Origami o matematica?

di Emma Frigerio

Il più noto modello di origami (dal giapponese ORU-piegare e KAMI-carta) è senza dubbio quello della gru, che risale probabilmente al X-XI secolo, così come altri modelli tradizionali. Secondo una leggenda, la gru vive mille anni; regalare una gru origami diventava così un augurio di lunga vita, regalarne dieci (o cento, o mille) significava augurare una vita senza fine. Il grappolo di 1000 gru che adorna spesso i templi è legato anche alla storia di Sadako Sasaki, una ragazza di Hiroshima malata di leucemia in seguito alle radiazioni della bomba atomica: essa cominciò a piegare le mille gru, ma morì prima di completarle. Ogni anno la statua eretta in suo onore nel Parco della Pace è letteralmente coperta da grappoli di gru, tanto che ora il significato di augurio di pace è diventato prevalente.

Grappolo di gru realizzato da Luisa Canovi

In giapponese, le parole che significano *carta* e *dei* si pronunciano allo stesso modo; forse per questo all'inizio l'origami ha avuto relazione con la religione shintoista. Con un legame più profondo, la trasformazione di un foglio in un oggetto che dopo un po' si rovina, ma che può rinascere mantenendo viva la tradizione, esemplifica il principio del ciclo vitale, così come il tempio shintoista viene ricostruito ogni vent'anni sempre uguale a se stesso.

Fiore di loto

Emma Frigerio è ricercatrice di geometria all'Università degli Studi di Milano; dal 1986 è membro dell'associazione italiana di origami, il Centro Diffusione Origami. Sull'argomento "matematica e origami", di cui si occupa da più di vent'anni, ha tenuto numerose conferenze, laboratori per la formazione degli insegnanti, comunicazioni scientifiche a convegni internazionali.

In realtà l'origami è nato in Cina, il paese in cui è stata inventata la carta; spesso ancor oggi, nei ristoranti cinesi, il tovagliolo è piegato a forma di fiore di loto, forse il più conosciuto modello tradizionale cinese. Ma vi sono anche modelli della tradizione occidentale, che si è sviluppata in maniera indipendente: la comune barchetta e quell'oggetto noto come Inferno-Paradiso (o saliera, se lo si capovolge) ne sono esempi.

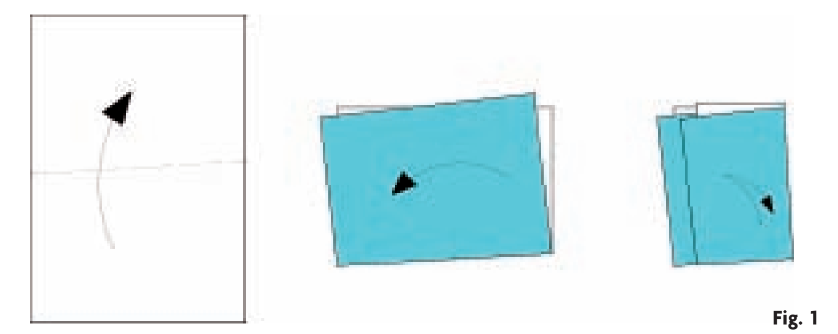


Fig. 1

La grande fioritura dell'origami ha inizio dagli anni '60: in cinquant'anni si passa da pochi modelli tradizionali a moltissime creazioni di autori da tutto il mondo, in diversi stili e con diverse tecniche. È impossibile non citare il più grande origamista figurativo, Akira Yoshizawa, che già dagli anni '40 aveva posto le basi per il successivo sviluppo.

