Sfida sul foglio a quadretti

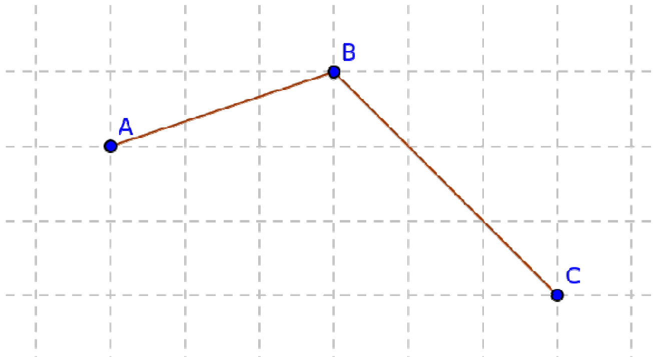
Istituto Comprensivo Primiero - Fiera di Primiero (TN)
Classi 3A, 3B e 3C
Insegnante di riferimento: Agostino Pradel
Ricercatore: Federico Totaro
Ragazzi partecipanti: Samuele Boninsegna, Valentina Brandstetter, Lorenzo Debertolis, Marco Di Franco, Elia Ferrari, Nicolae Gidei, Alois Gobber, Alessandro Iagher, Moreno Masoch, Anna Salvadori, Carlo Scarian, Elia Zugliani.

Due amiche hanno inventato un nuovo gioco, che prevede poche semplici regole. Esistono strategie vincenti?

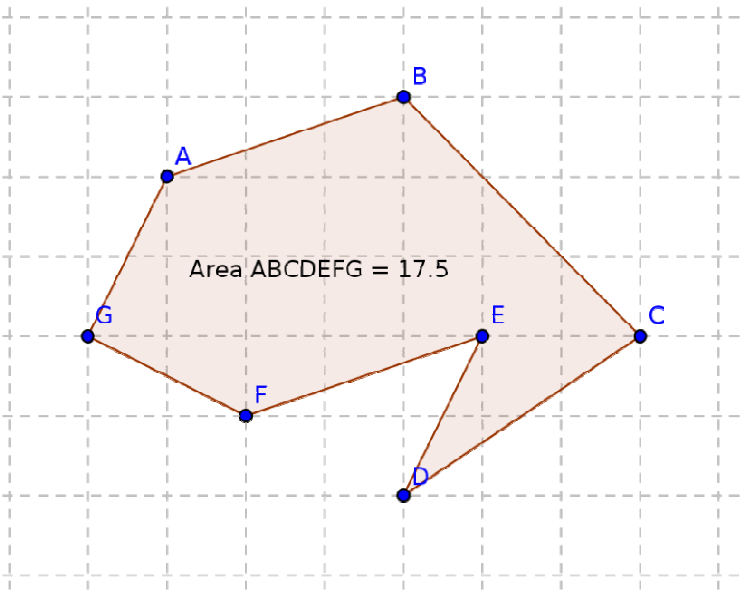
IL PROBLEMA SUL FOGLIO A QUADRETTI

Il problema che ci è stato chiesto di analizzare riguarda un gioco che si svolge su un foglio a quadretti. Per comodità chiamiamo i due giocatori Ambra e Barbara. Prima di cominciare, Ambra scommette su "numero intero", mentre Barbara scommette su "numero decimale".

A questo punto Ambra individua due nodi (vertici dei quadretti) sul foglio e li congiunge con un segmento. È il turno di Barbara, la quale parte da una delle due estremità del segmento disegnato da Ambra e la congiunge con un terzo nodo.



Adesso tocca di nuovo ad Ambra, che costruisce un nuovo segmento prolungando la spezzata fino a un quarto nodo.



