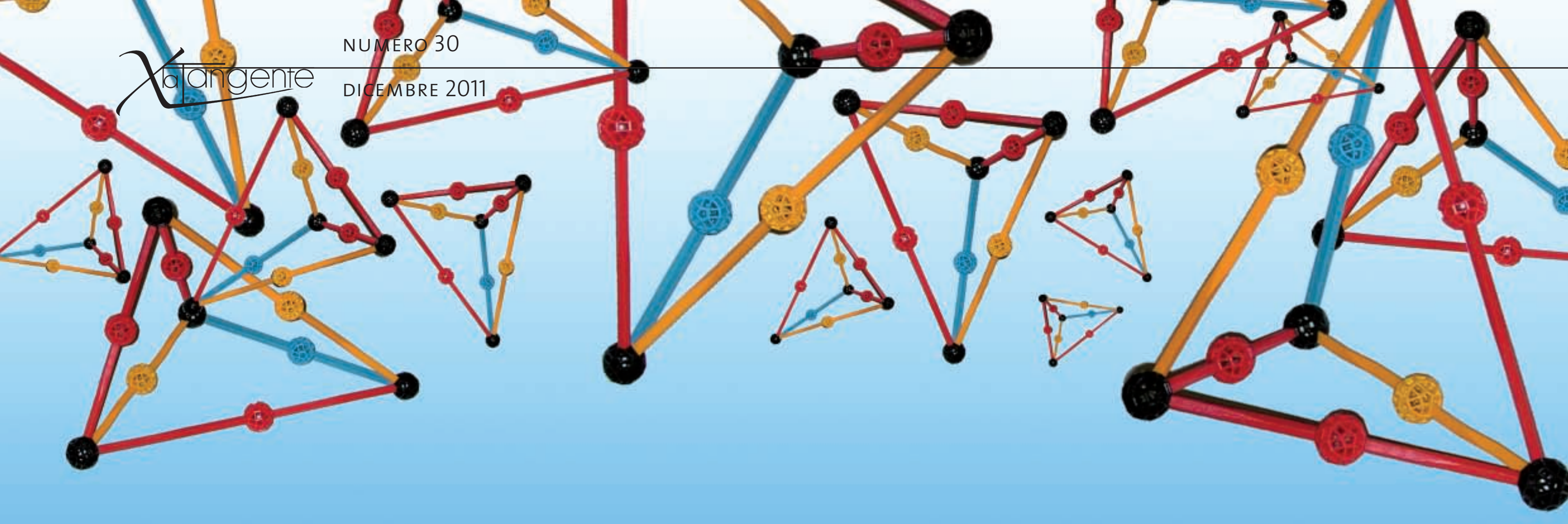


False congetture e premi Nobel: dall'informatica ai quasicristalli

di Paolo Bellingeri

Nei numeri 27 e 28 di XlaTangente *abbiamo parlato di tassellazioni, in particolare di quelle aperiodiche, dicendo – velocemente – che erano connesse ai quasicristalli, materiali sorprendenti scoperti da Dany Schechtman agli inizi degli anni Ottanta del secolo scorso... senza sapere che due mesi dopo (in ottobre) grazie ad essi avrebbe vinto il premio Nobel per la chimica!*

Perché un Nobel adesso? E perché i quasicristalli sono tanto importanti? Prima di rispondere, molto parzialmente, a queste domande, vale la pena di entrare in un modo più approfondito nel mondo matematico delle modellizzazioni dei quasicristalli: le tassellazioni aperiodiche o, più precisamente, *quasi*-periodiche.
Prima di dare delle definizioni, vale la pena precisare subito che un primo aspetto interessante delle tassellazioni aperiodiche risiede nel fatto che... i matematici non si aspettavano che esistessero!

Le simmetrie di una scacchiera

Che cos'è una tassellazione aperiodica? Fissiamo un insieme finito di figure (di piastrelle) e «supponiamo» che per ogni tipo di piastrelle sia disponibile una quantità infinita. Nei numeri 27 e 28 di *XlaTangente* abbiamo visto che se scegliamo una piastrella triangolare o quadrilaterale, possiamo sempre «tassellare» il piano infinito senza buchi né sovrapposizioni, (Figg. 1 e 2) mentre esistono dei pentagoni (ad esempio il pentagono regolare) che non possono tassellare il piano (Fig. 3).
Abbiamo visto anche che, dato un insieme di piastrelle, se ci chiediamo QUANTE sono le tassellazioni possibili con queste piastrelle, vediamo che spesso ce n'è un'infinità di differenti, dove il termine "differenti" significa che non esiste alcuna isometria del piano che permette di passare da una all'altra.
Le tassellazioni del piano che abbiamo esemplificato, come la scacchiera o l'alveare infiniti, hanno la proprietà di essere periodiche, vale a dire di essere tali che, per

