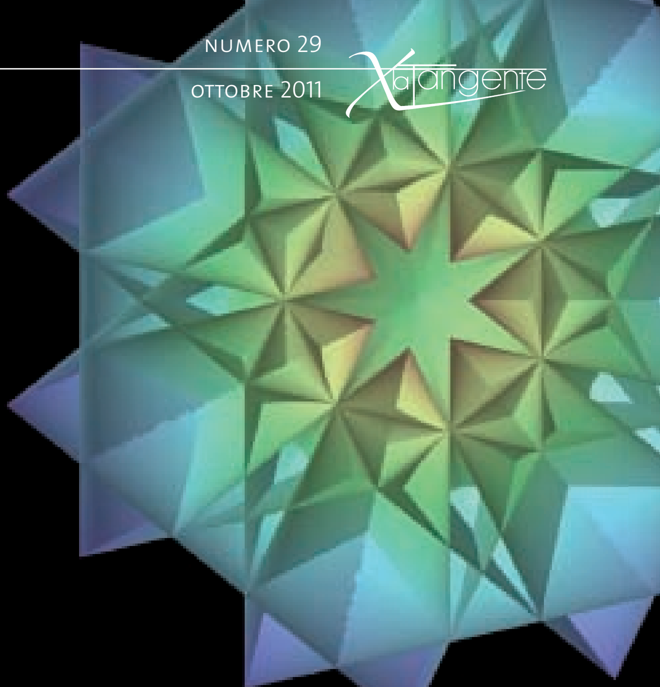


Rotogoni e rotoedri

Nuove esplorazioni tra arte e matematica

di ALDO SPIZZICHINO

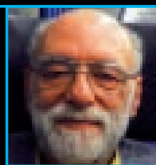
Sono passati quasi 2500 anni dai primi studi sui poliedri regolari, eppure queste strutture geometriche offrono ancora spunti per nuove esplorazioni, basate sull'uso del computer. Di seguito vedremo infatti come, operando con rotazioni su alcuni elementi di questi poliedri regolari (spigoli, raggi, ecc.), si generino inedite e affascinanti figure, caratterizzate da molteplici simmetrie

Non è difficile immaginarsi la figura geometrica che si ottiene facendo ruotare un rettangolo attorno a un suo lato: le porte girevoli delle banche e degli alberghi, o il semplice atto di girare la pagina di un libro, suggeriscono la risposta corretta anche a chi non abbia particolare dimestichezza con la geometria. Se però ci si chiede quale figura si ottiene considerando simultaneamente tutti i solidi che si ottengono facendo ruotare il rettangolo rispetto a ciascuno dei suoi quattro lati, la cosa appare già più complicata. Se poi volessimo fare la stessa cosa con poligoni che hanno un numero maggiore di lati, o con poligoni intrecciati, oppure operare sugli spigoli di un poliedro, ci rendiamo conto di essere decisamente poco adatti a simili esercizi di immaginazione.
Oggi i computer consentono di avventurarsi in esplorazioni di questo tipo: lo sforzo di programmazione non è eccessivo e, specialmente se siamo attratti dalle simmetrie che troviamo in natura e in molti manufatti, qualcosa ci dice che vale la pena provare.

ROTOGONI

Iniziamo col più semplice dei poligoni: il triangolo equilatero. La rotazione attorno a un lato genera un doppio cono (Fig. 1) con la base comune ai due coni perpendicolare all'asse di rotazione. Ripetendo la stessa operazione con gli altri due lati si ottiene un solido che chiameremo *rotogono* del triangolo. Nella vista dall'alto (Fig. 2) si nota una configurazione a trifoglio dovuta all'intersezione dei coni, mentre un punto di vista più basso (Fig. 3) consente una migliore comprensione della forma tridimensionale.