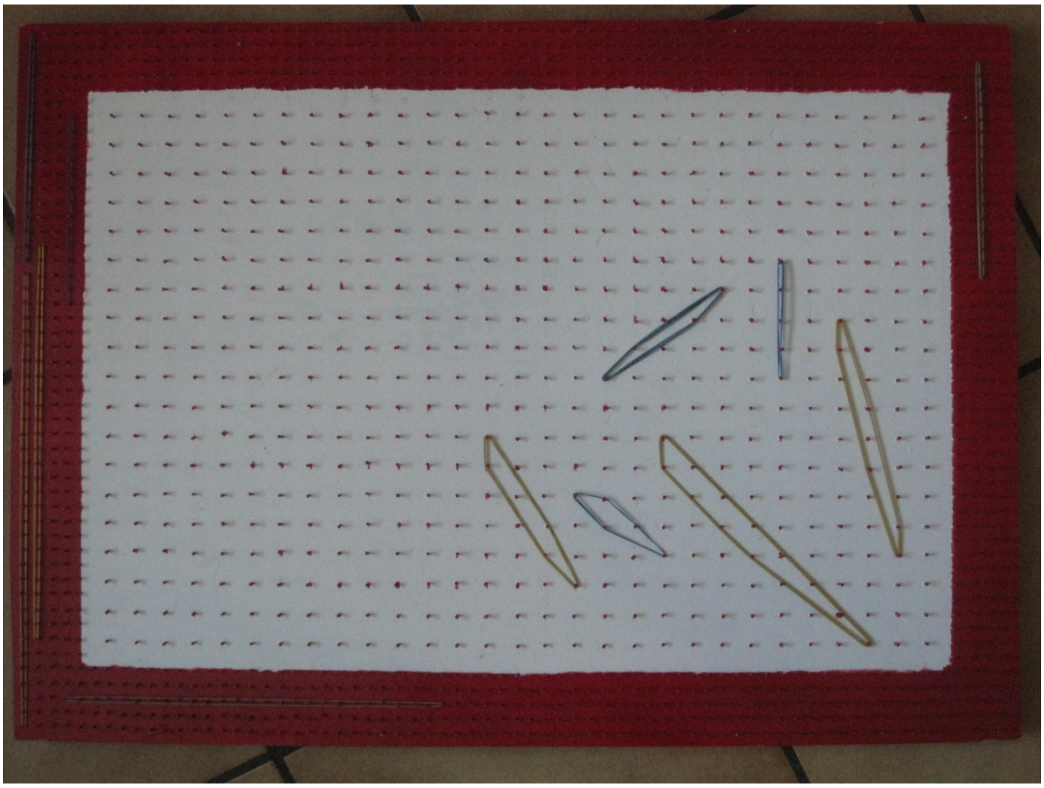
Ambra e Barbara proseguono in questo modo alternandosi, stabilendo però la seguente regola: non è permesso costruire segmenti che incrocino segmenti già disegnati in precedenza.

Arrivato il proprio turno, ciascuna giocatrice può decidere se proseguire nel gioco oppure porvi fine congiungendo l'ultimo punto con quello iniziale e chiudendo in questo modo la spezzata. Quando questo accade, si va a considerare l'area del poligono ottenuto. Se l'area è un numero decimale vince Barbara, se invece è un numero intero vince Ambra.

LA REALIZZAZIONE DEL GIOCO

Per rendere più concreto il problema abbiamo pensato di realizzare un tavolo di gioco e un dado gigante. Il dado ci serve all'inizio del gioco per attribuire il ruolo di Ambra e quello di Barbara e anche per scegliere chi inizia. Per la realizzazione abbiamo utilizzato una tecnica origami su cartoncino.

Il tabellone è stato realizzato su un rettangolo (50x70) di compensato. Per prima cosa abbiamo suddiviso il tabellone in quadretti (da 1 cm di lato i quadretti sui bordi, da 2 cm di lato i quadretti al centro) e poi abbiamo piantato dei chiodi negli incroci. Dopo aver terminato il lavoro e stata applicata una mano di vernice bianca per il fondo, poi abbiamo mascherato la parte centrale con del nastro adesivo di carta e successivamente è stata data la vernice rossa.



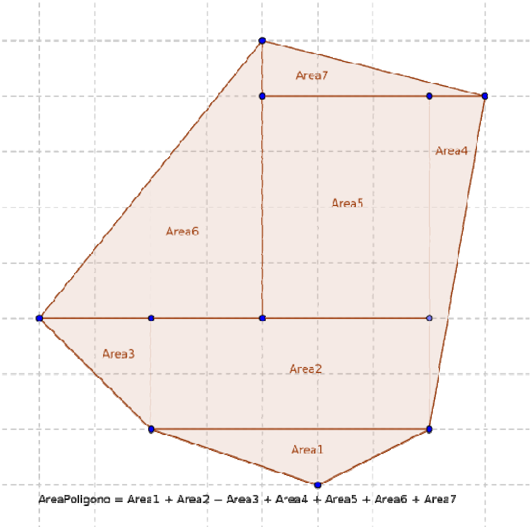
DIFFICOLTÀ INIZIALI

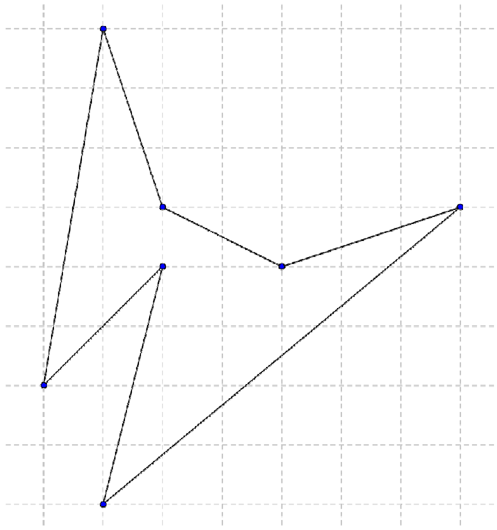
Dopo aver letto e capito il problema abbiamo iniziato a svolgere tra di noi delle partite su fogli a quadretti: abbiamo scelto chi dovesse essere Barbara, che giocava avendo scommesso sull'area decimale, e chi dovesse essere Ambra, che aveva scommesso sull'area intera. Inizialmente il gioco nascondeva le difficoltà, perché si trattava soltanto di tracciare segmenti da un vertice all'altro senza preoccuparsi dell'area della figura che stava per essere realizzata. Quando la figura veniva chiusa, nella maggior parte dei casi non si riusciva tuttavia a stabilire se l'area fosse intera o decimale, tanto che a volte si optava per un pareggio senza nemmeno provare a calcolarla. Ovviamente non si può giocare senza poi stabilire chi vince: è stato perciò necessario cercare un modo per rendere più facile il calcolo dell'area.