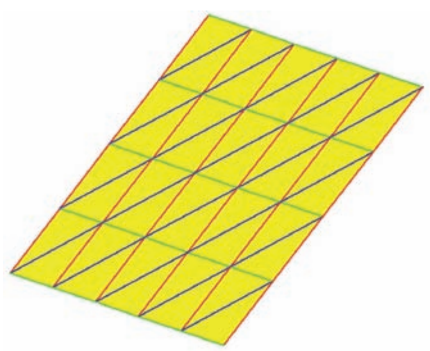


Fig. 1

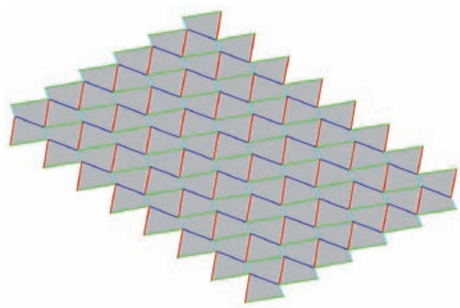


Fig. 2

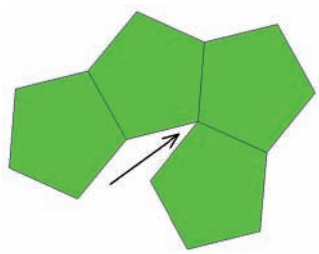


Fig. 3

ognuna, esistono due traslazioni indipendenti che la lasciano invariata. Se questa definizione non vi dice granché, limitatevi a un esempio intuitivo: immaginate di essere su una casella di una scacchiera infinita e muovetevi, ad esempio, di due caselle alla vostra sinistra: il panorama che vedete è lo stesso di prima. E se vi muovete, ancora per esempio, di tre caselle in avanti? Stessa osservazione, nulla è cambiato!

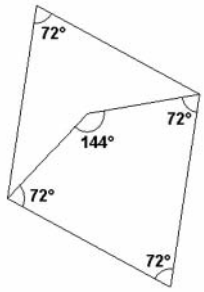
Le tassellazioni ammettono anche altre regolarità, che chiamiamo simmetrie: immaginate, questa volta, di avere nel vostro bagno un pavimento di piastrelle quadrate, blu e di uguale grandezza, e di staccare una piastrella, ruotarla di un quarto di giro e rimetterla al suo posto. Nessuno si accorgerà che qualcosa è cambiato. Diremo che la rotazione di un quarto di giro (rispetto al centro del quadrato) è una simmetria del quadrato stesso. Adesso proviamo di nuovo ad immaginare di essere su una tassellazione infinita di quadrati: se la ruotiamo di un quarto di giro attorno al centro di un quadrato ritroviamo la tassellazione di partenza. Diremo quindi che una tassellazione di quadrati ammette come simmetria una rotazione di ordine quattro, vale a dire che la tassellazione ritorna su se stessa dopo una rotazione di un quarto di giro.
Quali altre rotazioni sono ammesse da una tassellazione periodica? Proprio poche: in effetti esiste un celebre teorema (che prende spesso il nome di Lemma di restrizione cristallografica) con cui si afferma che le possibili rotazioni sono solo quelle di un sesto, un quarto, un terzo e una metà di giro, che chiameremo rispettivamente rotazioni di ordine sei, quattro, tre e due.
Cambiamo adesso il tipo di tassellazione: prendiamo una scacchiera infinita in cui una casella è nera, mentre tutte le altre sono bianche: se ci muoviamo dalla casella nera troveremo un paesaggio differente, visto che non siamo più sulla casella nera. Chiameremo una tale tassellazione *non periodica*. Tutte le tassellazioni che possiamo ottenere con quadrati neri o bianchi sono non periodiche? No, pensate a una scacchiera infinita di caselle nere e bianche: se vi muovete da una casella nera ad un altra nera adiacente, non potrete distinguere la posizione di partenza da quella di arrivo!

