

# La bellezza dei frattali

di ALESSANDRO CATTANEO, FILIPPO FAVALE e RICCARDO MOSCHETTI

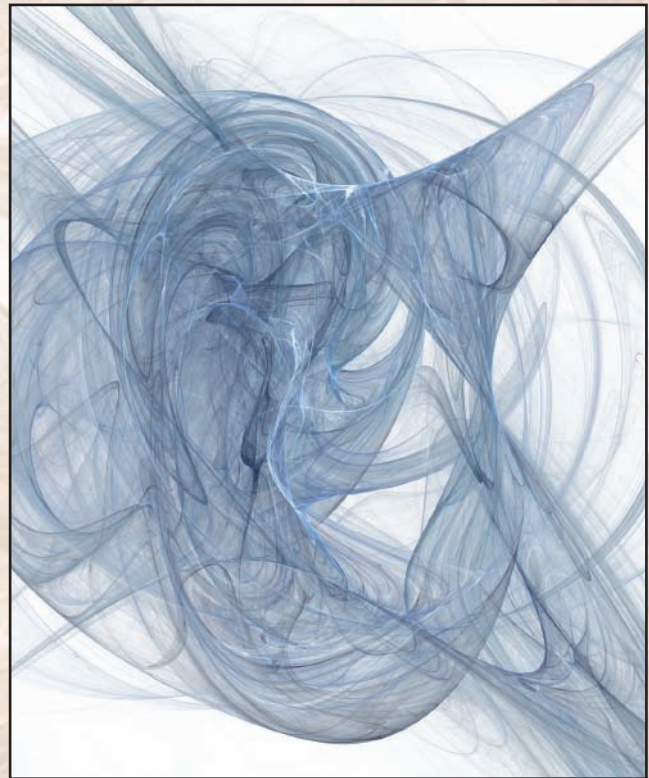
*È passato ormai qualche mese dalla fine del Festival della Scienza di Genova, ed è giunto il momento di fare un bilancio dell'esperienza che abbiamo vissuto all'inizio dello scorso novembre*

Cominciamo noi che ci siamo occupati, insieme a Cesco Reale, di costruire l'esposizione sia sul piano dei contenuti da proporre, sia su quello dei modi con cui raccontarli. Poi, a p. 16, Ottavia Rotunno, uno degli animatori che hanno seguito tutta l'avventura a Genova, dirà la sua da un punto di vista del tutto differente.

All'inizio, "Frattali" era soltanto la parola su cui avevamo deciso di imbastire la trama iniziale che si sarebbe dovuta sviluppare; poi, non appena ci siamo chiesti come presentarla al pubblico, questa parola è diventata la fonte di tutti i nostri problemi. Ad esempio, la definizione sulla base della autosimilarità, proprietà molto comune tra i frattali, racchiude molti tranelli, visto che si applica, fra l'altro, anche alle rette. Ci siamo così trovati di fronte a un bivio: decidiamo che i frattali sono "figure autosimili" e quindi accettiamo che anche le rette siano frattali, oppure proviamo a scegliere un'altra definizione? Abbiamo deciso di farci ispirare da questa domanda e di provare a raccontare la storia che ha portato alla definizione di frattale utilizzata al giorno d'oggi (o meglio, a una versione molto simile ma un po' più semplice da enunciare), concentrandoci sul fatto che le definizioni spesso non fanno proprio quello che noi desideriamo. Parallelamente a questo problema di definizioni, volevamo anche descrivere degli esempi di frattali. Con gli strumenti informatici giusti è relativamente facile produrre immagini che approssimano molto bene oggetti frattali, ma passare da una bella immagine a una bella spiegazione non è altrettanto semplice.

Abbiamo tentato di portare avanti in parallelo tutte e due le questioni che ci incuriosivano, usando le immagini per migliorare la comprensione degli aspetti più teorici. L'aiuto che ci hanno fornito gli animatori è stato fondamentale su questo fronte: facendo da ponte tra programmi, pannelli, opere d'arte e visitatori, hanno spesso dato un'impostazione personalizzata alla comunicazione e hanno saputo catturare l'attenzione dei visitatori più diversi per età e per formazione.

