Foto di Rosina Cavallaro

La matematica del piastrellista (I)

di **PAOLO BELLINGERI**

Perché le piastrelle sono quasi sempre quadrate? Quali altri tipi di piastrelle si possono usare? E in che modo? Queste domande, degne di un piastrellista, sono in realtà molto profonde e i risultati possono essere sorprendenti, anche per gli stessi matematici! In questo primo articolo sulla matematica del piastrellista ci preoccuperemo in particolare di rispondere a una domanda molto pratica: che piastrelle usare per la nostra cucina?

Prima di cominciare a rispondere a una tale domanda bisogna mettersi d'accordo sul tipo di piastrelle... e sul tipo di cucina! In effetti la cucina a cui ci interessiamo non ha pareti, in quanto il nostro obiettivo è quello di piastrellare il piano infinito! D'accordo, «praticamente» è impossibile, ma dal punto di vista teorico è «evidentemente» possibile: pensiamo a una scacchiera con un numero infinito di caselle che si succedono senza soluzione di continuità nelle quattro direzioni cardinali. Oppure... affidiamoci agli specchi, come nell'immagine qui in alto.

In matematica, la pavimentazione di una superficie (che sia il piano, la sfera o un poliedro) con delle piastrelle (tasselli) elementari, senza buchi né sovrapposizioni (insomma vogliamo un lavoro ben fatto!) si chiama *tassellazione*.

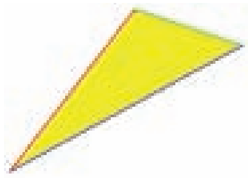
Adesso che abbiamo deciso che cosa vogliamo pavimentare (e che cosa significa pavimentare) dobbiamo scegliere che «tipo» di piastrelle usare.
In realtà, da matematici, ci chiediamo quali poligoni si possano usare per pavimentare, e inoltre chiediamo che gli accostamenti sul piano avvengano lato contro lato. In queste pagine vedremo in particolare il caso delle cosiddette *tassellazioni monoedrali*, vale a dire quelle formate a partire da un solo tipo di piastrella elementare, come gli alveari (formati da esagoni regolari identici) o la scacchiera.

Foto di Vincenzo Onida

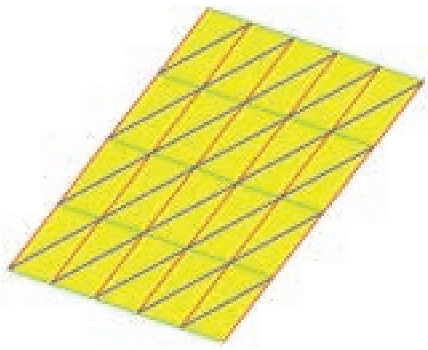
UNO, DUE, TRE!

Il mondo dei poligoni è molto vasto e noi ci entriamo passo passo, usando come discrimine il numero dei lati dei poligoni stessi.

Visto che non ci sono poligoni con uno o due lati, i primi che incontriamo sono dunque i triangoli. Tutti i triangoli possono tassellare il piano infinito? Per esempio il triangolo riportato qui di fianco?



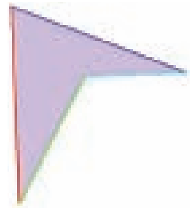
La risposta è positiva: questo fatto diventa più sorprendente quando ci rendiamo conto non solo che tutti i triangoli tassellano il piano, ma anche che possiamo usare sempre la stessa "regola" per tassellarlo. In effetti, basta prendere il nostro triangolo preferito e ruotarlo di 180 gradi rispetto al punto medio di uno qualsiasi dei suoi lati: così otteniamo un secondo triangolo e i due triangoli insieme formano un parallelogrammo che possiamo ripetere all'infinito traslandolo secondo due direzioni indipendenti.



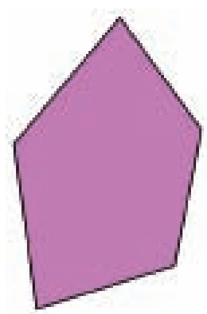
Come faremmo in una scacchiera infinita, salvo il fatto che ora le caselle non sono più dei quadrati ma, appunto, dei parallelogrammi.

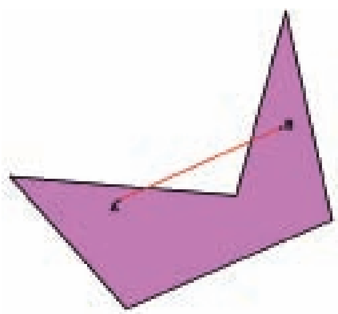
... QUATTRO...