Ma perché un articolo sull'origami in una rivista che parla di matematica? Perché l'origami è una maniera molto bella di fare matematica! Per esempio, provate a piegare circa a metà un foglio, poi, senza riaprirlo, piegatelo di nuovo sovrapponendo la prima piega su se stessa, infine fate una piega obliqua, come nell'ultima immagine della Figura 1. Prima di riaprire completamente il foglio, provate a immaginare che cosa vedrete… Il risultato che si ottiene, e alcune osservazioni matematiche, sono nel box *Quel che si vede e… perché* di p. 36.
Dunque, con le pieghe si ottengono delle rette (in realtà dei segmenti, dato che il foglio è necessariamente limitato) e, come con riga e compasso, si possono fare delle costruzioni geometriche. Per prima cosa, però, bisogna stabilire le regole del gioco. Ad esempio, a partire da due punti, con riga e compasso si possono costruire una retta e due circonferenze (Figura 2), poi determinare quattro nuovi punti di intersezione, quindi costruire nuove rette e circonferenze (quante?), determinare nuovi punti di intersezione, e così via…

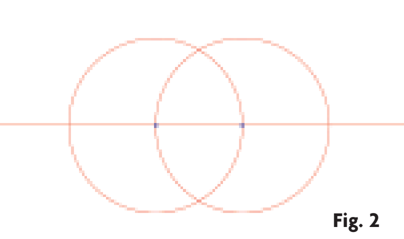


Fig. 2

Con l'origami si segue un procedimento simile: questa volta, piega è sinonimo di retta e i punti si ottengono come intersezione di due pieghe (o di una piega e il bordo del foglio). Le regole che è ragionevole fissare sono suggerite dalle pieghe che si fanno usualmente per ottenere i modelli origami. Ad esempio, dati due punti, si può fare una piega che li porti uno sull'altro. Provate a realizzare una piega di questo tipo facendo combaciare due vertici opposti di un foglio rettangolare, come nella Figura 3, poi riaprite il foglio; come si chiama, in geometria, la "retta" ottenuta? Se disegnate la diagonale congiungente i due vertici che avevate fatto combaciare, scoprirete che la piega è il suo asse, cioè la retta perpendicolare che passa per il suo punto medio. Forse avete anche studiato che l'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dai suoi estremi; se ora formate di nuovo la piega che avevate fatto prima, è evidente che tutti i suoi punti sono equidistanti dagli estremi A e C della diagonale AC: qualunque sia il punto P sulla piega, PA e PC si sovrappongono l'uno sull'altro tramite la piega stessa, quindi sono uguali. Le regole del gioco (tra le quali c'è anche "Dati due punti, si può fare una piega che li porti uno sull'altro") sono i sette assiomi di Huzita e Hatori: il fisico giapponese, lungamente vissuto a Padova, Humiaki Huzita, ne ha definiti sei, poi, a questi, Koshiro Hatori ne ha aggiunto un settimo, che comunque non estende l'insieme di costruzioni che si possono ottenere.


Farfalla - Modello di Akira Yoshizawa

Con l'origami si possono fare tutte le costruzioni che si possono fare con riga e compasso, e anche di più: ad esempio, due dei classici problemi di costruzione, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, impossibili con riga e compasso, sono possibili con l'origami. Sostanzialmente, le costruzioni con riga e compasso corrispondono a una sequenza di problemi di primo e secondo grado, mentre la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo si traducono in problemi di terzo grado; invece, le costruzioni con l'origami sono una sequenza di problemi di primo, di secondo e di terzo grado. La differenza sostanziale è data da uno degli assiomi di Huzita, che consente di risolvere problemi di terzo grado; nel box *La duplicazione del cubo* di p. 37 trovate una costruzione per la duplicazione del cubo.