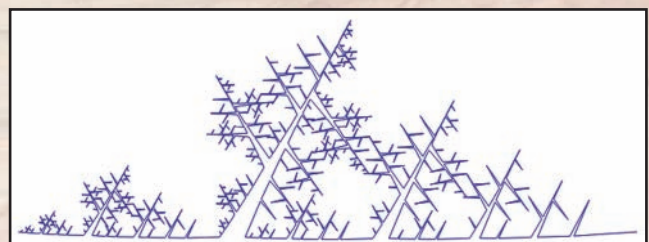
Entrando nella sala dell'esposizione, i visitatori venivano subito messi di fronte alla domanda: "Che cosa sono i frattali?". Alcuni di loro avevano già sentito alcune definizioni di frattale, spesso anche diverse tra di loro, ma la più gettonata, quella che più spesso ci veniva riferita, era proprio quella di frattale come di "figura autosimile", il che ci permetteva di chiedere subito che cosa fosse una figura autosimile. La definizione recita così: "Una figura è autosimile



Immagini di A. Cattaneo, F. Favale e R. Moschetti

quando si può scrivere come unione di copie di se stessa rimpicciolite".

Che cosa c'è di sbagliato nel definire frattale ciò che è auto-simile? Nulla, eppure... Pensate a un segmento e a una sua parte qualunque: la parte è solo una copia più piccola del segmento e contiene a sua volta altre copie più piccole del segmento. D'altra parte, tutte le figure che "a occhio" vorremmo chiamare "frattali" sono molto diverse da un segmento e hanno tutte un tratto distintivo in comune: sono molto frastagliate.



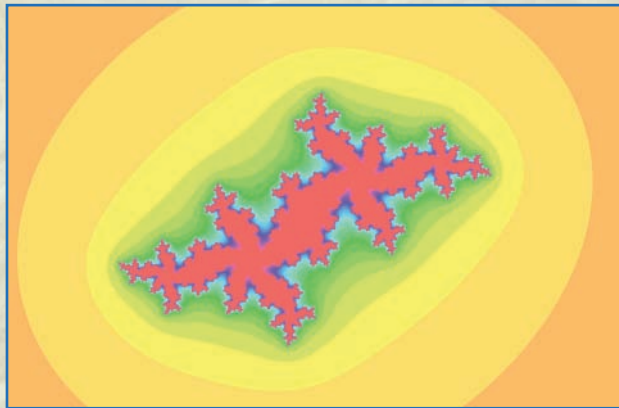
È possibile trovare una definizione di frattale che si avvicini maggiormente a questa idea intuitiva che abbiamo in mente?



## Colorazioni

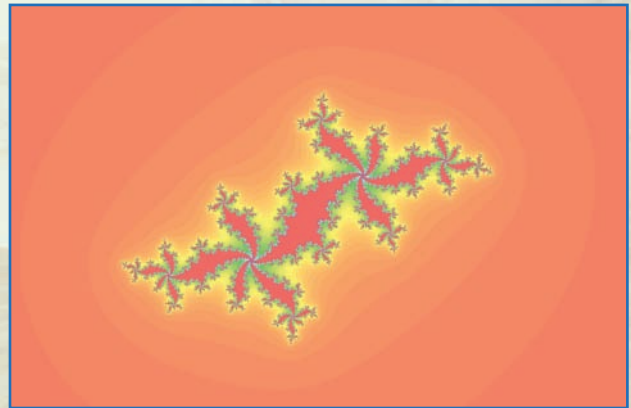
Ricordate la definizione di *insieme di Julia*? È il bordo dell'insieme di tutti quei numeri complessi, dati iniziali del sistema dinamico complesso con dinamica  $f(z) = z^2 + c$ , le cui traiettorie sono limitate.

Vediamo in breve come passare dal sistema dinamico alle immagini variopinte che si usano spesso quando si parla dell'insieme di Julia. Bisogna premettere che ci sono centinaia di modi diversi per colorare il piano evidenziando un insieme di Julia. Colorare il piano significa associare a ogni suo punto una gradazione di colore. Non preoccupiamoci per ora di come si fa a passare da un piano colorato (composto da un numero infinito di punti) a un'immagine stampata (composta da un numero finito di *pixel*). Facciamo un passo intermedio prima di passare alle immagini colorate. Sicuramente possiamo decidere di colorare un punto del piano di bianco se la successione da esso generata diverge, e di



nero se non diverge. Otterremo così una macchia nera che ha come bordo l'insieme di Julia. Cerchiamo di vedere questa operazione in un altro modo: a un punto del piano assegniamo il numero 1 se la successione da esso generata diverge, assegniamo il numero 0 se ciò non accade. In un secondo momento assegneremo a ciascun numero un colore. Perché questa complicazione, direte voi?

Semplicemente perché lavorando con dei punti è più facile ottenere dei numeri e preoccuparsi dopo di come passare ai colori. Vi proponiamo ora un esempio di co-



lorazione. Per non complicarci troppo la vita, coloreremo solamente i punti del piano che... divergono, lasciando tutto l'insieme dei punti che non divergono colorato con la stessa tonalità.

