Gnash, un toro piatto!

Sessant'anni dopo, finalmente sui vostri schermi l'exploit di un millantatore di genio...

di VINCENT BORRELLI

In queste pagine vi proponiamo l'articolo di Vincent Borrelli tratto dal sito images des Maths *(http://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html#nb1) e tradotto da Giovanna Roda nell'ambito del "Translation Project" sul sito www.mathematics-in-europe.eu, il sito realizzato dalla Commissione della Società Matematica Europea che si occupa di divulgazione*

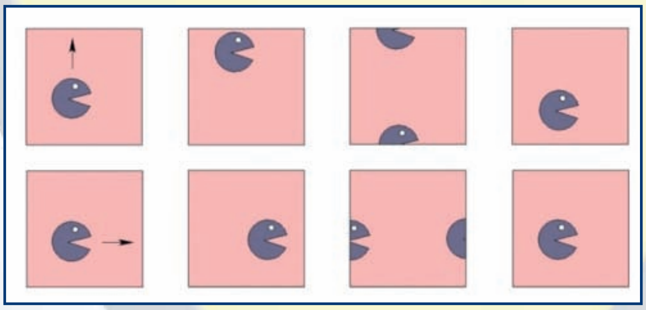
"Nash, se sei così bravo, perché non risolvi il problema dell'immersione isometrica delle varietà riemanniane?" [1]
Colui che osa sfidare il futuro premio Nobel per l'Economia [2] non è altro che il suo vicino di ufficio, Warren Ambrose. Siamo nel 1953, nel laboratorio di matematica del MIT e Ambrose, esasperato dagli sproloqui incessanti di John Nash – che ha soprannominato "Gnash" [3] – è determinato a dare una lezione di modestia a questo matematico giovane e impetuoso. Al di là dei termini tecnici, il problema che gli ha proposto ha una reputazione tale da scoraggiare i più temerari. Resiste infatti agli assalti dei migliori matematici sin dalla sua formulazione, vale a dire, grosso modo, dal momento in cui il grande Riemann, nella sua tesi per l'abilitazione all'insegnamento universitario del 1854, trasformò completamente la geometria immaginando quella che oggi gli specialisti chiamano *geometria riemanniana*. Ma Nash ha dei dubbi e vorrebbe inoltre convincersi che la questione è all'altezza delle sue ambizioni. Per persuadersene annuncia di aver risolto il problema, osserva l'effetto prodotto sui matematici e si mette al lavoro...

Lo schermo-prigione

Un esempio, uno solo, è sufficiente a mostrare l'incredibile difficoltà della sfida lanciata da Ambrose a Nash: il toro piatto quadrato. Chiunque si dedichi ai giochi al computer avrà notato che, in alcuni di essi, personaggi che pur sono liberi nel movimento rimangono nondimeno prigionieri dello schermo. Se escono dalla parte superiore, riappaiono in basso. Allo stesso modo, se escono a destra ritornano da sinistra ecc.
Allora, qual è la forma della strana prigione che di fatto intrappola i personaggi informatici? Per averne un'idea, dobbiamo consentire la distorsione dello schermo del computer nella terza dimensione, in modo da realizzare

Mathematics in Europe, **il sito realizzato dalla Commissione RPA (*Raising Public Awareness*) della European Mathematical Society, ha iniziato quest'anno un progetto di traduzioni, il "Translation Project", che coinvolge alcuni siti e alcune riviste di comunicazione della matematica, tra cui *IMAGINARY* (recensito anche sul sito di *XlaTangente*), la spagnola *Divulgamat* (vedi *XlaTangente* n. 32), la francese *images des Maths*, l'inglese *Plus Magazine* e... last, but not least, *XlaTangente*.**
Il progetto ha tre obiettivi principali: creare un *network* di operatori nel settore della comunicazione della matematica, tradurre articoli selezionati pubblicati dalle riviste coinvolte e mettere queste traduzioni a disposizione dei lettori in vari Paesi.