PRIMO METODO PER IL CALCOLO DELL'AREA

La prima soluzione trovata è stata la suddivisione dei poligoni in figure per le quali fosse facile calcolare l'area.

All'inizio è sembrata una buona idea, ma poi ci siamo accorti che funzionava bene solo per i poligoni convessi. Nel caso di poligoni concavi, infatti, ci siamo trovati ben presto in difficoltà.



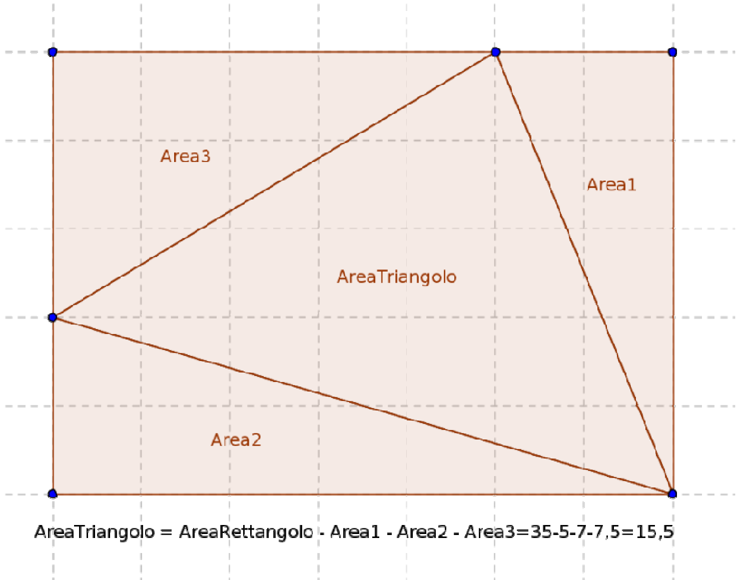


IL CALCOLO DELL'AREA DI UN TRIANGOLO

Per trovare una strategia più efficace abbiamo pensato di partire da una situazione più facile e ci siamo chiesti come calcolare l'area di un triangolo qualsiasi.

Per l'area del triangolo abbiamo trovato questo metodo:

- disegnare un rettangolo "circoscritto" al triangolo (il più piccolo rettangolo con base orizzontale che contiene il triangolo);
- calcolare l'area del rettangolo;
- calcolare l'area dei triangoli rettangoli interni al rettangolo ed esterni al triangolo dato;
- ottenere l'area voluta come differenza di aree.



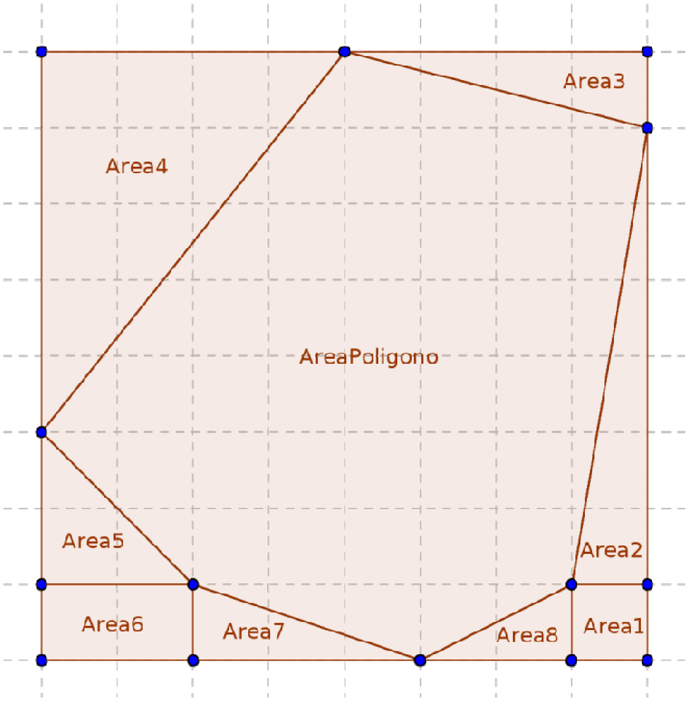
IL CALCOLO DELL'AREA DI UN POLIGONO CONVESSO

Questo metodo si adatta bene anche a qualsiasi poligono convesso. L'unica differenza rispetto al caso del triangolo è che tra le aree da sottrarre, oltre ai triangoli rettangoli, si posso trovare anche rettangoli.