Fissiamo un numero a nostro piacimento, per esempio 37, e fissiamo nella nostra mente una circonferenza di centro l'origine con raggio uguale al numero che abbiamo scelto, cioè 37. Ora prendiamo un punto del piano e guardiamo che cosa succede ai punti della successione da esso generata. Se questo punto sta fuori dalla circonferenza fissata (cioè se la sua distanza dall'origine è maggiore di 37) gli assegniamo il numero 0. Se il punto sta dentro la circonferenza, ma dopo un'iterazione sta fuori, gli assegniamo il numero 1. Se impiega 2 iterazioni per uscire, gli assoceremo il numero 2, se ne impiega 3 il numero 3 e così via. Osserviamo che, prima o poi, tutti i punti che divergono avranno assegnato un numero.

Se, invece, la successione generata da un punto non diverge, al punto assegniamo il numero -1.

Abbiamo così assegnato ai punti un numero dell'insieme  $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ . Ora non ci resta che scegliere una regola per associare a questi numeri un colore e il gioco è fatto. Ovviamente, facendo i conti al computer non si prosegue all'infinito, ma ci si ferma dopo un certo numero, oltre il quale non si riescono più a distinguere i punti che non divergono da quelli che divergono molto lentamente.

Riuscite a immaginare che cosa succede scegliendo un altro numero invece di 37?

Prima di provare a rispondere a questa domanda, occorre "fare conoscenza" con alcuni tipi di figure che sono accomunate, appunto, dall'essere estremamente frastagliate. Nella mostra di Genova, lo strumento principale utilizzato per "interagire" con i frattali era costituito da alcune isole multimediali realizzate per l'occasione, che utilizzavano il supporto di una LIM (lavagna interattiva multimediale). I frattali con cui i visitatori hanno potuto confrontarsi sono gli *insiemi di Julia*, l'insieme di Mandelbrot (cfr. *XlaTangente* n. 36) e i *sistemi di funzioni iterate*.

Tramite i sistemi di funzioni iterate (di cui torneremo a parlare in uno dei prossimi numeri) possiamo realizzare oggetti che sono composti da uno o più insiemi autosimili seguendo delle semplicissime regole. Basta decidere una configurazione iniziale formata da uno o più segmenti e una re-

gola di sostituzione, che in genere prevede che una linea spezzata (ma, più in generale, una qualsiasi figura composta di segmenti) vada a sostituirsi a ogni segmento della figura. Poi si applica la regola di sostituzione a ogni segmento: quella che si ottiene è una figura fatta da segmenti, quindi le si può applicare la stessa procedura ancora e ancora... all'infinito!

Che cosa succede, ad esempio, se partiamo da un segmento e scegliamo come regola di sostituzione quella in figura?





Si ottiene la famosa *curva di Koch*, che è solo uno dei tanti frattali che si possono realizzare in tale maniera!

Il fattore comune a tutte le definizioni di frattale è quello di voler catturare un'idea di complessità. Seguendo questo suggerimento, abbiamo scelto di chiamare frattali tutti quegli insiemi per i quali un certo numero, che abbiamo chiamato *dimensione sferica*, non è intero. Per calcolare la dimensione sferica di una figura piana dobbiamo fare i seguenti passaggi:

- 1) scegliamo un numero  $r$  positivo;
- 2) copriamo la figura con dei dischetti di raggio  $r$  e cerchiamo di farlo con il minor numero possibile di dischi. Chiamiamo questo numero  $n(r)$ ;
- 3) ripetiamo i passaggi che abbiamo fatto nei punti 1 e 2 variando il numero  $r$  e facendolo diventare arbitrariamente piccolo e vediamo a che numero si avvicina il valore  $\ln(n(r))/\ln(1/r)$ . Questo numero sarà proprio la dimensione sferica.