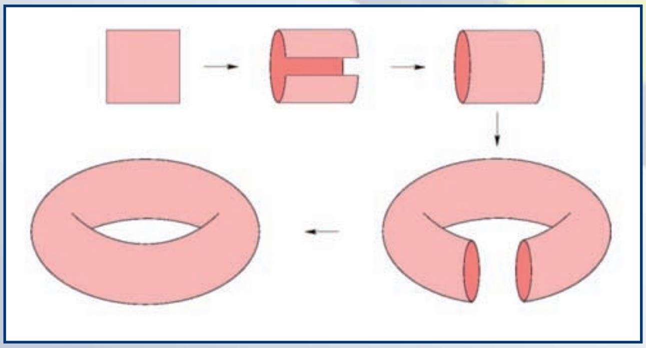
Immagine di V. Borrelli



Una successione di posizioni assunte da un essere bi-dimensionale in un quadrato piatto

concretamente le suture necessarie per la continuità del movimento. Il pavimento deve essere connesso al soffitto e la parete sinistra va unita alla parete destra. Al prezzo di una distorsione non indifferente del quadrato che simboleggia lo schermo nella figura sottostante, l'architettura complessiva improvvisamente emerge: è quella di una ciambella! I personaggi dei giochi al computer, costretti a muoversi su questa superficie, non hanno dunque alcuno scampo.

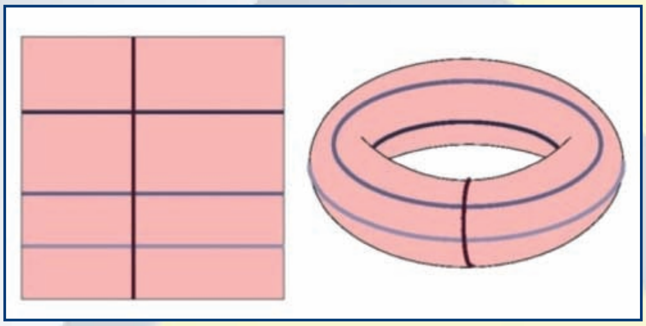
Immagine di V. Borrelli



Un'immersione di un toro piatto quadrato. L'oggetto risultante nello spazio tridimensionale è un toro

In matematica, lo schermo del computer, quando imprigiona in questo modo i personaggi, è chiamato toro piatto quadrato; la superficie della ciambella, che è il toro quadrato (non più piatto) nello spazio tridimensionale, prende poi il nome di *toro di rivoluzione*. Questa superficie rappresenta il mondo in cui i personaggi del computer vivono: cattura immediatamente la struttura invisibile dello schermo-prigione, soffrendo però di un grave difetto, che la allontana irrimediabilmente dal mondo piatto dello schermo del computer: questa superficie distorce le distanze. Per esempio, le orizzontali sul toro piatto hanno tutte la stessa lunghezza, mentre le corrispondenti latitudini sul toro di rivoluzione hanno lunghezze diverse. Il toro non dà un quadro reale del toro piatto quadrato, inganna sulle distanze.

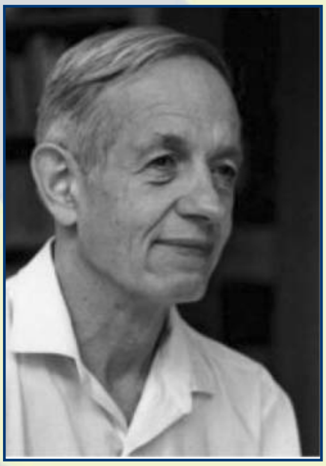
Immagine di V. Borrelli



Verticale e orizzontale non mantengono la loro lunghezza sul toro

Possiamo correggere questo difetto, ossia trovare una superficie che rappresenti il toro piatto quadrato senza distorcere le lunghezze? Ciò sembra estremamente problematico se non impossibile... eppure questo problema è una variante molto particolare della sfida di Ambrose. Sapendo che il toro piatto quadrato è un esempio di quello che gli esperti chiamano *varietà riemanniana*, e che questi stessi specialisti definiscono *immersione isometrica* una rappresentazione che rispetti le lunghezze, una versione certamente indebolita, ma tuttavia ancora incredibilmente difficile della sfida di Ambrose si potrebbe formulare nel modo seguente: "Nash, se sei così bravo, cerca di rappresentare un toro quadrato piatto senza distorcere le lunghezze!".

