

Il ritorno del cavallo

Scuola secondaria di primo grado "Monteverdi Colorni"

Classi 2A e 2B.

Docente di riferimento: Claudia Manoussakis, M. Cristina Saletti.

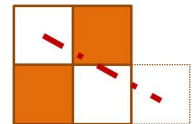
Ricercatore: Simone Piuri

Partecipanti: Alice Arneodo, Alessandra Arzilli, Sofia Baroni, Michele Bianchi, Matilde Birnbaum, Guido Bonori, Matilde Calza, Francesca Carneiro, Manesh Cheennatur, Pietro Colombo, Simone Damiani, Nikita Fischetti, Jacopo Fraccari, Zishun Guo, Giulia Monzini, Andrea Nepentini, Alice Pelizza, Isabella Russo, Riccardo Vitali.

Il cavallo della scacchiera, muovendosi secondo le regole del gioco degli scacchi, deve eseguire un percorso che gli permetta di fermarsi su tutte le caselle della scacchiera una sola volta ritornando alla fine sulla casella di partenza.

Si devono "risolvere" in questo modo scacchiere di dimensioni diverse, fino a quella 16x16.

Si escludono subito le scacchiere di una casella e quella 2x2 per l'impossibilità del cavallo di compiere qualsiasi mossa.



Scacchiera 3x3.

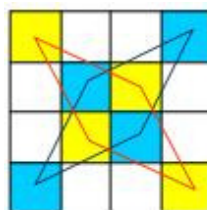
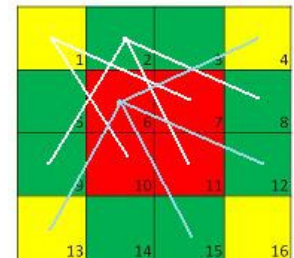
Non può essere risolta perché la casella centrale è irraggiungibile.

Scacchiera 4x4. Dopo aver fatto numerosi tentativi casuali senza giungere a una conclusione, abbiamo capito che era necessario organizzare il piano della scacchiera, analizzando le possibili mosse del cavallo rispetto a:

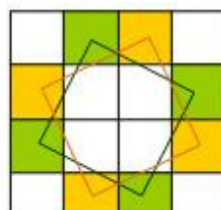
- quali e quante caselle si possono raggiungere da ogni posizione: dalle caselle ai vertici si possono compiere solo due mosse, da quelle sui lati tre, da quelle al centro quattro;
- quali percorsi chiusi può compiere il cavallo e come si collegano l'un l'altro.

Dalle caselle ai vertici si può raggiungere solo una coppia di caselle centrali, che si collegano:

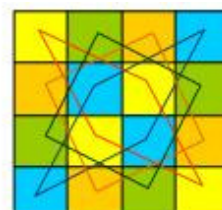
- all'altra casella ai vertici, e in questo caso si può raggiungere solo l'altra casella centrale, ma ciò impedisce l'ultima mossa del ritorno alla casella al vertice;
- a un "quadrato", interamente percorribile. Da qui si può passare all'altro rombo ma, per quanto detto prima, si deve escludere una casella ai vertici per poter continuare il percorso.



DUE ROMBI



DUE QUADRATI

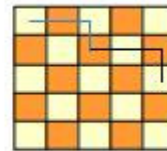


LA MOSSA DEL CAVALLO PERMETTE DI PASSARE DA UN ROMBO AD UN QUADRATO E VICEVERSA, MA NON DA UN ROMBO AD UN ALTRO ROMBO, NÉ DA UN QUADRATO AD UN ALTRO QUADRATO. DA UNA CASELLA DI UN COLORE, SI POSSONO RAGGIUNGERE AL MASSIMO DUE CASELLE DI UN COLORE DIVERSO.

Quindi la scacchiera 4x4 è irrisolvibile.

1	12	3	8
6	9	14	11
13	2	7	4
	5	10	15

Scacchiera 5x5. Si osserva che per ogni mossa, se il cavallo parte da una casella nera arriva su una bianca, e viceversa. La scacchiera 5x5 è composta da 25 caselle: 12 nere e 13 bianche. Supponendo di partire da una casella nera, la 24° casella occupata sarebbe bianca e quindi non si potrebbe raggiungere l'ultima rimasta, anch'essa bianca. Se invece si cominciasse il percorso da una casella bianca, arrivati in fondo saremmo su una casella bianca e non potremmo più ritornare sulla prima casella. Perciò anche la scacchiera 5x5 è irrisolvibile.