Passiamo adesso ai quadrilateri: abbiamo visto che quadrati e parallelogrammi tassellano il piano. Ma i trapezi? E gli "aquiloni? E figure strane come il "boomerang" riportato qui di fianco?



In effetti, fra i quadrilateri abbiamo un nuovo fenomeno: i poligoni non convessi. Se vi ricordate, un poligono è detto *convesso* quando, presi comunque due suoi punti, il segmento che li unisce è tutto contenuto nel poligono: è il caso di tutti i triangoli e, ad esempio, della figura qui sotto a sinistra, ma non di quella a destra.

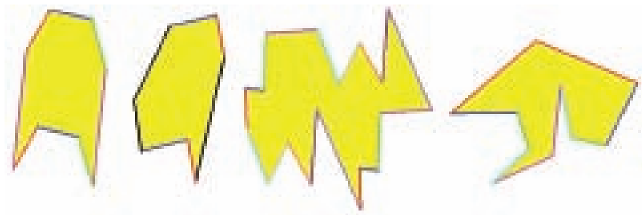




Ma anche con questa "complicazione", la risposta alla nostra domanda resta positiva: tutti i quadrilateri possono essere utilizzati come tasselli per pavimentare il piano. La tecnica è esattamente quella usata per i triangoli: basta ruotare i tasselli rispetto al punto medio di qualsiasi lato del quadrilatero e ripetere (all'infinito...) il processo, come la figura 1 suggerisce:

... SETTE!

Nel caso dei poligoni a cinque e sei lati, vedremo tra un momento che i giochi si complicano in modo serio; è più semplice allora chiudere il discorso per i poligoni (convessi) con sette o più lati: esistono infatti dei teoremi che danno delle condizioni necessarie affinché un poligono possa tassellare il piano infinito.
In particolare, si sa che un poligono convesso con più di sei lati non può tassellare il piano. Chiaramente ciò non significa che non esistano poligoni con più di sei lati che tassellano il piano: per esempio, i poligoni qui sotto (che però sono concavi) sono tutti dei "tasselli validi".



GLI ESAGONI: UN PROBLEMA DI CLASSIFICAZIONE

Non tutti gli esagoni tassellano il piano; comunque sappiamo classificare (vi ricordate i due dossier di *XlaTangente* che avevano il titolo "Uguali? Diversi!" e "Diversi? Uguali!" che sono comparsi sui numeri 11 e 12?) gli esagoni che hanno una tale proprietà. In altre parole, possiamo dire *a priori* se un esagono dato può tassellare o no il piano infinito. In effetti un esagono tassella il piano se e solo se appartiene a una delle seguenti famiglie (classi):
- esagoni con due lati opposti uguali e paralleli. Si tratta degli esagoni tali che a+b+c=360° e A=D (figura 2):
- esagoni in cui, si ha A=B, C=D, E=F e a=c=e=120° (figura 3):
- esagoni con A=D, C=E e a+b+d=360° (figura 4):

(Ecco allora una domanda: sapete trovare un esagono – il solo – che appartiene a tutte e tre le classi?)

Vale la pena notare che il risultato che abbiamo appena presentato non è affatto semplice da dimostrare: in realtà è il risultato principale di una tesi di Dottorato in Matematica degli inizi del ventesimo secolo! Se è probabile che non abbiate