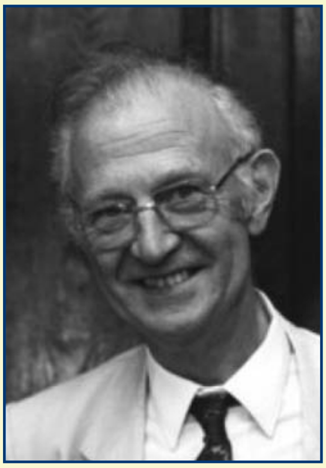
L'*EXPLOIT* DI UNO SPACCONE DI GENIO



Oberwolfach Photo Collection

John Nash

E Nash è... "così bravo" e non solo, è straordinariamente brillante! Immaginando un approccio e tecniche completamente nuove, non solo risolve in pochi anni il problema delle immersioni isometriche, ma riesce anche a sconvolgere completamente le certezze che i matematici si sono forgiati in materia. Così scriveva nel 1994 Mikhail Gromov, egli stesso considerato uno dei più grandi matematici contemporanei: "Molti di noi hanno la capacità di sviluppare idee. Seguiamo i cammini tracciati dagli altri. Ma quasi nessuno tra noi potrebbe produrre qualcosa di simile a ciò che Nash ha prodotto [...]. Ha completamente cambiato le prospettive [...]". [4]



Oberwolfach Photo Collection

Nicolaas Kuiper

Ciò che Nash scopre è del tutto stupefacente: benché l'intuizione sembri dettare altrimenti, di immersioni isometriche ce ne sono in sovrabbondanza, sono incredibilmente numerose. Se noi non le vediamo, se passiamo sistematicamente accanto a loro senza notarle, è semplicemente perché la nostra intuizione è troppo saggia, troppo educata per immaginare la loro presenza. Questo è particolarmente vero per il toro piatto quadrato. Nicolaas Kuiper mostra, sulla scia del lavoro di Nash, che possiamo effettivamente rappresentarlo in infiniti modi diversi senza distorcere le lunghezze!

Ma, come annunciato, queste rappresentazioni non sono né "sagge" né "civili": esse non possono sviluppare forme morbide e lisce come la superficie-ciambella incontrata in precedenza, a causa delle loro proprietà geometriche. In effetti, lo stesso aspetto di queste rappresentazioni lancia una sfida all'immaginazione. I matematici hanno mostrato che questo aspetto dovrebbe essere a un tempo grinzoso e liscio; un ossimoro diabolico in cui la mente si perde irrimediabilmente.

Un altro cervello d'eccezione

Un metodo infallibile per capire l'aspetto paradossale di queste rappresentazioni sarebbe semplicemente vederle, eventualmente usando un computer nel caso in cui i calcoli dovessero rivelarsi troppo complessi o troppo lunghi. Ma ahimè, se Nash e Kuiper rivelano in effetti la presenza di una vera e propria armata di immersioni isometriche, la loro dimostrazione matematica non permette una facile manipolazione di questi oggetti e, in particolare, non si presta assolutamente a una visualizzazione. Siamo quindi di fronte a una situazione molto frustrante: sappiamo che ci sono un numero infinito di rappresentazioni che rispettano le lunghezze del toro piatto quadrato, ma non siamo in grado di disegnarne neanche una!