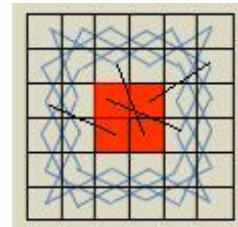


Scacchiere $(2n+1) \times (2n+1)$. Quanto detto per la scacchiera 5x5 vale per tutte le scacchiere con un numero dispari di caselle per lato, che sono pertanto irrisolvibili.

Scacchiera 6x6. Anche in questo caso è indispensabile organizzare il piano della scacchiera in percorsi chiusi.

Si possono individuare quattro tracciati che costeggiano il perimetro. Essi si possono collegare passando da una casella del quadrato centrale rosso.

Nell'immagine sottostante è indicato un possibile percorso: abbiamo numerato le mosse e colorato le caselle in modo da evidenziare i percorsi perimetrali.

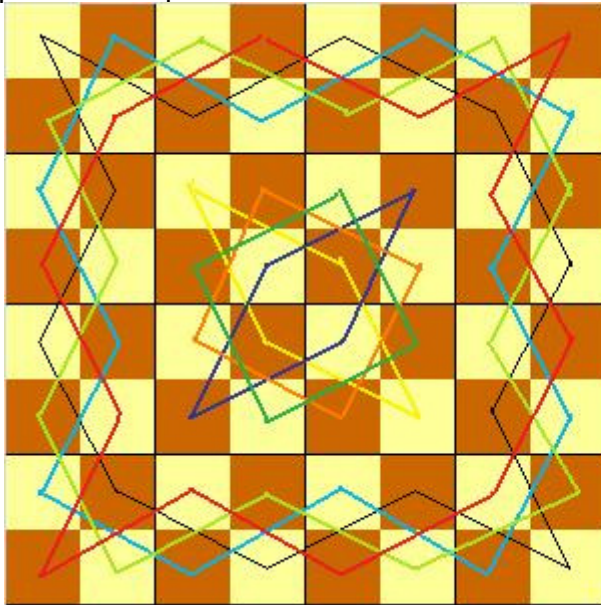


3	34	11	26	9	32
12	27	2	33	18	25
35	4	19	10	31	8
20	13	28	P-R1	24	17
5	36	15	22	7	30
14	21	6	29	16	23

Osservazione

Il tracciato trovato è un percorso chiuso: è quindi possibile partire da ognuna delle caselle della scacchiera e, seguendo lo schema, si riesce a tornarci dopo essersi fermati su tutte le altre. Anche il verso può essere sia orario sia antiorario. Se si considerano perciò diversi i percorsi che partono da caselle diverse e che procedono in versi distinti, da ogni schema seguono 64 percorsi possibili.

Scacchiera 8x8: Abbiamo individuato una tipologia di percorso che prevede l'organizzazione della scacchiera in una parte centrale 4x4 e una cornice, in modo simile a quanto fatto per la scacchiera 6x6.



7	36	19	46	5	34	17	56
20	47	6	35	18	57	4	33
37	8	59	14	45	28	55	16
48	21	44	29	58	15	32	3
9	38	13	60	31	42	27	54
22	49	30	43	12	61	2	63
39	10	51	24	41	64	53	26
50	23	40	11	52	25	62	1

