Minimizzazione di reti

Liceo Scientifico "G. Galilei" – Erba (CO)
Classi 1C, 1D, 1E, 2A, 2C
Insegnante di riferimento: Raffaella Cetti
Ricercatrice: Federico Boniardi
Partecipanti: Noemi Beretta, Olga Bernasconi, Marco Corti, Andrea Gruffè, Eugenio Mauri, Maddalena Molteni, Andrea Niedda, Tommaso Pina, Virginia Pina, Marcello Pozzessere, Andrei Raducanu, Claudio Rigamonti, Tommaso Siviero, Ottavia Terenghi.

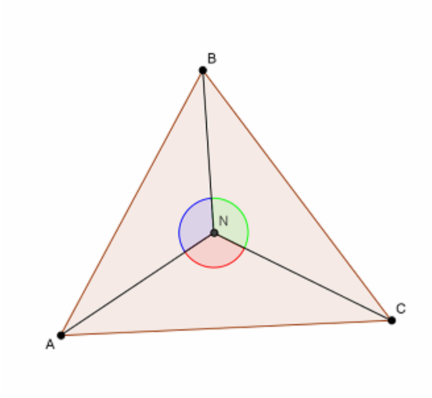
IL PROBLEMA

Il **problema** che ci è stato proposto riguarda la minimizzazione di reti, ossia come **collegare alcune città tra loro** che non sono poste su una retta. Una di esse possiede energia da trasmettere alle altre. Il nostro compito è stato quello di trovare **la via più breve** per trasmettere energia.

Quando le tre città si trovano ai **vertici di un triangolo**, nella maggior parte dei casi si ottiene il **miglior collegamento posizionando un nodo N all'interno del triangolo** e collegando questo nodo con i tre vertici A, B e C. La somma dei tre segmenti NA + NB + NC risulta minore di quella che si ottiene sommando AC con AB oppure AC con BC o infine AB con BC.
Abbiamo fatto vari tentativi e misurazioni per scoprire dove collocare il nodo e abbiamo capito che:

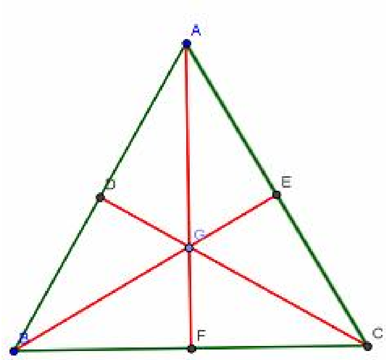
- **il nodo**, se presente, **è uno solo**;

– il nodo **non può trovarsi sui lati**.

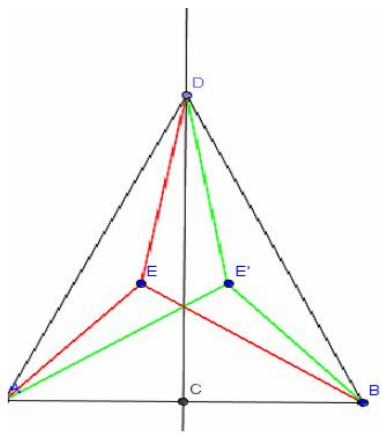


Triangolo equilatero

Quando il **triangolo è equilatero** si ottiene la soluzione migliore fissando un nodo **nel punto di incontro delle altezze**, che sono anche assi di simmetria per il triangolo.

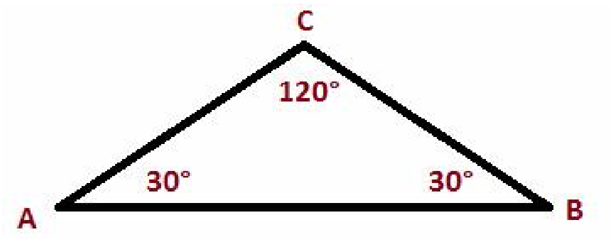


INFATTI: Sapendo che il punto ottimale per porre il nodo è uno solo, se questo punto non fosse sull'asse di simmetria ci sarebbe un altro punto simmetrico al primo rispetto all'asse che avrebbe le stesse proprietà. In tal caso avremmo perciò due punti ottimali in uno stesso triangolo. Dato che ci sono 3 assi di simmetria, il nodo si trova nell'intersezione dei 3 assi.