Mikhail Gromov

Oberwolfach Photo Collection

Una bella mente [5] fa progredire la situazione: Mikhail Gromov. Negli anni 70-80 del '900, questo matematico inventa una tecnica, l'*integrazione convessa*, che sistematizza e generalizza in maniera vertiginosa il processo di costruzione di immersioni isometriche. Oltre a una generalizzazione, questa tecnica offre anche una nuova prospettiva sul lavoro di Nash e Kuiper, rendendolo immediatamente comprensibile. Questa tecnica mostra infatti che un unico motore aziona l'intero meccanismo di produzione di immersioni isometriche. La costruzione non è diventata più facile, ma almeno ora possiamo investigarla globalmente, comprenderla più intimamente. Una barriera psicologica è stata spezzata: diventa possibile approcciare il macchinario di Nash e Kuiper che aveva finora intimidito i matematici. Parallelamente, si scopre che, modificando leggermente tale macchinario, si possono ottenere altre superfici dalle proprietà sorprendenti, ad esempio quelle che intervengono nel famoso rovesciamento della sfera scoperta da Stephen Smale nel 1958. In breve, la tecnica dell'integrazione convessa si dimostra allo stesso tempo brillante e unificatrice.

Vedere per credere!

Tra i numerosi vantaggi di questo metodo ve ne è uno che stranamente è passato inosservato: il suo carattere algoritmico. Eppure, questo vantaggio ha aperto la strada alla visualizzazione di immersioni isometriche in quanto permette l'implementazione dell'integrazione convessa. Assieme a tre colleghi [6] abbiamo deciso di realizzare questa implementazione al fine di ottenere le prime immagini di un'immersione isometrica del toro piatto quadrato e, naturalmente, capire l'enigmatica geometria allo stesso tempo corrugata e liscia.

Il toro prima e dopo le ondulazioni

Immagine di V. Borrelli, S. Jabrane F. Lazarus, D. Rohmer, B. Thibert

Il programma che abbiamo realizzato genera una sequenza di immersioni del toro quadrato piatto che si avvicinano a un'immersione isometrica a mano a mano che si va verso il limite. Questa sequenza inizia con un'immersione *corta*, vale a dire un incorporamento del toro piatto quadrato in uno spazio tridimensionale che accorcia tutte le lunghezze. Questa immersione è poi deformata da una serie infinita di increspature. Esse, chiamate *corrugazioni*, hanno l'effetto di allungare gradualmente le lunghezze in diverse direzioni, fino a chiudere completamente il divario con la situazione isometrica.

L'accumulazione di corrugazioni

Immagine di V. Borrelli, S. Jabrane F. Lazarus, D. Rohmer, B. Thibert

Le ondulazioni sono impilate l'una sopra all'altra con ampiezze sempre più piccole e frequenze sempre più elevate, tutte calcolate per ridurre l'inesorabile difetto isometrico. Il processo continua così indefinitamente e, portato al limite, costruisce un'immersione isometrica del toro piatto quadrato. Naturalmente, il programma non può che eseguire un numero finito di istruzioni. Noi ci siamo fermati dopo quattro iterazioni. In effetti, alla quinta ondata di corrugazioni, l'ampiezza delle oscillazioni è così piccola da essere invisibile a occhio nudo. In questo senso l'immagine qui sotto, ottenuta dopo quattro iterazioni, rappresenta a tutti gli effetti un'immersione isometrica del toro piatto quadrato. Essa mostra come una superficie possa essere resa grumosa dall'accumulo di corrugazioni pur mantenendo un aspetto liscio grazie alla rapida diminuzione delle ampiezze di queste corrugazioni.

Un'immersione isometrica del toro quadrato piatto (due punti di vista, dall'esterno e dall'interno)

Immagine di V. Borrelli, S. Jabrane F. Lazarus, D. Rohmer, B. Thibert

L'aspetto generale ricorda un frattale, vale a dire un oggetto che in qualche senso si può ritenere infinitamente fratturato qualunque sia la scala alla quale lo si osserva, tenendo presente che qui le fratture sono sostituite da ondulazioni. Infatti, ovunque si posi lo sguardo, l'immersione isometrica appare infinitamente ondulata e non emerge nessun picco o crinale. Abbiamo deciso di chiamare un tale oggetto geometrico, a metà strada tra frattali e superfici lisce ordinarie, *frattale C1*. Il simbolo C1 è una notazione matematica che indica il grado di levigatezza della immersione isometrica. Informalmente, si è tentati di forgiare un nuovo ossimoro: il frattale liscio. Ciò non ha più nulla di diabolico, questa volta, perché risolve l'apparente contraddizione tra il grumoso e il liscio. Poiché l'immersione è isometrica, ciò significa in particolare che le curve corrispondenti alle linee verticali ed orizzontali del toro piatto quadrato hanno la stessa lunghezza. L'illustrazione seguente mostra come un meridiano e un parallelo del toro di rivoluzione siano stati "corrugati" per ottenere la stessa lunghezza: il meridiano è molto più corto rispetto al parallelo, è stato sottoposto a ondulazioni di maggiore ampiezza. Allo stesso modo, i cerchi rossi e blu sono stati mandati su curve corrugate di uguale lunghezza.