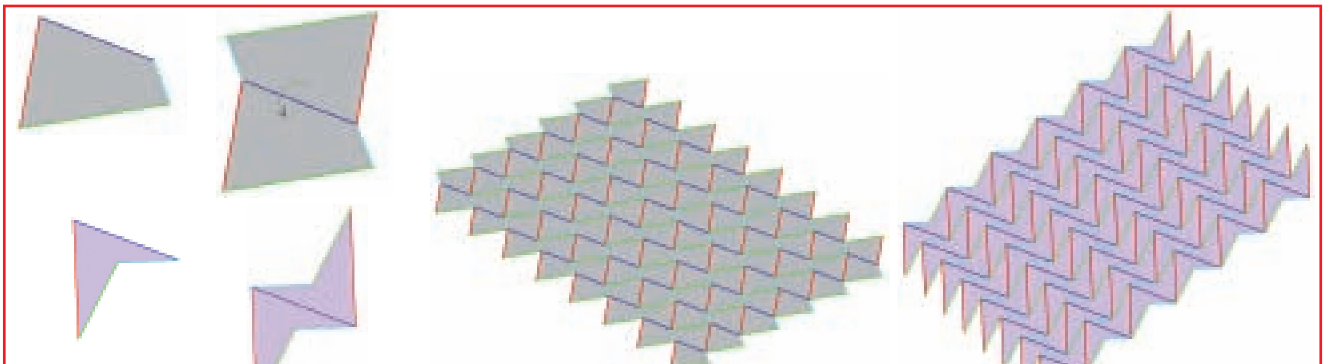


Figura 1

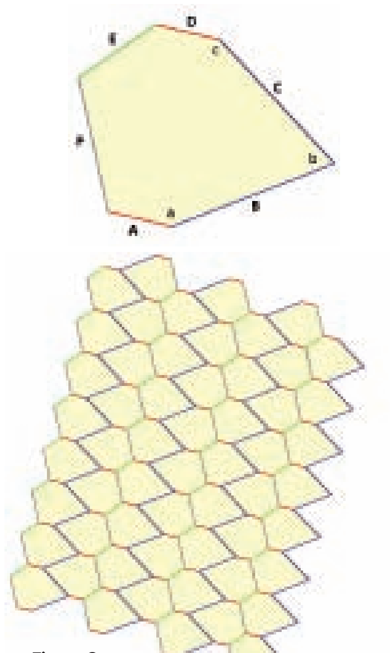


Figura 2

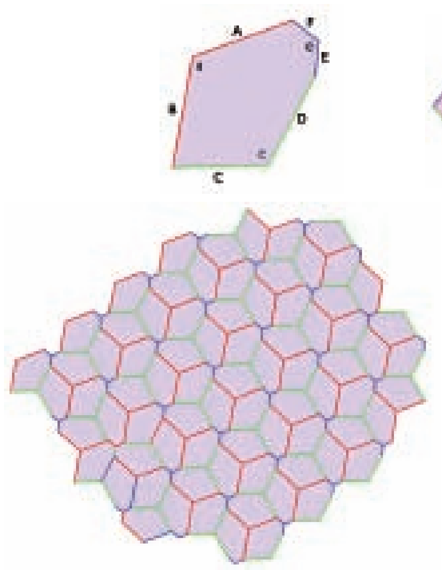


Figura 3

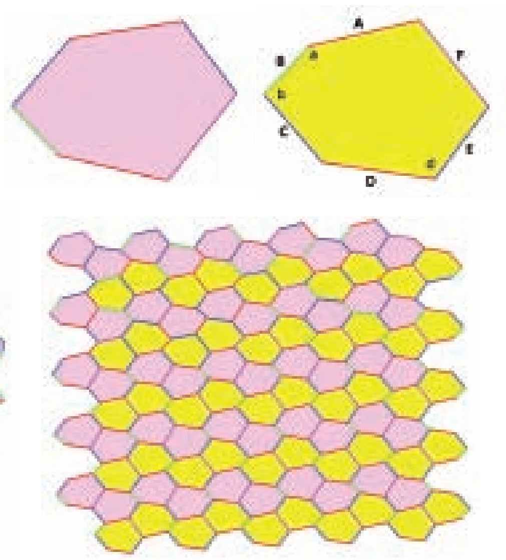
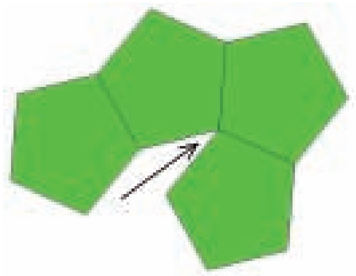


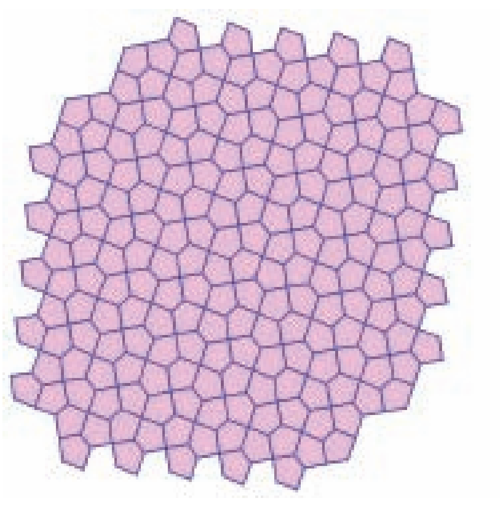
Figura 4

mai sentito nominare l'autore e il titolo della tesi in questione (K. Reinhardt, *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone, Dissertation der Naturwiss*. Universität Frankfurt/Main, Borna - Leipzig, 1918) probabilmente conoscete però il direttore di tesi: si tratta del celebre matematico David Hilbert...