Triangolo isoscele con angolo di 120°

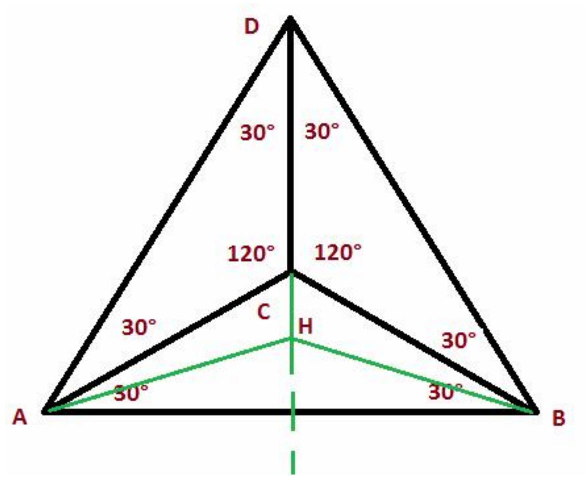
Nel caso che il triangolo sia isoscele e possieda un **angolo al vertice di 120°, il percorso più breve per unire i tre vertici è AC + CB** (passando cioè per il punto C) e non è più conveniente collocare un nodo all'interno del triangolo.



Per **dimostrare** questo costruiamo un triangolo equilatero sulla base del nostro triangolo di partenza. Sappiamo già trovare il punto ottimale in un triangolo equilatero e notiamo anche che corrisponderà al vertice C del nostro triangolo isoscele.
Se si prende in considerazione un punto qualsiasi H appartenente a un asse di simmetria del nostro triangolo equilatero (abbiamo già dimostrato che è inutile prendere un punto che non appartiene a un asse di simmetria) possiamo dire che

$$AC+BC+DC < AH+BH+DH$$

perché vale ciò per il triangolo equilatero.



Sapendo però che il segmento **DH è composto da DC + CH**, allora:

$$AC+BC+DC < AH+BH+(DC+CH).$$

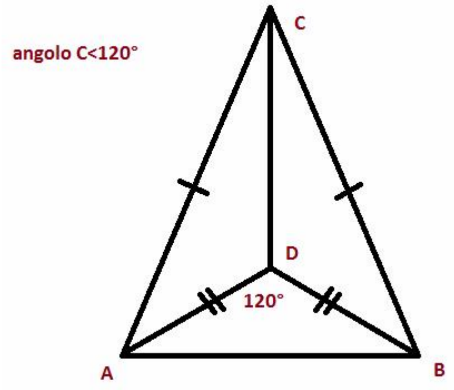
A questo punto DC si può elidere nei due membri della disuguaglianza, che diventa perciò:

$$AC+BC < AH+CH+BH.$$

Abbiamo dimostrato così la nostra tesi, cioè che un nodo H interno al triangolo non realizza il percorso minimo, perché il percorso che collega H con A con B e con C risulta sempre maggiore di AB + BC (il percorso lungo i lati).
Questo risultato vale anche per triangoli con **un angolo maggiore di 120°**.

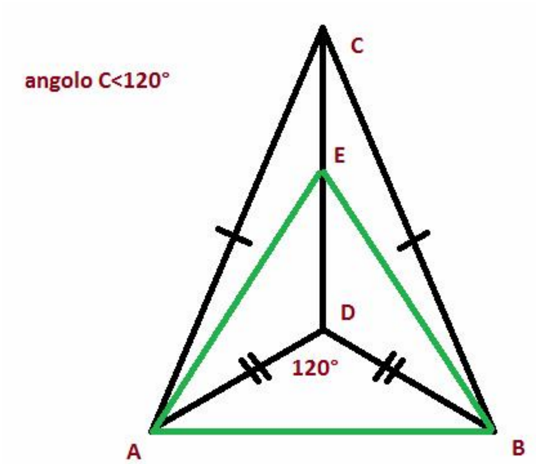
Triangolo isoscele con angolo al vertice minore di 120°

Abbiamo dimostrato che quando si considera un triangolo isoscele con angolo al vertice minore di 120°, il suo punto ottimale si trova all'interno del triangolo, sull'asse di simmetria e che forma con la base un triangolo isoscele con angolo al vertice di 120° come nella figura.



Dimostrazione

Costruiamo sulla base del triangolo isoscele uno equilatero ABE, come nella figura.



Per prima cosa possiamo notare che il vertice E appartiene all'asse di simmetria (retta per C), in quanto il triangolo equilatero ha la base in comune con quello isoscele. Inoltre noi già sappiamo trovare il punto ottimale in un triangolo equilatero e notiamo anche che nel nostro caso risulta essere il punto D.

Se si prende in considerazione un punto K al di sopra del punto D e appartenente all'asse di simmetria del triangolo (abbiamo già dimostrato che è inutile prendere un punto che non appartiene a un asse di simmetria) potremmo dire che

ED+AD+BD < EK+AK+BK

perché vale per il triangolo equilatero.