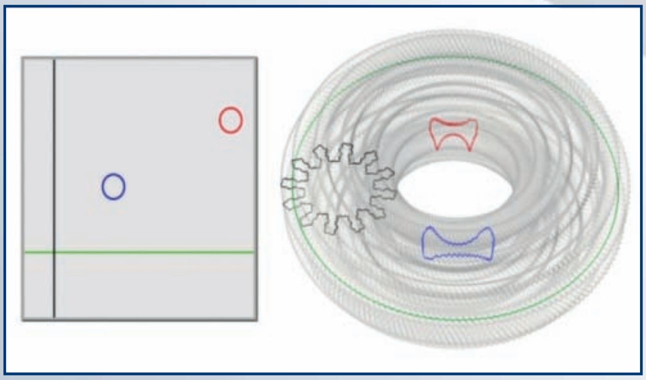


Immagine dell'immersione isometrica di un'orizzontale, di una verticale e di due cerchi dello stesso raggio

E poi?

Il metodo usato per costruire un'immersione isometrica del toro piatto quadrato permette di produrre ben altro. È sufficiente deformare il toro di partenza, e poi applicare il processo infinito di corrugazione. Il metodo di integrazione convessa fornisce quindi una nuova immersione isometrica del toro quadrato piatto, il cui aspetto generale ricorda (da lontano!) il toro di partenza. In realtà, il metodo di costruzione utilizzato offre una grande flessibilità e noi pensiamo, in un prossimo futuro, di applicarlo per visualizzare altre superfici paradossali, ad esempio per rappresentare quelle che vengono talvolta chiamate *sfere di Nash-Kuiper*. Si tratta di superfici ottenute deformando una sfera di raggio 1 isometricamente – ossia senza modificare la lunghezza delle curve tracciate su di essa – e che possono stare all'interno di altre sfere di raggio più piccolo. Queste sfere di Nash-Kuiper non sono mai state visualizzate, ma ora potrebbero esserlo con un adattamento dell'algoritmo a questo caso particolare. Altri oggetti attendono ugualmente una visualizzazione, come ad esempio le immersioni isometriche dello spazio iperbolico o certe altre superfici a curvatura costante negativa [7]. Queste visualizzazioni appariranno certamente come strutture frattali lisce perché questa geometria è naturalmente generata dall'integrazione convessa. Una questione interessante è la presenza di queste strutture, al di là della matematica, in alcuni fenomeni naturali [8].

Nonostante la fama di essere ai vertici dell'astrazione, la teoria dell'integrazione convessa fornisce un modo effettivo per risolvere numericamente un certo numero di problemi matematici. Non abbiamo alcun dubbio che possa ispirare altre applicazioni.