Un problema aperto

E i pentagoni, direte voi? È chiaro che esistono dei pentagoni che non tassellano il piano, come ad esempio il pentagono regolare qui di fianco, ed è chiaro che esistono anche pentagoni che tassellano il piano come quello in figura qui sotto





o ancora come le «casette» nella foto qui a destra.

Ma, in generale, quali pentagoni tassellano il piano? Il problema è aperto, nel senso che si conoscono quattordici classi di pentagoni che tassellano il piano, ma non si sa se questa lista è esaustiva oppure no. In altri termini, non si sa se esistono o meno dei pentagoni che tassellano il piano senza appartenere a nessuna delle quattordici classi.

La storia della (incompleta) classificazione dei pentagoni cela un aneddoto istruttivo e curioso. Nel 1968 fu pubblicato su una rivista di matematica un articolo in cui si presentavano delle classi di pentagoni che tassellano il piano. Il risultato principale era però la "dimostrazione" del fatto che tale lista (che presentava solo nove classi) era una completa classificazione. L'articolo passò inosservato fino a quando sette anni dopo il celebre divulgatore matematico Martin Gardner scrisse un pezzo su *Scientific American* presentando tale risultato. Ben presto alcuni lettori cominciarono a scrivere alla rivista mostrando vari esempi di pentagoni che non appartenevano ad alcuna delle classi e tassellavano il piano. Tra questi perspicaci lettori va senza dubbio citata Marjorie Rice, che non solo non era una matematica di professione, ma che non aveva neppure seguito degli studi specifici in matematica. Marjorie Rice mostrò rapidamente una nuova classe di pentagoni che tassellano il piano e pochi anni dopo esibì altre tre nuove classi. Negli anni `80 uno studente tedesco, Rolf Stein, trovò una quattordicesima classe. Da allora nessuno ha trovato una nuova classe di pentagoni che tassellano il piano, ma nessuno, d'altra parte, ha dimostrato che la lista attuale è esaustiva.

Il problema è ancora aperto: e se foste voi a chiuderlo?

(segue)

Il grande zoo dei pentagoni

Sul web è semplice trovare le quattordici classi di pentagoni che tassellano il piano, per esempio su http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html.
A coloro che invece sono interessati a conoscere meglio la storia della classificazione dei pentagoni consigliamo la lettura della pagina web di Marjorie Rice (lei medesima!):
http://tessellations.home.comcast.net/~tessellations/.
Da parte nostra, qui sotto vi presentiamo tre delle quattordici classi, per darvi un'idea della varietà di tassellazioni che si possono ottenere con i pentagoni.

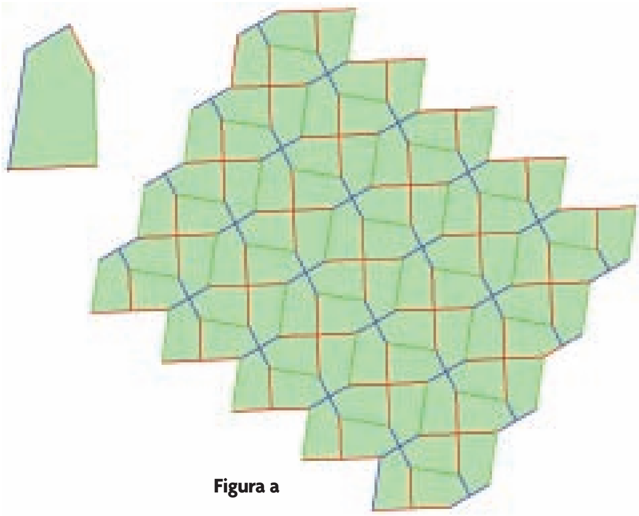


Figura a

1) La classe dei pentagoni con due coppie di lati adiacenti di uguale lunghezza che formano un angolo retto, come in figura a.
Tutti i pentagoni appartenenti a questa famiglia si possono accostare quattro a quattro per formare delle «girandole» o delle «croci» (le avete notate?). Sia P un tale pentagono e chiamiamo A,B e C,D le due coppie di lati uguali e formanti un angolo retto. Chiamiamo E il lato restante (che magari ha la stessa lunghezza di A oppure di C). Per convincersi del fatto che questo tipo di pentagoni tassellano il piano, ruotiamo P rispetto al punto medio di e.
Adesso possiamo accostare due altre copie di P come in figura b.
Otteniamo così un esagono con i lati opposti di uguale lunghezza e paralleli (sapete verificarlo?), che appartiene quindi alla prima famiglia di esagoni che tassellano il piano.