Sapendo che **ED è uguale a EK+KD** potremmo dire quindi che

(EK+KD) +AD+BD < EK+AK+BK

successivamente si elide EK e abbiamo così che

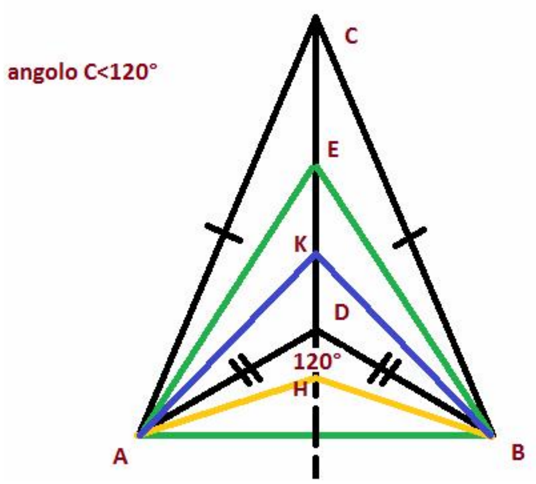
KD+AD+BD < AK+BK.

Aggiungiamo ai due membri il segmento CK ottenendo la seguente disuguaglianza:

CK+KD+AD+BD < AK+BK+CK.

Sapendo che **CK + KD = CD** si ottiene:

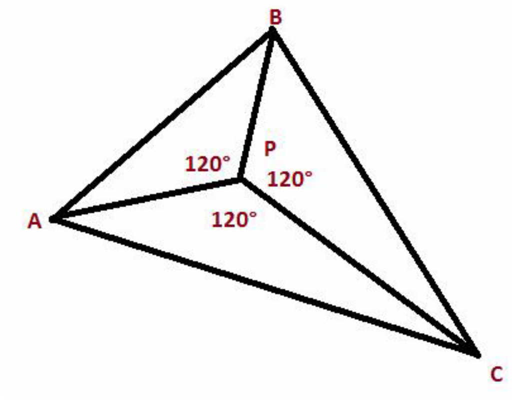
CD+AD+BD < AK+BK+CK



Risulta cosi che il punto D è sempre "migliore" di un qualsiasi altro punto K per collegare i tre punti A, B, C. Lo stesso si può dire se si sceglie un punto H al di sotto del punto D.

Caso generale

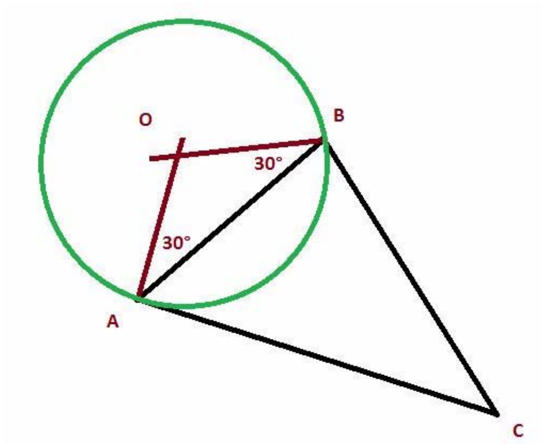
Dopo una serie di analisi e sperimentazioni abbiamo capito che in qualsiasi triangolo con tutti gli angoli minori di 120° il punto ottimale forma con i vertici di tali triangoli tre angoli di 120°, però non siamo stati in grado di dimostrare questo risultato.



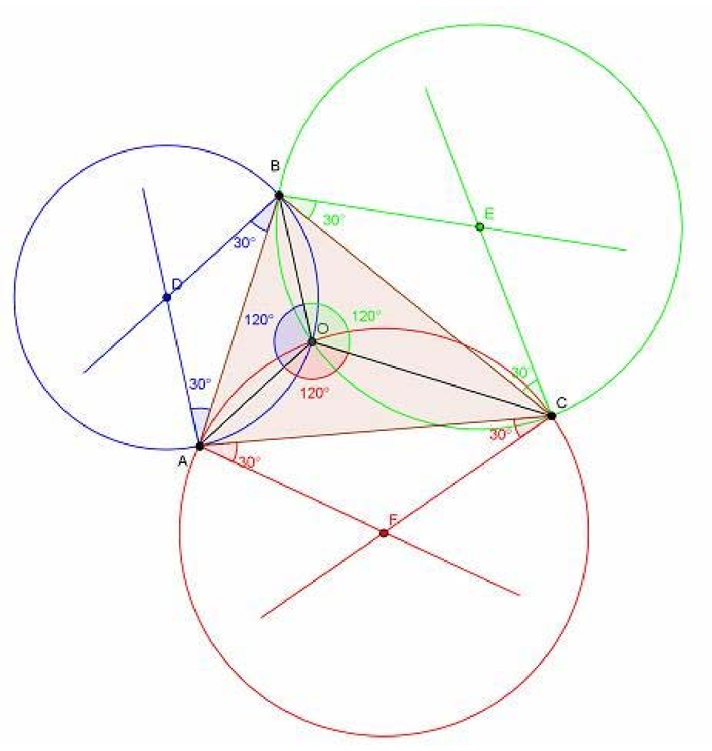
Abbiamo trovato però la costruzione geometrica precisa che permette di trovare il punto ottimale all'interno del triangolo: si deve utilizzare il teorema degli angoli al centro e degli angoli alla circonferenza.