Abbiamo inoltre capito che il risultato sarà sempre dato da un numero intero o da un numero decimale con l'unica possibilità del "virgola 5". Questo perché:

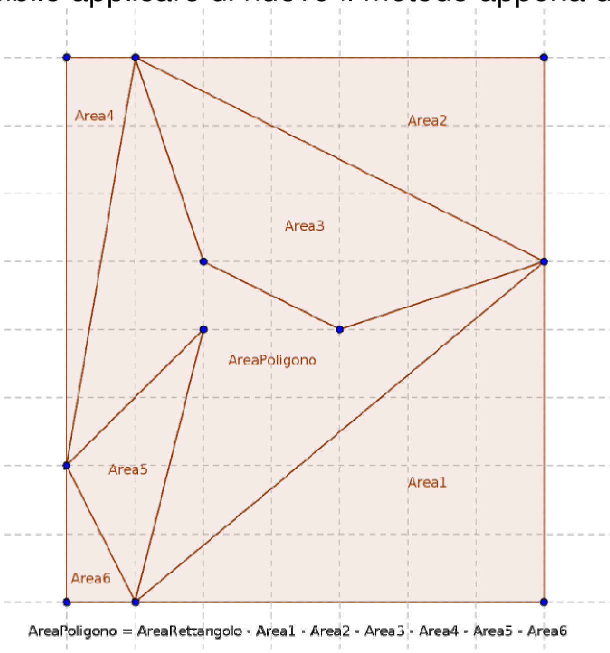
- ogni rettangolo ha area intera dato che i lati sono numeri interi;

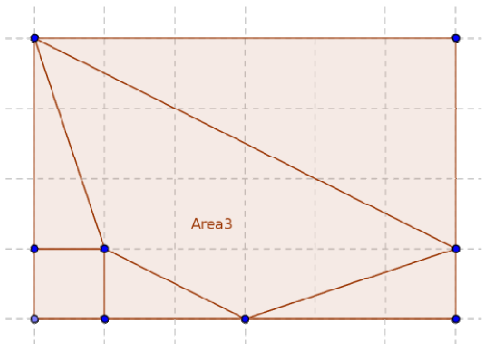
- ogni triangolo rettangolo esterno ha area intera o “virgola 5” in quanto si moltiplicano due numeri interi e si divide per due;
- l'area del poligono dato si ottiene sommando o sottraendo solo aree intere o “virgola 5”.



IL CALCOLO DELL’AREA DI UN POLIGONO CONCAVO

Il metodo trovato è molto utile perché si può estendere anche ai poligoni concavi. In questo caso tra le aree da togliere, oltre ai soliti triangoli e rettangoli, ci saranno anche le zone concave (nel nostro esempio si può considerare l'Area 3). Per queste aree è possibile applicare di nuovo il metodo appena descritto.

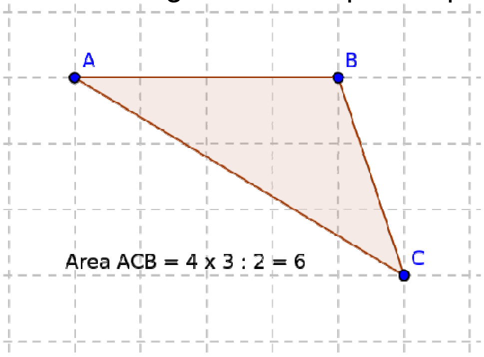




PRIMA STRATEGIA VINCENTE

Dopo aver capito come calcolare le aree ci siamo concentrati nella ricerca di una strategia che ci permettesse di non uscire mai sconfitti da una partita in cui abbiamo la prima mossa. Abbiamo trovato subito una strategia efficace: *disegnare un segmento orizzontale di lunghezza pari.*

A questo punto qualsiasi mossa faccia l'avversario noi vinceremo la partita, perché chiudendo il poligono otteniamo un triangolo di base pari e quindi di area intera.



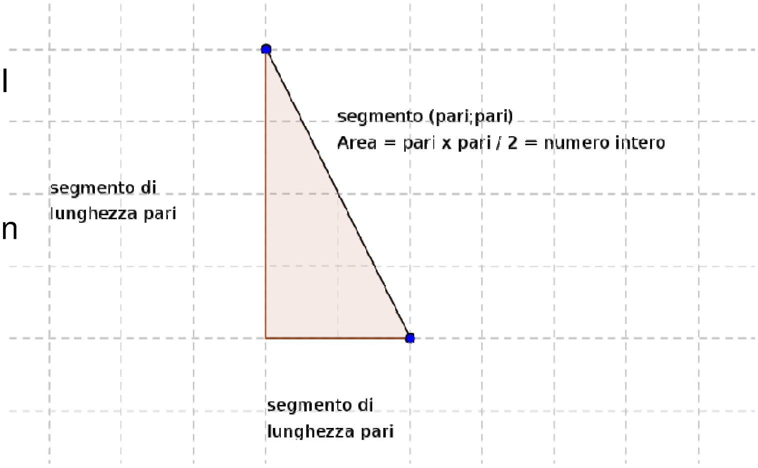
A dire la verità l'avversario avrebbe un'altra mossa a disposizione: rispondere con un altro segmento orizzontale. Questa mossa non ci mette in difficoltà: rispondiamo con un altro segmento orizzontale e andiamo avanti così fino a quando l'altro giocatore non esce dalla retta orizzontale.