Aldo Spizzichino
Si è laureato in fisica a Bologna, dove ha poi lavorato come ricercatore presso il CNR e l'INAF (Istituto Nazionale di Astrofisica). Da alcuni anni si sta dedicando a quello che da sempre è stato un suo parallelo interesse: esplorare concetti della scienza attraverso il linguaggio dell'arte. Sue opere, frutto di una tenace programmazione al computer, sono state esposte con successo in vari Festival della Scienza e della Matematica.



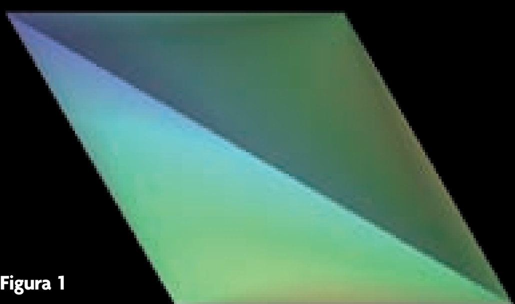


Figura 1

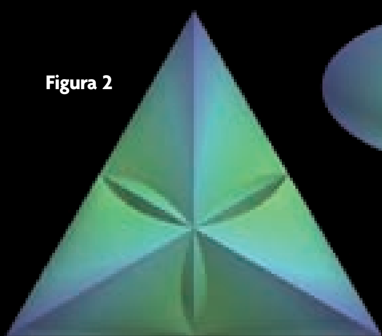


Figura 2

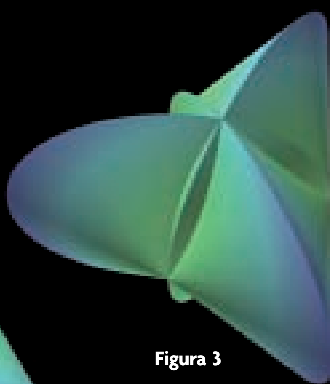


Figura 3

Procedendo in modo analogo, otteniamo il rotogono del quadrato (Fig.4): si tratta di due coppie di cilindri aventi i due assi ortogonali fra loro e raggio, altezza e distanza tra i centri di due cilindri nella stessa coppia uguali al lato del quadrato. Ovviamente dobbiamo aspettarci di trovare superfici cilindriche in tutti i rotogoni di poligoni regolari con un numero pari di lati, o, in generale, con almeno una coppia di lati paralleli. Il rotogono del pentagono (Fig. 5), invece, consiste di cinque coppie di elementi tronco-conici che si compenetrano.

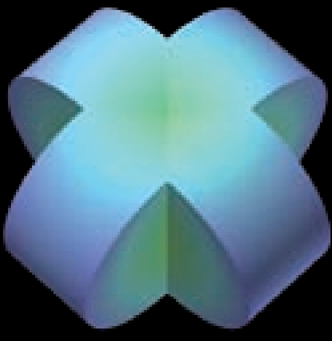


Figura 4

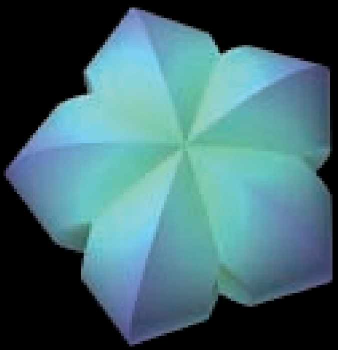


Figura 5

Si può quindi procedere a costruire i rotogoni di poligoni con un numero maggiore di lati. Prima di lasciare l'argomento, tuttavia, è interessante vedere l'aspetto che hanno queste figure se le "scoperchiamo", se, cioè, visualizziamo solo gli elementi di superficie che sono oltre una certa distanza limite dal punto di osservazione. Ciò consente di apprezzarne la ricca struttura interna, come mostrato nelle Fig. 6 e 7, relative rispettivamente a un ettagono semplice e a un ettagono intrecciato. La procedura si rivela pertanto idonea a produrre interessanti elementi decorativi.