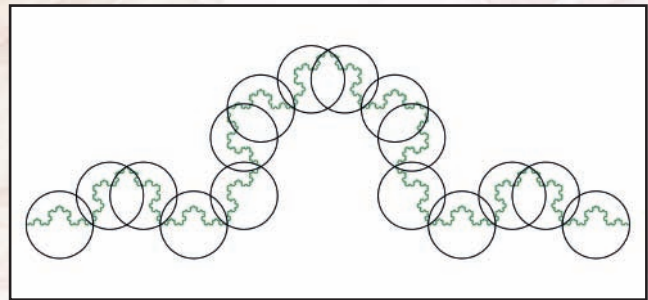
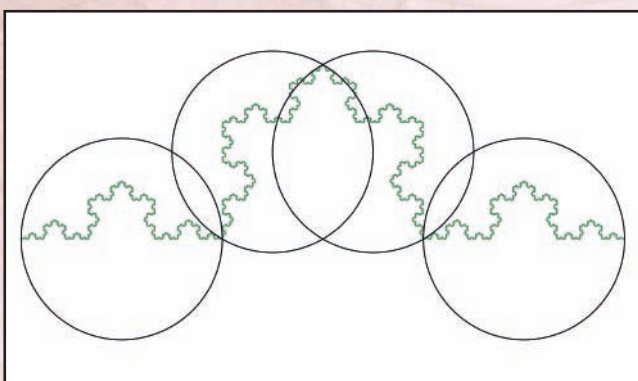
Che cosa si nasconde dietro a questa "complessa" definizione? L'idea è che la dimensione sferica misura, in qualche modo, il "grado di frastagliatura". Per capire meglio che cosa intendiamo, partiamo ancora una volta da un esempio semplice, il solito segmento. Prendiamolo, per comodità di conto, lungo 2 e cerchiamo di ricoprirlo con dischetti di raggio 1. Quanti ne serviranno? Uno solo. Se ora prendiamo, per esempio, dischetti di raggio  $r = \frac{1}{2}$ , cioè  $\frac{1}{r} = 2$  ci accorgeremo che  $n(r) = 2$ , eccetera.

Facendo diventare il raggio  $r$  arbitrariamente piccolo,  $n(r)$  si comporta come  $\frac{1}{r}$  quindi il rapporto tra i logaritmi vale 1. Prendiamo ora un quadrato (di lato 2) e applichiamo lo stesso procedimento: per ricoprirlo occorre un solo disco di raggio 1, oppure occorrono 4 dischi di raggio  $\frac{1}{2}$ , oppure, ancora, 9 dischi di raggio  $\frac{1}{3}$  e così via, con il numero di dischi che si comporta come il quadrato dell'inverso del raggio. Facendo i conti, otteniamo che il numero dato dalla formula precedente è 2 (il quadrato è la seconda potenza!). Analogamente per un cubo otterremmo 3 e per un ipercubo 4!

Che cosa succede se invece di segmenti e quadrati consideriamo qualcosa di più "complicato", come la curva di Koch?

Il rapporto che otteniamo è  $\ln(4)/\ln(3)$ , che è un numero non intero. Ma attenzione! Nemmeno questa definizione è esente da problemi!

Uno degli aspetti principali, che contribuisce in modo fondamentale a rendere i frattali "belli" anche per un



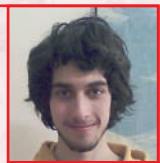
pubblico di non matematici, è senza dubbio l'arte frattale, ovvero l'utilizzo di forme frattali, complesse e frastagliate, per creare composizioni di alto valore artistico. La mostra è stata così corredata e impreziosita da un set di 30 stampe ad alta definizione di artisti provenienti da tutto il mondo.

Ma l'arte non è tutto! Un'altra possibile applicazione di due proprietà particolari dei frattali, l'autosimilarità e la possibilità di riempire lo spazio, vengono sfruttate a fondo in quelle che si chiamano "antenne frattali". Queste antenne, grazie alla ripetizione delle forme su un numero (finito!) di scale diverse, possono ricevere contemporaneamente più bande di frequenza, dando modo, fra l'altro, di utilizzare uno stesso corpo ricevente per i segnali GSM, GPS e Wi-Fi. Inoltre, grazie alla capacità di riempire lo spazio, propria dei frattali cui esse si ispirano, è possibile, con poco sforzo, massimizzare la quantità di materiale ricevitore nello spazio sempre più piccolo dei dispositivi elettronici di uso comune.

Con questo avete letto un breve riassunto di quello che era, dal punto di vista dei contenuti, la mostra. Come abbiamo già detto, è tutta un'altra cosa vederla guidati dagli animatori. Riprendendo l'osservazione fatta all'inizio, avere l'opportunità di discutere con una persona di quello che interessa rimane il modo migliore per scoprire un argomento come quello dei frattali – molto vivo per certi aspetti e molto teorico per altri, ma per questo non meno interessante.

**Riccardo Moschetti**

È dottorando in Matematica presso l'Università degli Studi di Pavia. Collabora con il Centro *matematita* e si occupa della parte interattiva dell'Officina di XlaTangente.  
rmoschetti@gmail.com



**Alessandro Cattaneo**

Iscritto al corso di laurea Magistrale in Matematica all'Università degli Studi di Milano, collabora dal 2008 con il Centro *matematita* e si occupa della parte interattiva dell'Officina di XlaTangente.  
ale.cattaneo@hotmail.com



**Filippo Favale**

Si è laureato in Matematica all'Università degli Studi di Milano, ambiente che gli ha permesso di conoscere il Centro *matematita* con il quale tutt'ora collabora. Attualmente è dottorando in Matematica e Statistica presso l'Università degli Studi di Pavia.