GENERALIZZAZIONE STRATEGIA VINCENTE

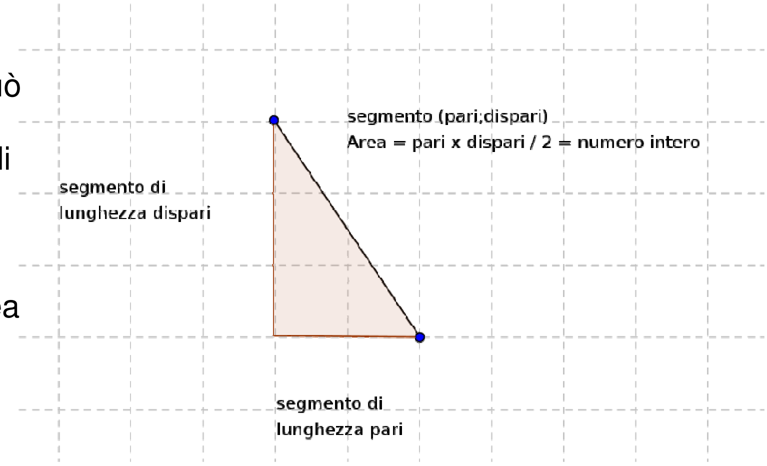
Ci è stato suggerito di non accontentarci e di generalizzare questa strategia.
Abbiamo scoperto che si può vincere in questo modo:
iniziare con un segmento che sia l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con i cateti pari.

Prima di spiegare la nostra strategia è però necessario dare qualche definizione.

- D'ora in poi chiameremo il nostro segmento iniziale segmento *(pari;pari)*.
  Osserviamo che il segmento *(pari;pari)* è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di area intera poiché
  $$pari \times pari \div 2 = numerointero$$

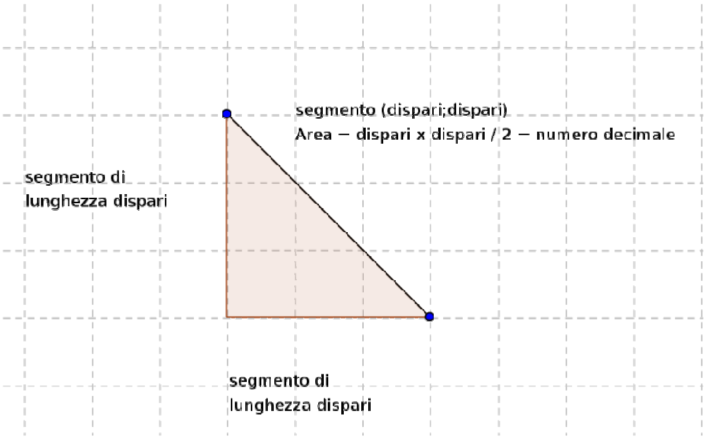


- In modo analogo si può definire il segmento *(pari; dispari)* come l'ipotenusa di un triangolo con un cateto pari e uno dispari.
  Anche in questo caso il triangolo rettangolo ha area intera poiché
  $$pari \times dispari \div 2 = numerointero$$



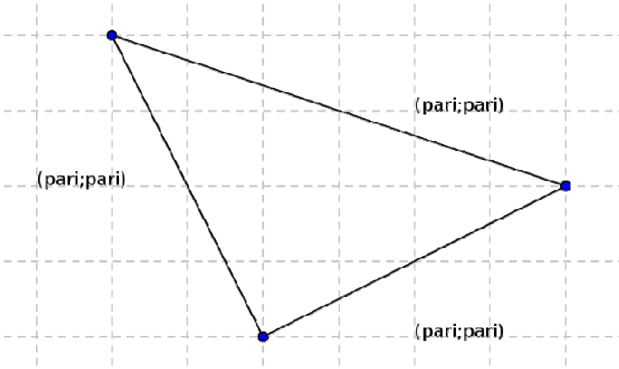
- Infine definiamo il segmento *(dispari; dispari)* come l'ipotenusa di un triangolo con entrambi i cateti dispari. Questo è l'unico caso di un triangolo rettangolo con area decimale poiché

$$dispari \times dispari \div 2 = numerodecimale$$



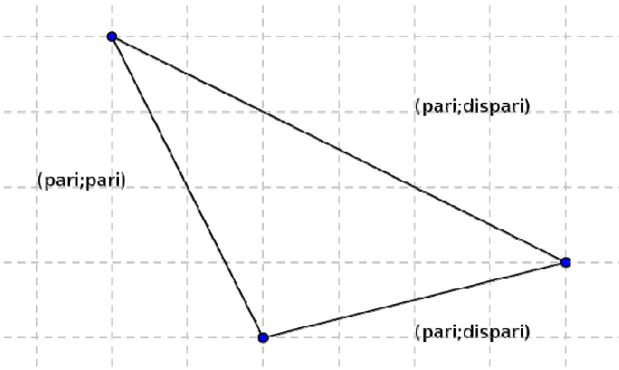
Vediamo ora in dettaglio le mosse che l'avversario può fare:

- rispondere con un segmento *(pari; pari)*:



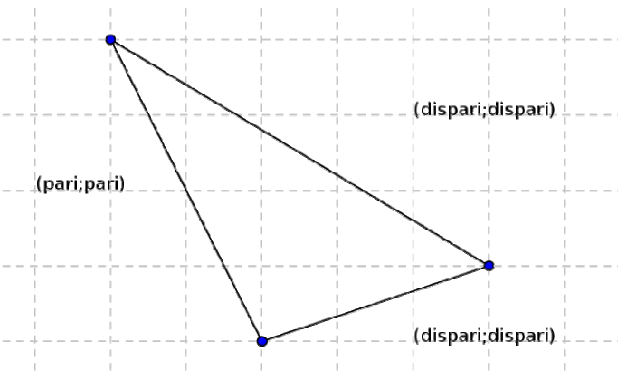
A questo punto chiudiamo il triangolo con un segmento che sarà per forza *(pari;pari)*.
L'area del triangolo sarà: Area rettangolo – aree dei triangoli esterni, quindi: numero intero – numero intero – numero intero – numero intero = numero intero

- rispondere con un segmento *(pari; dispari)*:



A questo punto chiudiamo il triangolo con un segmento che sarà per forza *(pari; dispari)*.
L'area del triangolo sarà: numero intero – numero intero – numero intero – numero intero = numero intero

- rispondere con un segmento *(dispari; dispari)*:



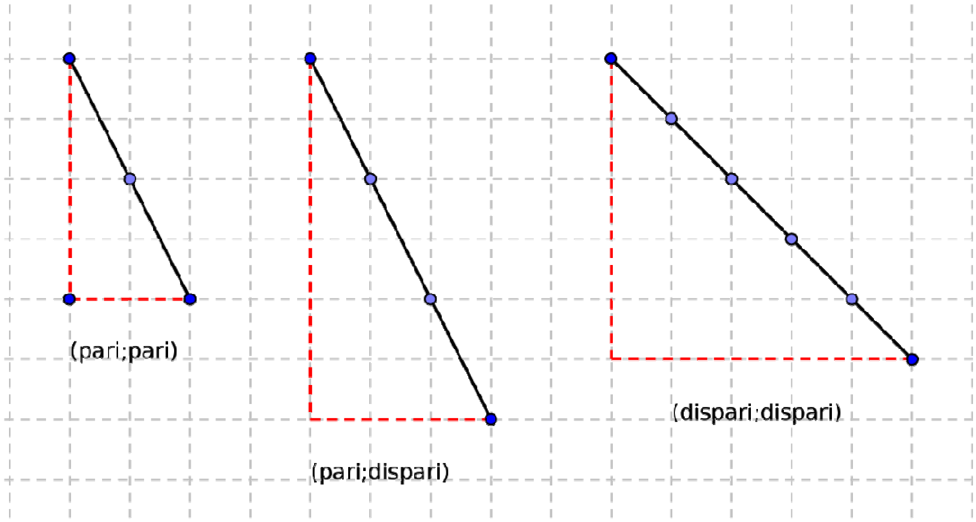
A questo punto chiudiamo il triangolo con un segmento che sarà per forza *(dispari; dispari)*.
L'area del triangolo sarà: numero intero – numero intero – numero decimale – numero decimale = numero intero

- prolungare il primo segmento:
  in questo caso ci comportiamo come nella prima strategia rimanendo sulla retta.

DAI TRIANGOLI AI NODI

Arrivati a questo punto eravamo convinti di aver terminato il nostro compito, ma il ricercatore ha osservato che il calcolo dei cateti dei triangoli esterni alla nostra figura può essere complicato e, per semplificare i calcoli, ha suggerito di osservare il numero di nodi presenti sul perimetro del poligono di cui vogliamo valutare l'area. Ci siamo accorti che: *quando il numero dei nodi che stanno sul perimetro del poligono è pari, la sua area risulta intera, quando è dispari l'area risulta decimale.*