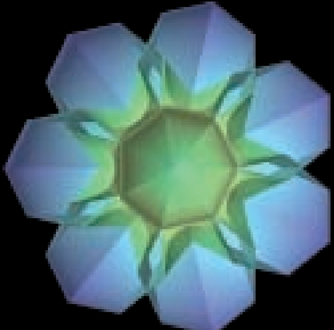


Figura 6

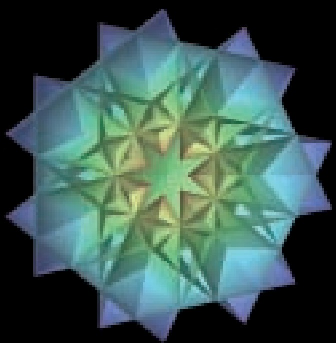


Figura 7

Naturalmente, si può estendere la nozione di rotogono includendo in essa altre rotazioni (di altri elementi e rispetto ad altri elementi di un poligono). Per esempio, oltre alle rotazioni lato-lato, potremmo considerare quelle raggio-raggio, diagonale-diagonale, ecc., nonché quelle miste lato-raggio, lato-diagonale, diagonale-raggio, e così via, in tutte le combinazioni possibili. Va sottolineato che l'effetto di una rotazione del tipo lato-raggio è diverso da quello di una rotazione raggio-lato).

Rotoedri

Se proviamo a fare qualcosa di analogo partendo da poliedri, otterremo delle superfici che possiamo chiamare *rotoedri*. In analogia ai casi descritti precedentemente, si tratta di far ruotare di un giro completo ogni spigolo rispetto a tutti gli altri, e di considerare la superficie esterna del solido che si ottiene come unione dei solidi componenti. Chiameremo quindi *rotoedri_ss* gli oggetti derivanti da rotazioni spigolo-spigolo, ovvero generate dalla rotazione degli spigoli attorno a ciascun altro spigolo.
Mentre nei rotogoni l'elemento che ruota è complanare rispetto all'asse di rotazione, nei rotoedri non è detto che questi siano complanari, pertanto il segmento rotante, oltre ad anelli cilindrici e tronco-conici, può descrivere porzioni di iperboloide a una falda. In ogni caso, dal punto di vista computazionale non vi è alcuna differenza.
I rotoedri_ss dei cinque poliedri regolari hanno l'aspetto mostrato in Figg. 8-12.

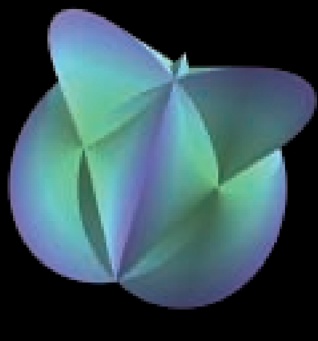


Figura 8

Figura 9

È interessante osservare la presenza di cavità derivanti dalla rotazione degli spigoli: il loro bordo esterno è un poligono sferico avente lo stesso numero di lati delle facce del poliedro duale, alla cui simmetria si conforma la configurazione nel suo complesso.

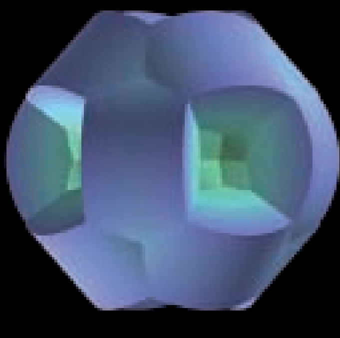


Figura 10

Figura 11

Figura 12

Un discorso analogo vale per i poliedri uniformi non regolari (tra i quali i semi-regolari, o archimedei, vedi i numeri 10 e 19 di *XlaTangente*), con la differenza che in questo caso le cavità non sono più delimitate esternamente da poligoni sferici regolari, come si può notare in Fig. 13, in cui è mostrato il rotoedro_ss di un cubottaedro.