20.000 QUADRATI PER UNA CONGETTURA

Fino agli anni sessanta del secolo scorso i matematici credevano ("congetturavano") che non esistesse un insieme di tasselli che tassellassero il piano SOLO in modo non periodico. La congettura era basata essenzialmente sugli esempi conosciuti e su alcuni risultati parziali, ma forse anche sul fatto che la periodicità ci permette di avere un'idea di come le cose vanno "all'infinito", o meglio, ci dà una regola di ripetizione da seguire per costruire la tassellazione a partire da una configurazione di base.
Poi, negli anni sessanta, agli albori dell'informatica, fu proposto un algoritmo capace di decidere se un dato insieme di tasselli P potesse tassellare il piano: questo algoritmo, molto semplice, si basava appunto sulla congettura che esistesse almeno una tassellazione periodica tra quelle permesse dall'insieme di tasselli P.
Infine, a metà degli anni sessanta il matematico Berger trovò un insieme di tasselli quadrati, che dovevano rispettare alcune regole di accostamento, che presentavano solo delle tassellazioni aperiodiche: la congettura era quindi falsa! L'unico problema è che questo insieme era composto da... più di 20000 tasselli elementari. Questo fu il primo esempio di insieme aperiodico, vale a dire un insieme di tasselli che permettono solo delle tassellazioni non periodiche.
Per estensione spesso si chiama *tassellazione aperiodica* una tassellazione costruita a partire da un insieme aperiodico di tasselli.

PENROSE E LE TASSELLAZIONI «GONFIATE»

Dopo la scoperta di Berger, sono stati trovati nuovi insiemi aperiodici, fino ad arrivare agli insiemi di due tasselli proposti da Penrose, le freccette ed aquiloni che abbiamo scoperto nel numero 28 e che vi riproponiamo qui sotto prima di una tassellazione che li usa.



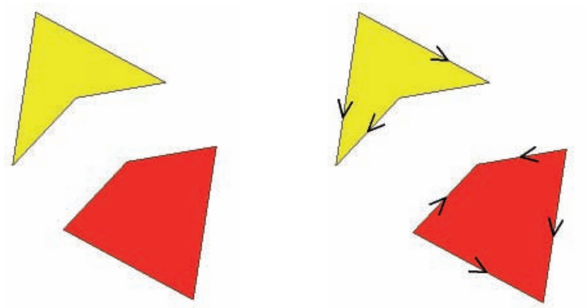
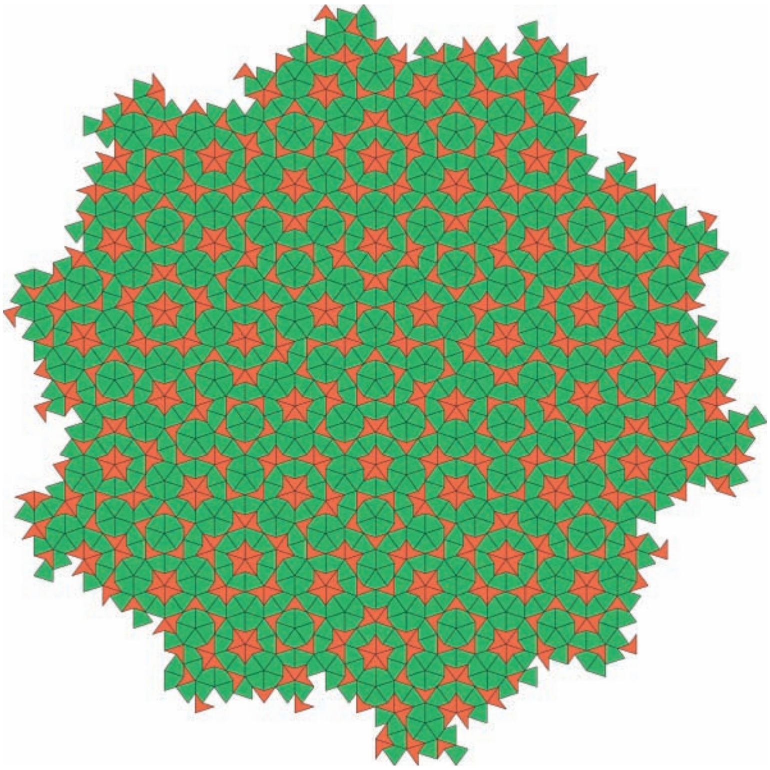