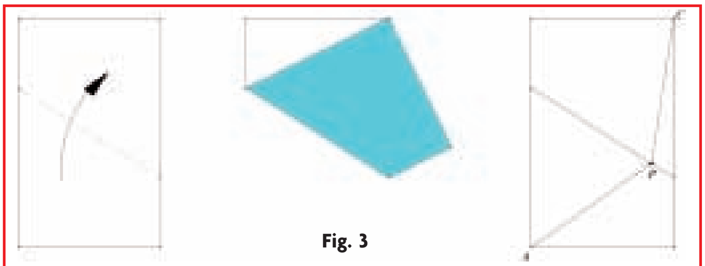
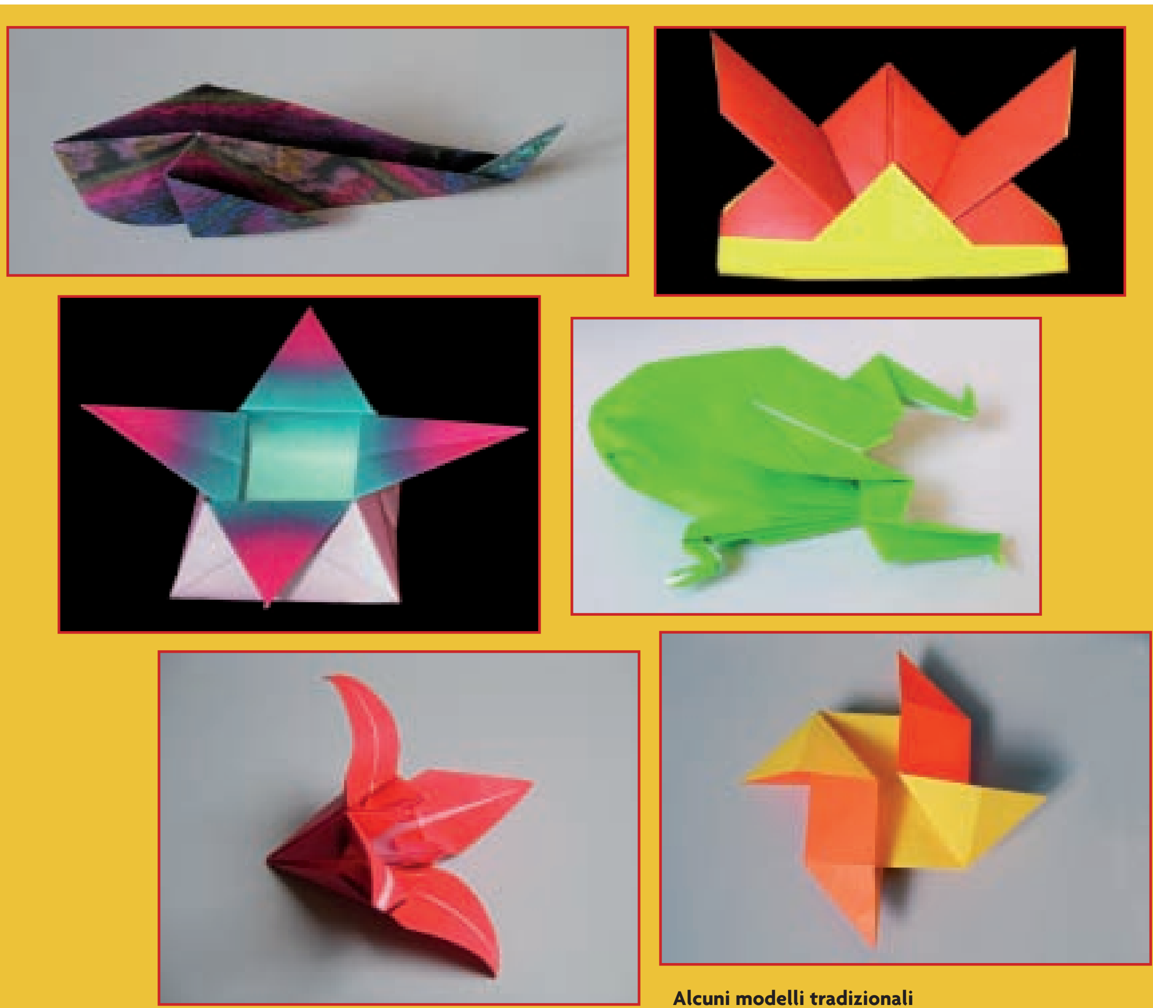


Fig. 3

Qui stiamo parlando di costruzioni matematicamente esatte; nella realtà, però, una facile costruzione approssimata può essere preferibile a una costruzione esatta ma complessa, anche se il valore concettuale è diverso.
Per esempio, con la tecnica dell'origami modulare non è difficile ottenere il dodecaedro rappresentato nella foto a p. 37: basta solo qualche foglio di carta A4 e un po' di pazienza per piegare i 30 moduli necessari, uno per ogni spigolo, e intrecciarli fra loro. Se volete riprodurlo, le istruzioni sono a p. 38; il risultato sarà gradevole anche usando la normale carta bianca. Altri-