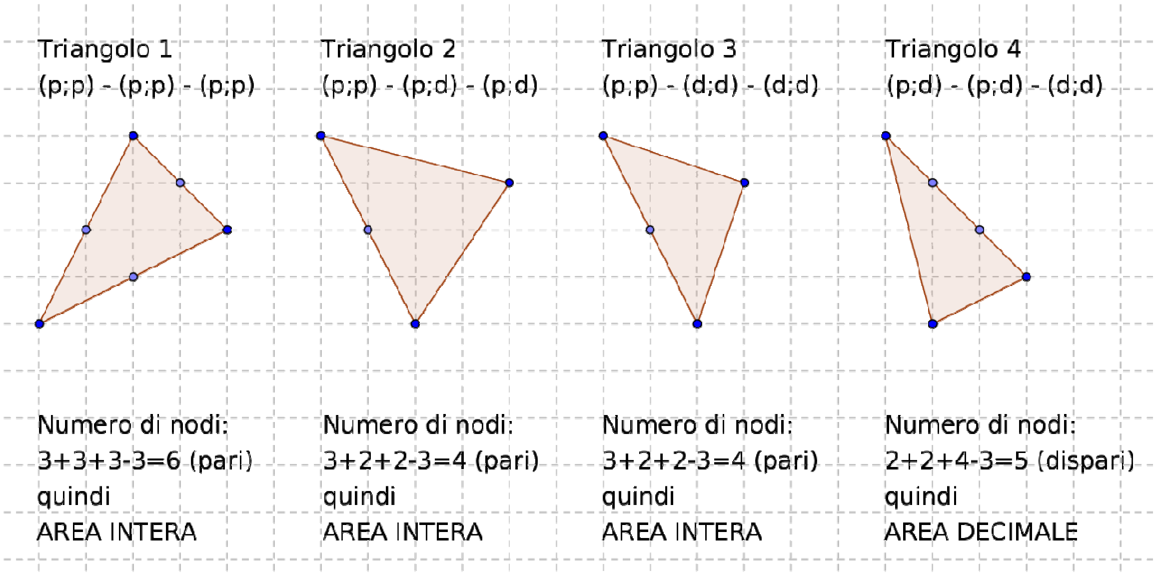
Per arrivare a questo risultato abbiamo osservato che i lati *(pari; pari)* hanno un numero dispari di nodi, mentre i lati *(pari; dispari)* e i lati *(dispari; dispari)* hanno un numero pari di nodi.



Infatti nei nostri triangoli rettangoli c'è una relazione tra il numero di nodi sull'ipotenusa e il MCD delle lunghezze dei due cateti. Per la precisione il MCD è uguale al numero dei nodi meno 1.

Chiarito il numero di nodi sui lati, cosa possiamo dire dei poligoni? Anche in questo caso partiamo dal caso più semplice ovvero i triangoli.

Esistono solo quattro tipi di triangoli, in ogni caso per calcolare il numero di nodi sul perimetro basta contare i nodi su ogni lato e togliere 3, dato che i nodi nei vertici vengono contati due volte.

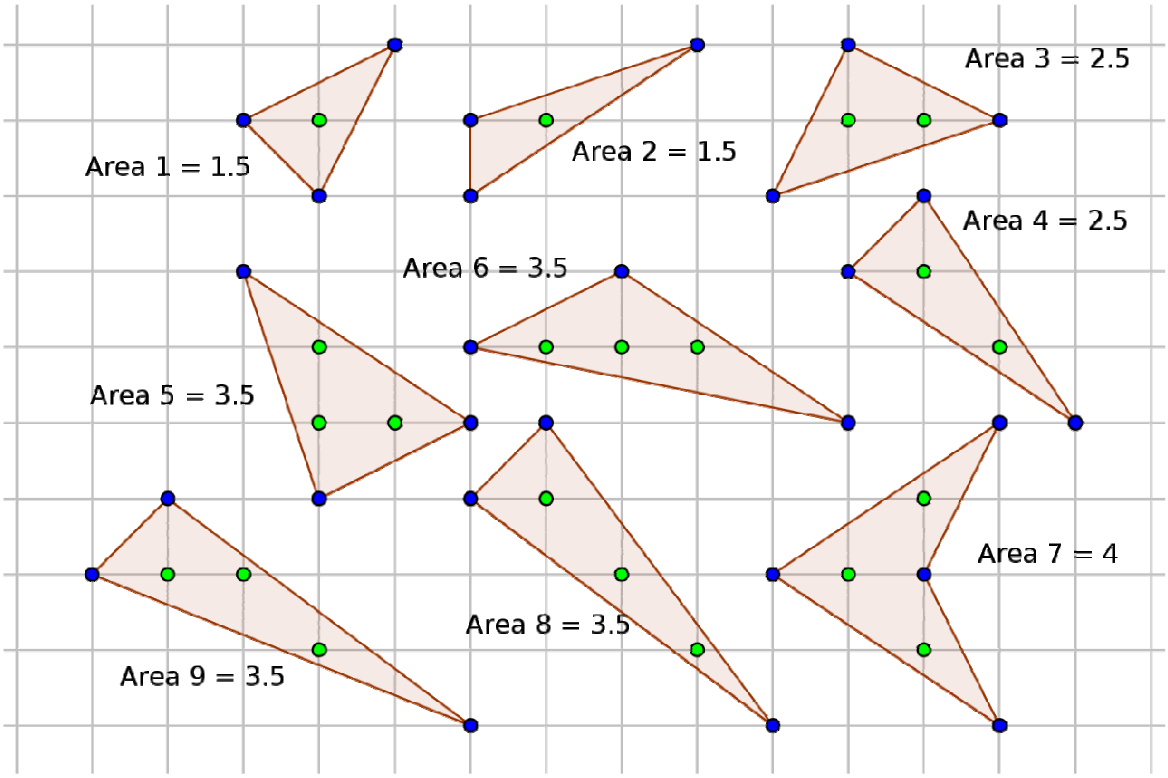


Si può facilmente notare che l'unico triangolo con area decimale è l'unico senza lati *(pari; pari)* e questo conferma la nostra strategia vincente cioè iniziare con un lato *(pari; pari)*.