Fig. 4



Un altro esempio di tassellazione di Penrose

Spesso la tassellazione di Penrose è detta quasi-periodica, in quanto ogni configurazione (insieme di frecce e aquiloni) si ripete con una certa regolarità un'infinità di volte: ad esempio, nella porzione di tassellazione qui sopra potete notare che le stelle formate da cinque freccette o i decagoni composti da cinque aquiloni si ripetono continuamente con un'apparente "regolarità". Un altra proprietà interessante è che localmente ci sono delle configurazioni (anche molto grandi) che presentano delle simmetrie rotazionali di un quinto di giro (come ad esempio le stelle e i decagoni definiti qui sopra). Ebbene, le rotazioni di un quinto di giro sono «proibite» in una tassellazione periodica! E ancora vi sono configurazioni dello stesso tipo, ma di diversa taglia: sapete trovare delle stelle a cinque punte formate da cinque aquiloni e cinque freccette? ...e da 15 aquiloni e 10 freccette?
Questo fenomeno è una delle conseguenze del fatto che le tassellazioni di Penrose si costruiscono con un metodo chiamato di *sostituzione*. Questo metodo può essere spiegato con i quadrati: prendete un quadrato e dividetelo in quattro quadrati che in seguito "gonfiamo" per farli diventare della taglia del quadrato di partenza. Continuando «all'infinito» appare chiaro che possiamo coprire una superficie sempre più grande.
Nel caso delle tassellazioni di Penrose il processo di sostituzione, raffigurato nelle figure 5 e 6 qui sotto, ci permette di dimostrare non solo che frecce e aquiloni tassellano il piano rispettando le regole qui sopra, ma anche che in una porzione di tassellazione di frecce e aquiloni, il rapporto tra frecce e aquiloni tende al numero aureo al crescere della porzione. Ciò permette di dedurre in particolare che ogni tassellazione di Penrose è non periodica, in quanto se fosse periodica il rapporto tra frecce e aquiloni sarebbe espresso da un numero razionale mentre il numero aureo è irrazionale.

Dal piano allo spazio

Come ci sono insiemi aperiodici di mattonelle piane (tali che tutte le tassellazioni piane che si possono costruire con queste mattonelle sono non periodiche) così si possono cercare nello spazio dei tasselli che costituiscano un insieme aperiodico; cioè tali che con essi sia possibile tassellare l'intero spazio (senza sovrapposizioni e senza lasciare buchi), ma solo ottenendo una tassellazione non periodica. Un esempio è dato dalla tassellazione di Danzer dello spazio tridimensionale. In effetti, Ludwig Danzer ha ideato un insieme di quattro tessere a forma di tetraedro, con le quali si possono costruire degli analoghi tridimensionali delle frecce e degli aquiloni di Penrose.

I quasicristalli

Negli anni settanta del secolo scorso, grazie all'opera di divulgazione che Martin Gardner ne ha fatto, le tassellazioni quasi-periodiche hanno avuto una certa fama nel mondo della matematica ludica. Sembravano destinate a rimanere un argomento essenzialmente ludico, ma una nuova sorpresa era alle porte: le tassellazioni quasi-periodiche avevano delle applicazioni pratiche! Agli inizi degli anni ottanta, Dany Schechtman scoprì un cristallo formato da alluminio e manganese, che rivelava una struttura molto particolare, diversa da quella tipica dei cristalli, e che presentava delle strutture ordinate analoghe a quelle delle tassellazioni di Penrose: erano cose che si pensava fossero impossibili in natura! Materiali di questo tipo erano considerati impossibili, tanto sembravano contraddire le conoscenze in cristallografia. Lo