Costruzione del punto ottimale (per un triangolo con angoli tutti minori di 120°)

Si costruisca su un lato del triangolo in considerazione, ma all'esterno di esso, un triangolo con due angoli di 30° (come nella figura il triangolo AOB) e si tracci una circonferenza che abbia come centro O e passi per i due vertici A e B.



Osservando la figura possiamo affermare che il triangolo convesso AOB, avendo due angoli di 30°, avrà il terzo angolo AOB di 120° e che l'altro angolo al centro (il suo esplementare) sarà di 240°. Di conseguenza, tutti i punti appartenenti all'arco AB della circonferenza (l'arco che sta all'interno del triangolo) formano con i vertici A e B un angolo uguale alla metà dell'angolo al centro concavo AOB, quindi di 120° (perché l'angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro).
Successivamente si ripetano gli stessi passaggi con il secondo lato e poi anche con il terzo. Potremo notare che le tre circonferenze costruite avranno un solo punto in comune all'interno del triangolo, in quanto già sappiamo che il punto ottimale è unico e non è mai all'esterno del triangolo, e che forma con i vertici A, B e C tre angoli di 120°. Esso sarà il nostro punto ottimale.



Il problema di Steiner

Al termine del nostro lavoro abbiamo scoperto che il problema da noi affrontato si chiama "problema di Steiner".

Jakob Steiner (Berna, 18 marzo 1796 – Berna, 1° aprile 1863) è stato un matematico svizzero che si è occupato principalmente di geometria come docente all'Università di Berlino. Il suo lavoro è stato molto importante perché ha posto le basi della geometria sintetica moderna.

Tornando al nostro problema, esso era già stato posto in precedenza da Fermat (matematico francese vissuto nel 1600); la formulazione del problema da parte di Steiner può essere riassunta così: tre villaggi A, B, C devono essere collegati da un sistema di strade di minima lunghezza totale. Egli arrivò alla sua soluzione nel 1838 utilizzando un processo chiamato *simmetrizzazione di Steiner*.

La soluzione del problema ha molte utilità pratiche: le reti da minimizzare possono essere di diverso tipo (di fibre ottiche, oleodotti, autostrade etc.) per connettere un insieme di siti (uffici, pozzi petroliferi, città etc.). Rendere minima la rete che li collega significa trovare la soluzione più vantaggiosa dal punto di vista economico (cioè minimizzare i costi).

Per quanto riguarda il problema di Steiner, è possibile realizzare un modello con lamine di sapone. Si considerino due lamine di plastica, distanziate da alcune sbarrette uguali, fissate nei punti che si vogliono collegare. Se si immerge il tutto nell'acqua saponata e poi lo si estrae, si osserva che tra le diverse sbarrette si formano delle lamine saponate. Dopo qualche secondo, necessario per raggiungere l'equilibrio, è possibile osservare in che modo la lamina si sia disposta.

Nel caso in cui i punti da collegare siano tre, posti ai vertici di un triangolo con angoli tutti minori di 120°, la disposizione delle lamine di sapone è quella che abbiamo spiegato, cioè con la presenza di un nodo all'interno del triangolo in corrispondenza del quale si formano tre angoli di 120°.

Per concludere

Il laboratorio pomeridiano "Math en Jeans" è stato giudicato da tutti noi ragazzi un'esperienza positiva, che ci è servita a scoprire aspetti della matematica in modo diverso e ci ha fatto conoscere persone nuove e simpatiche. Riportiamo qui alcune delle impressioni più significative:

"Il Math en Jeans ci ha dimostrato che la matematica non è studio infruttuoso o regole a memoria: è il lavoro di persone che si sono impegnate per raggiungere un risultato" **Claudio**

"Incredibile, emozionante e allo stesso tempo interessante, la migliore esperienza di matematica" **Marco**

"... ci ha insegnato a ragionare e a utilizzare tutte le nostre risorse e possibilità" **Ottavia**

"… è stata dapprima un'impresa ardua e difficile, ma si è rivelata col tempo un'esperienza utile ed interessante che ha stimolato le nostre capacità di ragionamento" **Noemi** e **Maddalena**

"Questa iniziativa ci ha avvicinato alla matematica in un modo diverso e più coinvolgente" **Marcello**

"… ci ha permesso di sviluppare le nostre capacità di ragionare ma soprattutto è stato utile il fatto di lavorare in gruppo e dover confrontare idee diverse" **Eugenio**