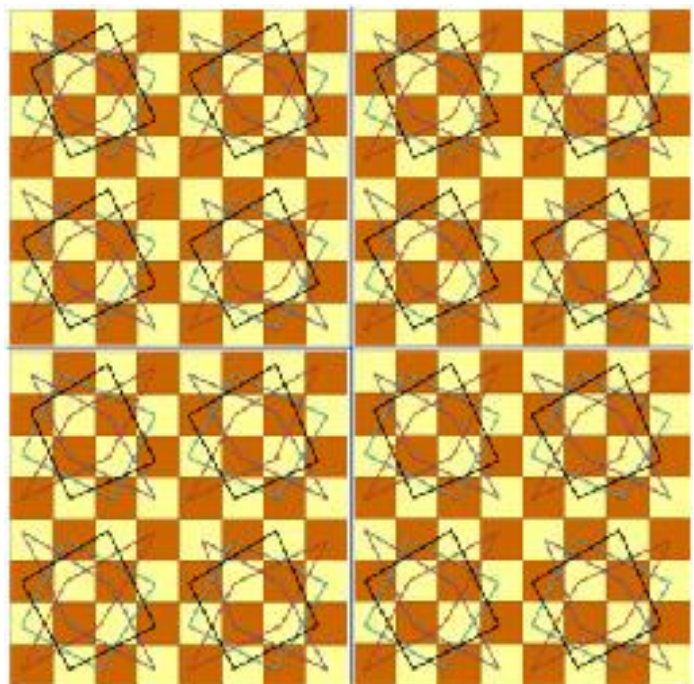
Noi l'abbiamo risolta partendo da una casella al vertice e percorrendo alternativamente un tracciato esterno e uno centrale, saltando però alcune caselle che abbiamo "recuperato" alla fine per chiudere in percorso.

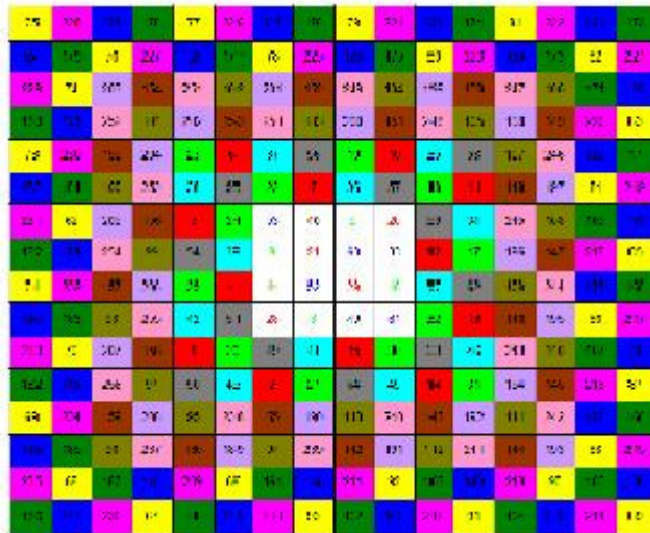
Anche in questo caso vale l'osservazione sui diversi percorsi possibili: lo schema che abbiamo individuato genera in realtà 128 percorsi distinti.

Scacchiere 12x12 e 16x16:

Se accostiamo 4 scacchiere 6x6, abbiamo una possibile soluzione della scacchiera 12x12, basta fare in modo che l'ultima casella occupata di ciascuna sottoscacchiera sia vicina a un'altra sottoscacchiera non ancora percorsa.

Lo stesso vale per la scacchiera 16x16, componibile con 4 scacchiere da 8x8. Abbiamo però trovato anche un altro modo per risolvere la scacchiera 16x16, organizzandola con una parte centrale 8x8 circondata da due cornici di larghezza 2.





Concludendo:

Abbiamo verificato che non sono risolvibili le scacchiere aventi un numero dispari di caselle per lato o comunque minore di 6.

Noi abbiamo individuato alcuni criteri per completare i percorsi:

- cercare tracciati chiusi tra loro collegabili;
- partire in generale da caselle che siano collegabili con il maggior numero possibile di altre caselle (anche se poi il tracciato chiuso, percorso nello stesso ordine, permette di partire da qualsiasi altra casella e di ritornarvi dopo aver occupato tutte le altre);
- esistono molte soluzioni, che aumentano sempre di più con l'aumentare delle dimensioni della scacchiera.

Non siamo riusciti a quantificare il numero di soluzioni possibili attraverso una formula e siamo convinti che i percorsi trovati da noi non siano gli unici possibili. Siamo però soddisfatti del lavoro svolto anche perché ci ha permesso di sperimentare quanto sia importante "sintonizzare le nostre menti" per arrivare alla risoluzione del problema.