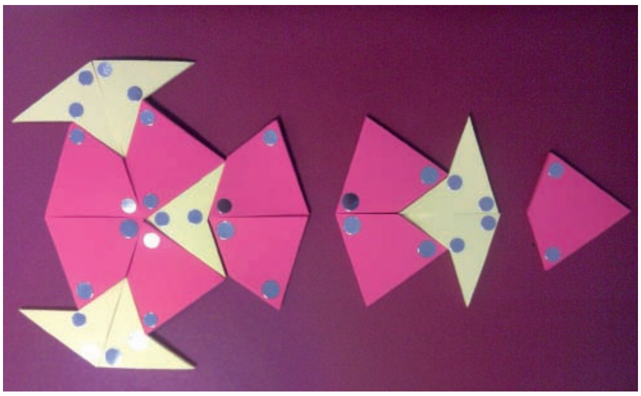


Fig. 5

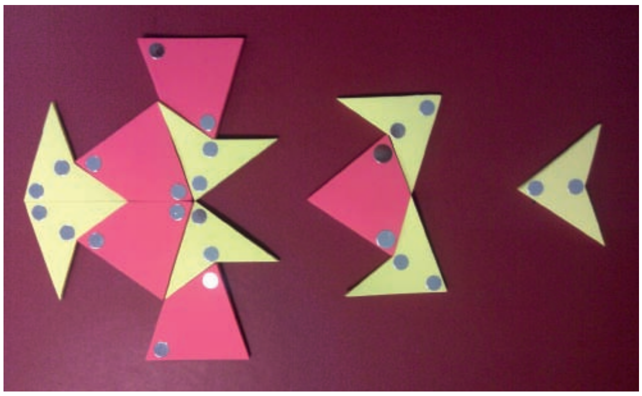


Fig. 6

stesso Schechtman propose di chiamarli «impossible crystals» o «crazycrystals». Il nome «quasicrystals» (quasicristalli) fu invece proposto da un altro scienziato, Paul J. Steihnardt che li aveva previsti, su base teorica, qualche mese prima.
La scoperta suscitò una grande sorpresa ed ebbe ricadute scientifiche e più recentemente pratiche con la produzione di materiali che hanno particolari proprietà isolanti. Probabilmente, una delle ragioni per cui il Nobel è arrivato solo adesso è che nel 2009 un gruppo di geologi (tra l'altro italiani) ha rinvenuto sul fondo del fiume russo Khatyrka il primo esempio di quasicristallo "naturale", mostrando così in maniera inequicovocabile la "naturalità" di questi materiali.

Quale avvenire?

La scoperta dei quasicristalli ha rilanciato, negli anni ottanta, l'interesse dei matematici per le tassellazioni quasiperiodiche che sono diventate un argomento di matematica "seria" e sono ormai studiate con tecniche sofisticate come la Teoria ergodica o i sistemi dinamici. Tra l'altro, le tassellazioni aperiodiche sono tornate di moda anche in informatica, nella ricostruzione di immagini: scommettiamo che queste tassellazioni non hanno finito di sorprendere gli uomini di scienza?

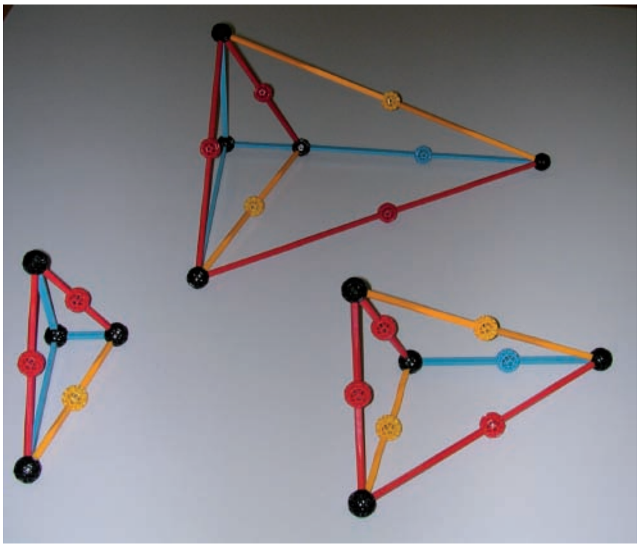


Fig. 7 Lo spazio può essere riempito con copie di questi tetraedri, ma solo in modo non periodico

Riferimenti web

Per chi fosse interessato a sapere qualcosa di più sui quasicristalli consigliamo di visitare il sito http://www.ccp14.ac.uk/ccp/web-mirrors/weber/~weber/qc.html
Ringraziamo Thierry De La Rue e Elise Janvresse dell'Università di Rouen per le immagini di tassellazioni di Penrose.

Giochi

- Sapete trovare dei decagoni formati da 10 aquiloni e cinque freccette? E da 25 aquiloni e 15 freccette?
- Probabilmente sapete che se vogliamo colorare una carta geografica qualsiasi in modo tale da non avere mai due paesi adiacenti dello stesso colore, essa può essere colorata con al più quattro colori. Poiché si può sempre vedere una tassellazione come una carta geografica, anche una tassellazione di Penrose può essere colorata con 4 colori, in modo che due tasselli con un lato in comune non abbiano lo stesso colore.
Nel 2002, William Paulsen ha dimostrato che bastano 3 colori per colorare le tassellazioni di Penrose.
Voi sapete mostrare che la porzione di tassellazione qui sotto non è colorabile con solo 2 colori? E sapete colorarla con 3 colori?

Fig. 9