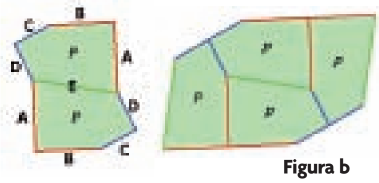


Figura b

2) La classe di pentagoni tali che, come in figura c, si abbia A = B, E + C = D e a = c = d = 120°.
Che questa famiglia di pentagoni tasselli il piano deriva dal fatto che i pentagoni possono essere ricomposti a tre a tre per formare una tassellazione di esagoni regolari (attenzione! l'esempio che facciamo non rispetta l'accostamento «lato contro lato». Sapete trovare un esempio nella stessa classe che lo rispetta?).

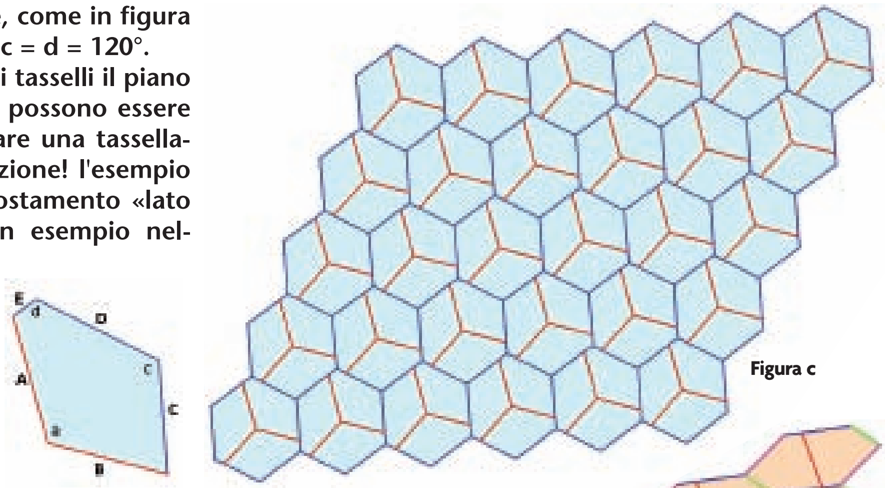


Figura c

3) La classe dei pentagoni con due lati paralleli. Visto che i due lati paralleli non possono essere adiacenti, possiamo supporre che in senso orario siano separati da un solo lato, diciamo E. Se ruotiamo il pentagono di 180° rispetto al punto medio di E, otteniamo un esagono con i lati opposti di uguale lunghezza e paralleli: ancora una volta, un esagono che appartiene alla prima famiglia di esagoni che tassellano il piano.

Un'altra domanda per voi: esiste un pentagono che appartiene alle tre classi che abbiamo descritto?

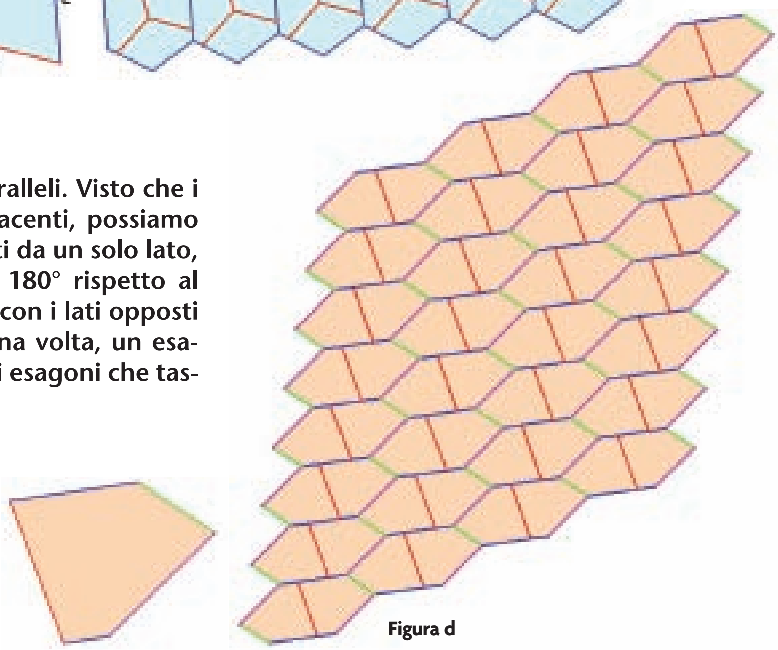


Figura d