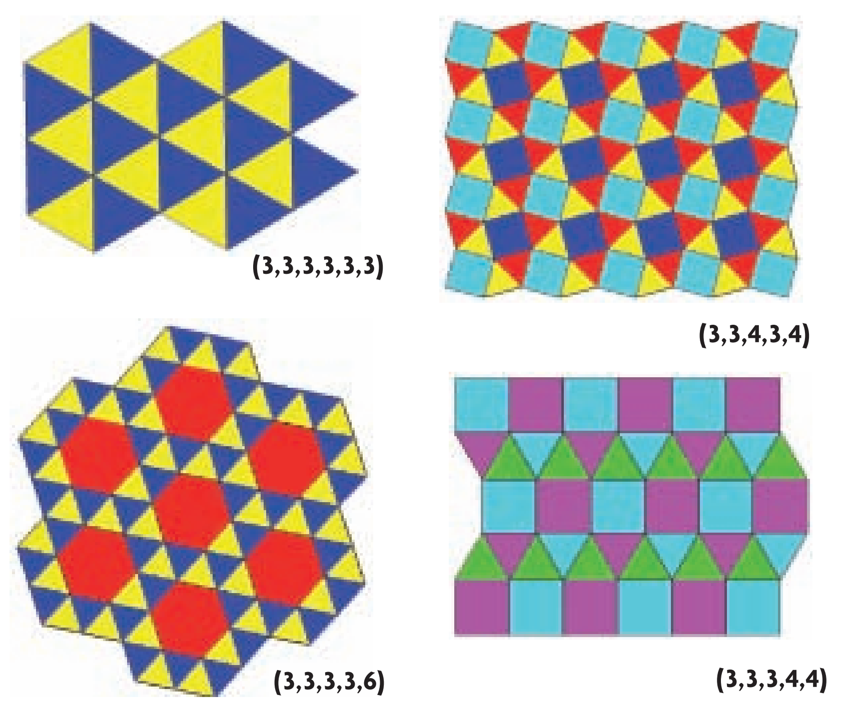
$$180°/n \quad 180°/m \quad 180°/k,$$

dove n, m e k sono tre numeri interi.



Due specchi a 60°. Dalla mostra *Simmetria, giochi di specchi*


(3,3,3,3,3,3)
(3,6,3,6)
(3,6,3,6)
(6,6,6)
(3,3,3,3,3,3)
(3,6,3,6)
(3,3,3,3,3,3)
(4,4,4,4)
(4,4,4,4)
(4,8,8)
(4,8,8)
(4,4,4,4)
(4,8,8)
(4,4,4,4)
(3,3,3,3,3,3)
(3,4,6,4)
(6,6,6)
(4,6,12)
(3,6,3,6)
(3,12,12)
(6,6,6)



Se ne ricava l'equazione

$$1/n + 1/m + 1/k = 1$$

che ha soltanto tre possibili soluzioni, ovvero le terne:

3,3,3 2,3,6 2,4,4

che corrispondono, rispettivamente, a un triangolo equilatero (di angoli 60°, 60° e 60°), a un mezzo triangolo equilatero (di angoli 90°, 60° e 30°) e a un triangolo rettangolo isoscele (di angoli 90°, 45° e 45°). In ciascuno di questi tre casi il numero di immagini che si vedono è (teoricamente) infinito.
Cambiando le posizioni dell'oggetto-punto nel triangolo, otteniamo i vertici di alcune particolari tassellazioni che hanno la caratteristica di avere tutti i vertici "che si comportano allo stesso modo" (Più tecnicamente, si tratta delle tassellazioni cosiddette *isogonali*, il che significa che il gruppo di simmetria della tassellazione è transitivo sui vertici; ovvero, comunque si fissino due vertici si riesce a trovare una trasformazione che manda la tassellazione in sé e i due vertici l'uno nell'altro). In particolare, se si sceglie il punto o in un vertice del triangolo oppure in uno dei tre punti in cui una bisettrice interseca un lato oppure nell'incentro (punto di incontro delle bisettrici), allora tutte le mattonelle della tassellazione sono poligoni regolari. Nei diagrammi di pagina 36 viene indicato, per ciascuno di questi punti, il tipo di tassellazione che si forma fra i tre specchi. La notazione che si utilizza – approfittando del fatto che si tratta di tassellazioni fatte di poligoni regolari e in cui ogni vertice si comporta allo stesso modo – usa alcuni numeri interi per indicare quali poligoni arrivano (nell'ordine ciclico specificato) in un dato vertice, e, di conseguenza, in tutti i vertici. Ad esempio (3,6,3,6) indica una tassellazione in cui in ogni vertice arrivano, nell'ordine, un triangolo equilatero, un esagono regolare, un triangolo equilatero, un esagono regolare (*NdR* Abbiamo già utilizzato questa notazione parlando dei poliedri nel n. 10 di *XlaTangente*).

La rete di triangoli che sembra creata dagli specchi (quando non si inserisce nulla all'interno del triangolo) può essere colorata a scacchiera con due colori.
Prendendo un punto opportuno all'interno di tutti i triangoli dello stesso colore (e ignorando il punto corrispondente in quelli dell'altro colore) otteniamo i vertici delle tassellazioni (3,3,3,3,3,3) (3,3,3,3,6) (3,3,4,3,4) raffigurate in questa pagina.
Si sono così ottenute tutte le tre tassellazioni regolari e sette delle otto tassellazioni uniformi (ovvero fatte di poligoni regolari e tali che in ogni vertice arrivi la stessa combinazione di poligoni); quella mancante, la (3,3,3,4,4) non si può ottenere con questo tipo di metodi.

E cosa succede se si aggiunge un terzo specchio non più parallelo alla retta di intersezione fra i primi due? Appuntamento al prossimo numero di *XlaTangente* con Coxeter e i caleidoscopi sferici!

(liberamente tradotto dall'omonimo paragrafo in "*Mathematical recreations and essays*" di W.W. RouseBall e H.S.M. Coxeter, prima edizione 1892, dodicesima edizione 1974, pp.155-161)

Tassellazioni negli specchi. Dalla mostra *Simmetria, giochi di specchi* (foto di Sabrina Provenzi)