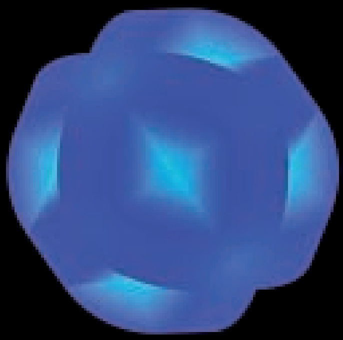


Figura 13

Nelle figure 14-17 si possono vedere altri esperimenti virtuali di questo tipo: in figura 14 il rotoedro del dodecaedro rombico, nelle figure 15 e 16 due rotoedri del cubo (i lettori sanno ricostruire che cosa è ruotato rispetto a cosa?) e nelle figure 17 e 18 due rotoedri di altri due poliedri regolari diversi dal cubo (il lettore sa ricostruire quali?).

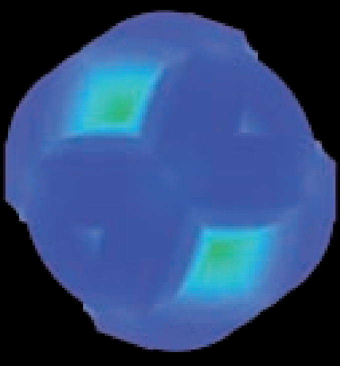


Figura 14

Figura 15

Figura 16

Figura 17

Si può anche sottolineare come le caratteristiche di simmetria delle figure ottenute dipendono da quelle di partenza. Se, per esempio, deformiamo un tetraedro, il corrispondente rotoedro_ss conserverà solo alcune delle simmetrie originarie. Il "mascherone" mostrato in Fig. 19 è stato ottenuto in questo modo.
Questa "deliberata, parziale rottura di simmetria", già ritenuta un valore estetico in alcune filosofie orientali, è assurta quasi a canone fondativo nell'arte moderna. Rilassando gradualmente le condizioni di regolarità, si può quindi passare dalla "rotoedrizzazione" di poliedri a quella di un arbitrario grafo connesso. Per questa via si possono realizzare con facilità sculture virtuali caratterizzate da complessi intrecci di volumi. In Fig. 20 è mostrato un rotoedro originato da un grafo individuato da sette punti selezionati casualmente all'interno di una sfera. Nonostante i singoli componenti di volume siano dotati di simmetria assiale, l'insieme è asimmetrico, e ciò contribuisce ad accrescere la sua apparente complessità strutturale.

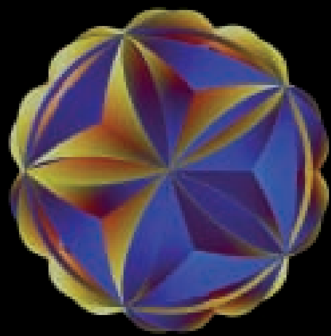


Figura 18

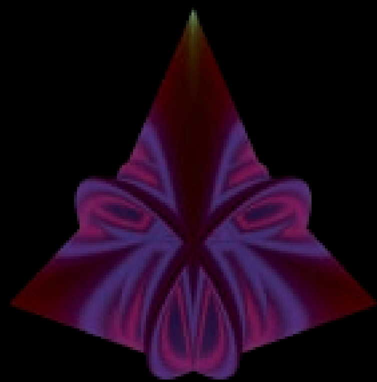


Figura 19

Figura 20

Conclusioni

Le operazioni descritte in questo articolo suggeriscono una via per generare nuove configurazioni spaziali derivate da questi "bellissimi corpi".
Convinti del valore educativo ed estetico del "gioco della figurazione" come principio generativo del pensiero astratto, vediamo in queste costruzioni un valido elemento di stimolo per riflettere sulla simmetria e sui tanti concetti ad essa collegati, attraverso la via maestra della scoperta e dell'apprendimento attivo.
Nell'era del computer, i poliedri regolari e semi-regolari, vere "gemme" dello spazio tridimensionale, dopo una storia millenaria sono così tornati ad essere una preziosa palestra per nuove interessanti sperimentazioni geometriche.

L´autore è grato a Lucio Loreto per le osservazioni critiche e i preziosi suggerimenti.