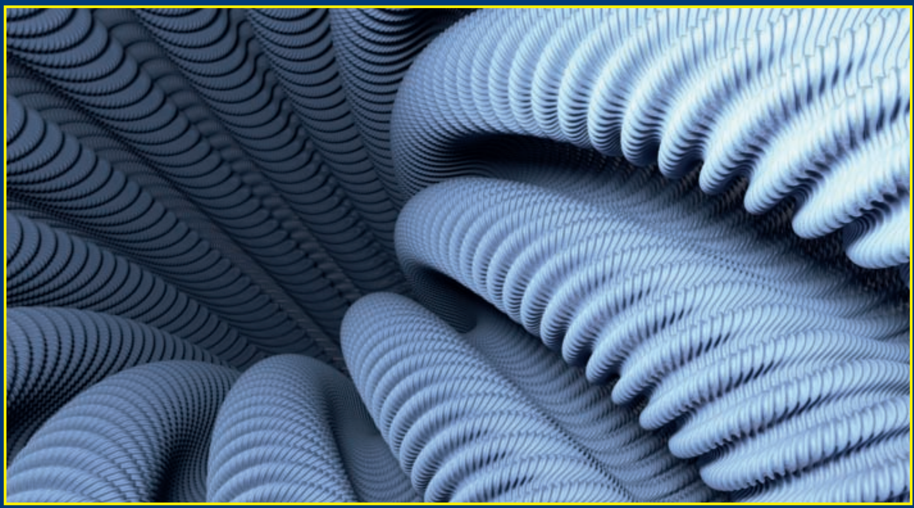
Coll. Lavault, foto di A. Dumur

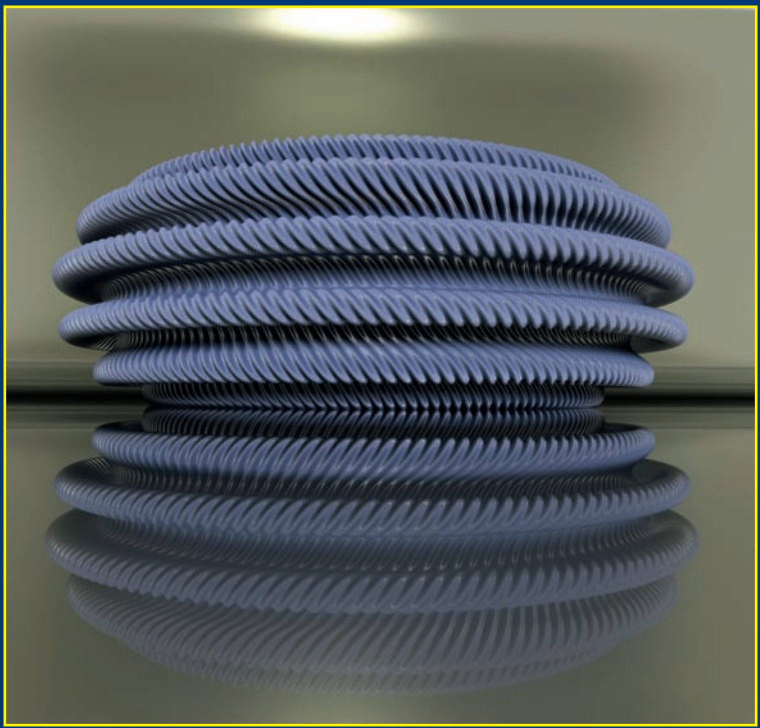
***Douvilleiceras mammillatum*: due corrugazioni impilate?**

Per chiudere questo articolo, ecco nella prossima pagina tre immagini esclusive di immersione isometrica del toro piatto quadrato... in onore di John Nash e Nicolaas Kuiper, naturalmente, che hanno osato immaginare questi strani oggetti quasi sessant'anni fa. [9]

Note

[1] Fonte: Sylvia Nasar, *A Beautiful brain*, Calmann-Lévy, 2001.
[2] Il *premio della Banca di Svezia in Scienze Economiche in Memoria di Alfred Nobel* per i puristi...
[3] *gnash* in inglese vuol dire *digrignare i denti*.
[4] Fonte: Sylvia Nasar, *Ibid*.
[5] Questo si riferisce al film "A Beautiful Mind" di Ron Howard, che racconta la vita di John Nash.
[6] Francis Lazarus, Saïd Jabrane e Boris Thibert del team *Hévéa*.
[7] Cioè le superfici standard della geometria iperbolica.
[8] Grazie a mio fratello Lawrence per avere attirato la mia attenzione sul *Douvilleiceras mammillatum*, un tipo di ammonite con doppia corrugazione.
[9] Per ulteriori informazioni e curiosità cfr. la pagina dell'autore sul sito dell'Università di Lione I: http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/





Immagini di V. Borrelli, S. Jabrane F. Lazarus, D. Rohmer, B. Thibert