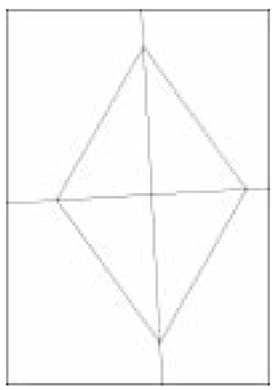
Alcuni modelli tradizionali

menti, si possono usare 5 colori, come per il dodecaedro della foto, oppure 6 o anche 3, e serviranno rispettivamente 6, 5 o 10 moduli per ogni colore; occorrerà poi studiare un modo per disporli “regolarmente”.

Analizzando il modulo, si scopre che l’angolo tra due spigoli adiacenti non è quello richiesto di 108°; tuttavia, nessuno se ne accorge guardando il modello, perché l’errore è piccolo (meno dell’1,5%). Se dalla carta a nostra disposizione volessimo ricavare dei fogli teoricamente perfetti per i nostri moduli, alla fine avremmo probabilmente dei risultati meno precisi, a causa degli errori commessi.

QUEL CHE SI VEDE E... PERCHÉ

Torniamo alle piegature della Figura 1 a p. 35: quando il foglio è ancora piegato, molti segmenti e angoli che si sono formati sono sovrapposti, dunque sono uguali tra loro. Ad esempio, nel punto di incontro delle prime due pieghe, l’angolo giro risulta suddiviso in quattro angoli uguali, cioè in quattro angoli retti. Riaprendo completamente il foglio, si vede un quadrilatero che ha tutti i lati uguali, le diagonali perpendicolari che si tagliano scambievolmente a metà.



Con tre pieghe abbiamo reso evidente la geometria del rombo: questa volta non abbiamo ottenuto un oggetto utile o esteticamente gradevole, ma abbiamo deliberatamente piegato una figura geometrica.

Possiamo anche chiederci quali, tra i tanti teoremi sui rombi, abbiamo dimostrato. Eccone un paio:

- un quadrilatero in cui le diagonali sono perpendicolari e si tagliano scambievolmente a metà è un rombo (è un parallelogramma perché ci sono coppie di angoli alterni interni uguali, un rombo perché i lati sono uguali).

- le diagonali di un rombo sono anche bisettrici dei suoi angoli.

Invece, non abbiamo affatto dimostrato che in un rombo le diagonali sono perpendicolari e si tagliano scambievolmente a metà!

Fin qui abbiamo mostrato come l'origami può aiutare la comprensione della matematica, ma è vero anche il contrario: possiamo usare la matematica per studiare l'origami. È questo un campo di ricerca attualmente molto seguito, anche in vista di applicazioni in campo industriale o medico: la comprensione del processo di piegatura e la capacità di progettare strutture rispondenti a determinate specifiche possono portare a soluzioni efficienti di problemi tecnologici complessi, che tipicamente (ma non solo) hanno a che fare con strutture che si aprono e si richiudono da sole. Alcune applicazioni sono già realizzate, altre sono allo stadio di prototipi: piegatura di lenti o vele solari da mandare nello spazio, piegatura di *airbag*, costruzione di *stent* da inserire nei vasi sanguigni ostruiti, di *crash box* per assorbire gli urti tra veicoli, di materiale ultraleggero per la costruzione di velivoli.
Insomma, l'origami non è solo un gioco da bambini!