IL NUOVO PROBLEMA

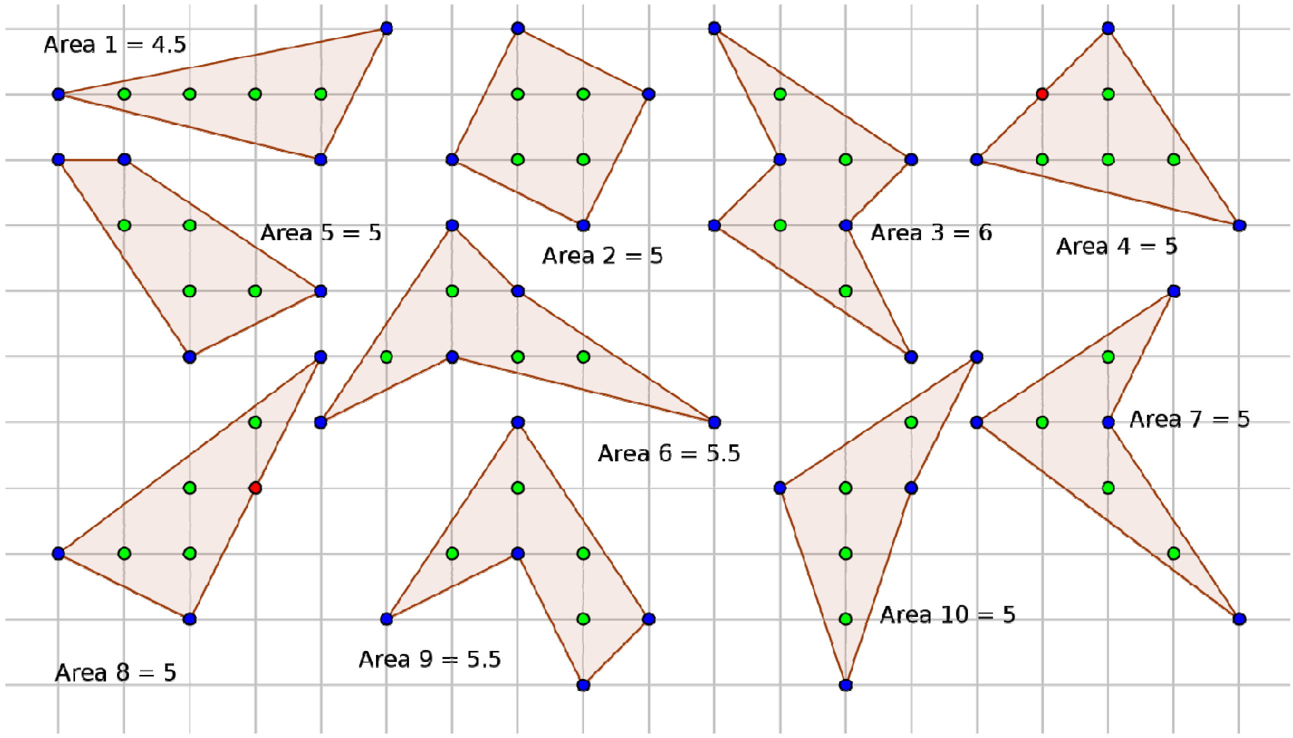
Visto che siamo arrivati a queste conclusioni il nostro ricercatore ci ha proposto un nuovo problema strettamente legato con quanto fin qui fatto:
“La nostra 'griglia' è adesso un bosco dove sono stati fatti crescere tanti filari, fra loro tutti equidistanti. Un taglialegna deve procurarsi alcuni tronchi, decide dunque di recarsi nel bosco; la legge gli impone però di abbattere solo alberi che crescono in un terreno di sua proprietà.Il boscaiolo deve quindi acquistare parte del terreno e per farlo dovrà delimitarlo con una corda che funga da 'recinto'. Questa corda verrà legata intorno ad altri alberi, che non verranno tagliati, ma che serviranno soltanto da 'sostegno' del suo recinto. Poiché dovrà pagare un tanto per ogni metro quadro che avrà delimitato, il boscaiolo ha interesse a costruire un recinto che racchiuda i suoi (e soltanto i suoi) alberi in modo da rendere l'area racchiusa la più piccola possibile. Sapreste aiutarlo?”

Per affrontare il problema degli alberi siamo partiti cercando la soluzione ottimale per un albero, poi abbiamo cercato le soluzioni per due alberi ed infine quelle per tre alberi. Probabilmente non abbiamo valutato tutte le ipotesi ma abbiamo analizzato tutte quelle che ci venivano in mente.



Alla fine ci siamo fermati a contemplare il nostro lavoro e abbiamo fatto le seguenti considerazioni:
- la regione da comprare ha per lo più forma triangolare;
- non abbiamo usato lati *(pari; pari)*;
- non ci sono nodi all'interno dei lati.

Non soddisfatti abbiamo ripreso il lavoro e abbiamo analizzato alcune soluzioni del problema del podere con 4 alberi.



Per trovare la soluzione migliore abbiamo cercato di:
- utilizzare triangoli o perlomeno poligoni con pochi lati;
- eliminare i nodi all'interno dei lati.