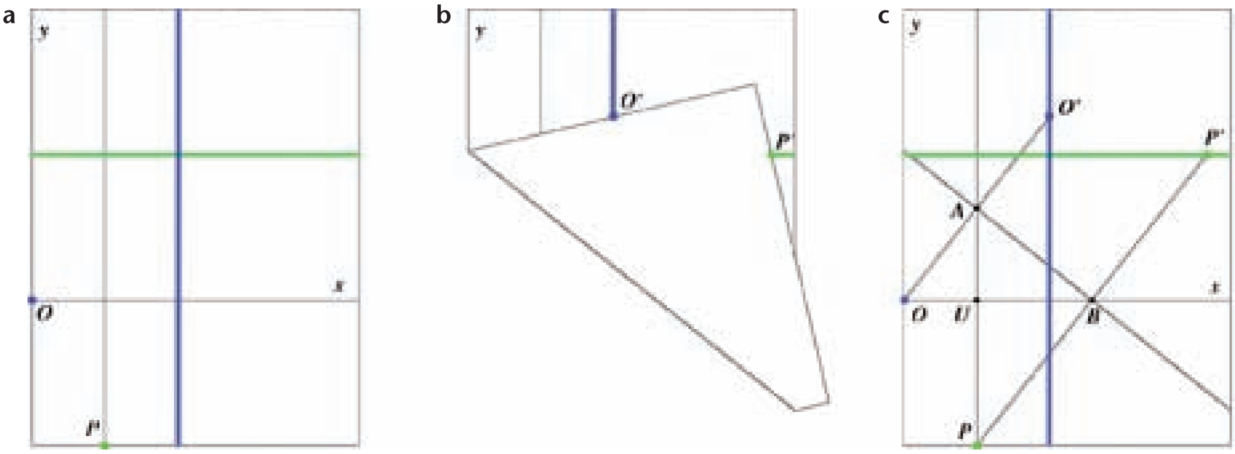
Dodecaedro - Modello di Silvana Betti Mamino

Centro Diffusione Origami

Il Centro Diffusione Origami è un'associazione culturale nazionale, senza fini di lucro, fondata nel 1978. Esso si propone di diffondere e propagandare la conoscenza e la pratica dell'origami, promuovendone lo studio nei suoi molteplici aspetti e sottolineandone la grande efficacia come strumento educativo per sviluppare l'abilità manuale, il senso estetico, la creatività come pure l'approfondimento delle proprie conoscenze geometriche e matematiche.
[dalla presentazione del Centro, http://www.origami-cdo.it/]

LA DUPLICAZIONE DEL CUBO

Il problema "costruire un cubo avente volume doppio di quello di un cubo dato" si traduce in "dato un segmento di lunghezza 1, costruire un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$".
Su un foglio a quadretti, disegna con la matita un sistema di assi cartesiani e la retta di equazione x = 1. Con un pennarello blu segna il punto O (0,0) e la retta di equazione x = 2, con un pennarello verde il punto P (1,-2) e la retta di equazione y = 2. Accertati che i punti si vedano anche dal rovescio del foglio, poi taglia il foglio in modo che O sia sul bordo di sinistra e P su quello inferiore (v. Figura a qui sotto).



Senza marcare la piega, porta il punto blu sopra la retta blu e osserva dove va a finire il punto verde. Fa' scivolare il punto blu sopra la retta blu, e piega il foglio solo quando il punto P va a cadere sopra la retta verde (v. Figura b). Segna sul foglio le nuove posizioni O' e P' dei punti O e P, poi riaprilo. Disegna i segmenti OO' e PP' e segna i punti U, A, B come in Figura c.
I triangoli rettangoli OUA, AUB, BUP sono simili, dunque
OU : UA = UA : UB = UB : UP.
Poiché OU = 1, da OU : UA = UA : UB si ricava che $UB = UA^2$.
Poiché UP = 2, da UA : UB = UB : UP si ricava che $2 \cdot UA = UB^2$,
perciò $2 \cdot UA = UA^4$,
da cui $UA = \sqrt[3]{2}$.

DODECAEDRO

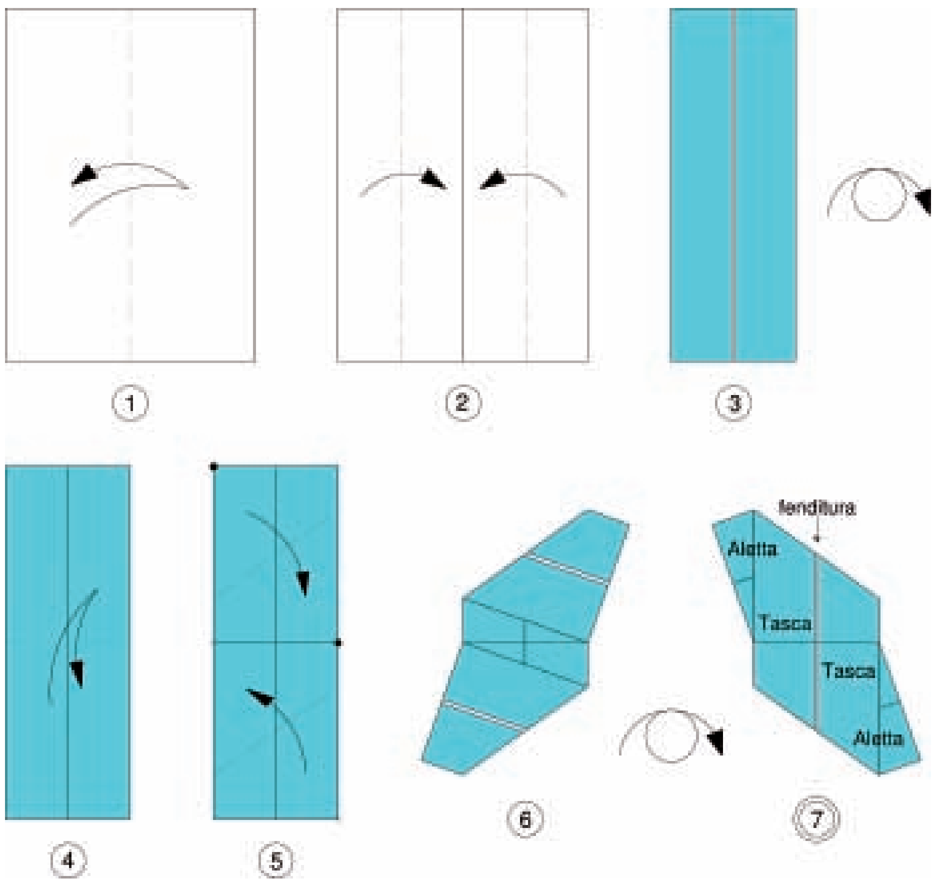
(Modello di Silvana Betti Mamino)

Preparazione della carta

Per un solido di misura media, servono 30 foglietti formato A6: se ne ottengono 4 dividendo a metà un foglio A4 con un taglio parallelo ai lati corti e dividendo allo stesso modo ognuna delle due parti.

Piegatura del modulo

1. Piega il foglietto a metà per il lungo e riaprilo.
2. Piega portando uno dei due lati lunghi sopra le piega appena fatta e ripeti con l'altro lato (i due lati non devono sovrapporsi, anzi è preferibile che tra i due ci sia un po' di "aria").
3. Questo è il risultato. Volta il modello, in modo da avere sopra la parte "intera" e appoggiata sul tavolo quella con la fenditura.
4. Piega a metà nell'altro senso e riapri.
5. Porta il vertice in basso a destra sopra l'estremo di sinistra della piega 4 e il vertice in alto a sinistra sopra l'estremo di destra della piega 4.
6. Questo è il risultato. Volta il modello.
7. Il modulo è terminato.



Piega allo stesso modo tutti i moduli; assicurati che si possano sovrapporre uno sull'altro, come 30 guanti destri.

Assemblaggio

Le pieghe fatte al passaggio 4 corrispondono agli spigoli del dodecaedro; ogni faccia è formata da cinque mezzi moduli, mentre in ogni vertice ne arrivano tre.
Prendi due moduli, uno in ogni mano, come indicato nella figura qui sotto. Infila l'aletta del modulo a destra nella tasca del modulo a sinistra. Prosegui in circolo allo stesso modo con altri tre moduli e chiudi in tondo (per farlo, dovrai portare sopra un'aletta che è rimasta sotto). Otterrai un pentagono contornato da mezzi moduli non utilizzati.
Capovolgi il tutto e appoggia il pentagono sul tavolo. Aggiungi un modulo ad ogni vertice, utilizzando i due mezzi moduli liberi.
Prosegui allo stesso modo, completando il dodecaedro.