Fantasia di reti

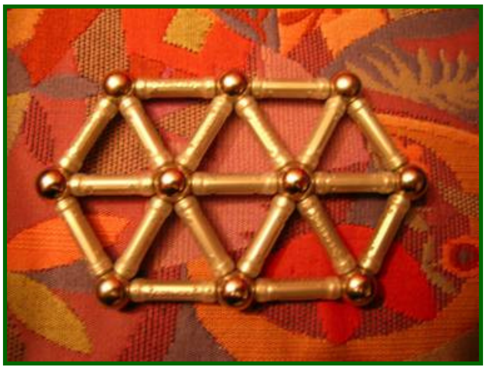
Liceo Scientifico "B. Pascal" – Merano (BZ)
Classe 2LS Liceo Scientifico
Insegnante di riferimento: Giovanni Porcellato
Ricercatrice: Letizia Pernigotti
Partecipanti: Beatrice Amaduzzi, Ilaria Andretta, Sara Avanzo, Greta Bacher, Francesco Carella, Andrea D'Antino, Ilaria De Noia, Giulio Giovanazzi, Chiara Grendene, Nenad Jevtovic, Fatima Ezzahra Lotfi, Andrea Martinelli, Thea Mattivi, Flavio Melchiori, Mattia Pantarotto, Sofia Piconese, Federico Plasso, Mauro Romanato, Anna Rossi, Fabio Vedovelli, Serena Vivarelli.

Il problema

Il nostro compito era quello di costruire una rete unendo tante asticelle rigide della stessa lunghezza in modo da formare un reticolo piano che si potesse estendere all'infinito. Quali reti si possono costruire con queste limitazioni?

Strumenti per sperimentare

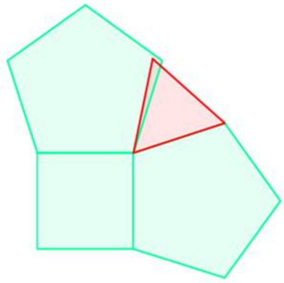
Abbiamo subito pensato che per lavorare sul problema avremmo dovuto immaginare le maglie di questa rete come dei poligoni sia non regolari sia regolari. Ci siamo ispirati ai mosaici, notando però che i lati delle tessere hanno spesso misure diverse.
Nella costruzione grafica delle reti spesso sfuggiva il controllo sulla lunghezza dei lati delle maglie.
Per ovviare a ciò abbiamo utilizzato barrette magnetiche del Geomag della stessa lunghezza sperimentando varie configurazioni.



Un altro strumento che abbiamo utilizzato è stato il software di geometria dinamica GeoGebra. Con esso ci siamo dedicati alla costruzione delle reti le cui maglie erano formate da poligoni regolari.

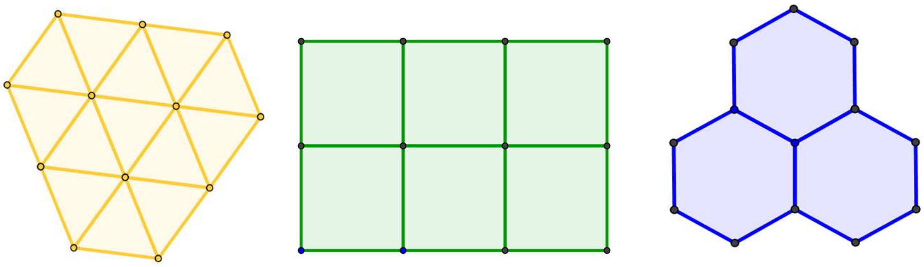
Reti di poligoni regolari

Se vogliamo costruire una rete con poligoni regolari dobbiamo prestare attenzione alla somma degli angoli su un vertice. La somma deve essere di 360° e le ampiezze utili sono solo quelle degli angoli interni dei poligoni regolari. Nella figura l'angolo compreso tra i due pentagoni è minore di 60° e non ci sono poligoni regolari con angoli di ampiezza inferiore a 60°.



Reti aventi come maglie poligoni regolari uguali

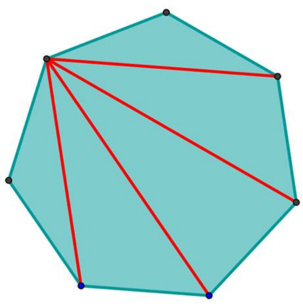
Accostando poligoni regolari uguali, dopo vari tentativi, abbiamo notato che gli unici che funzionano come maglie di una rete sono: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare.



Dimostriamo che sono le uniche

Bisogna dimostrare che il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare sono gli unici poligoni regolari che funzionano. La condizione da rispettare è la seguente: la somma delle ampiezze degli angoli che hanno in comune un nodo deve essere di 360°. Se p è il numero di poligoni che si uniscono in un vertice deve valere la formula $\alpha \cdot p = 360°$, dove α è l'ampiezza dell'angolo interno del poligono regolare.

Ci serve una formula con cui calcolare l'ampiezza α dell'angolo interno di un qualsiasi poligono regolare. Abbiamo trovato la seguente: $\alpha = 180°(n-2)/n$ dove n rappresenta il numero dei lati del poligono. Perché la formula dell'angolo interno è questa? In ogni poligono regolare è possibile tracciare, a partire da un vertice, un certo numero di diagonali. Si otterranno tante diagonali quanti sono gli n vertici (quindi gli n lati) meno tre. Infatti non si ottengono diagonali unendo il vertice con sé stesso e con i due vertici vicini a destra e a sinistra. In questo modo riusciamo a suddividere il poligono in tanti triangoli quanti sono i suoi vertici meno due. Poiché sappiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180°, moltiplicando il numero degli n-2 triangoli per 180° otteniamo la somma degli angoli interni del poligono stesso. Dividendo poi questo numero per il numero n dei suoi vertici otteniamo l'ampiezza del suo angolo interno.



Tornando alla relazione $\alpha \cdot p=360°$ e sostituendo ad α la sua espressione otteniamo la formula:

$$180°(n-2)p/n = 360°$$

dove n è il numero di lati del poligono regolare e p rappresenta il numero di poligoni regolari che convergono in un nodo per completare l'angolo giro.
Manipolando la formula abbiamo espresso p in funzione di n:

$$180°(n-2)p/n = 360° \quad \Leftrightarrow$$
$$(n-2)p/n = 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$p = 2n/(n-2)\ .$$

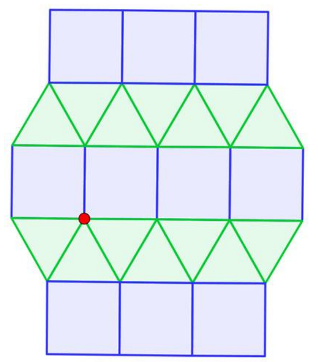
Su n e p ci sono delle limitazioni. Infatti il numero n dei lati appartiene ai numeri naturali maggiori o uguali a 3 perché i poligoni devono avere almeno tre lati, e il numero p dei poligoni deve essere un numero naturale maggiore o uguale a 3 perché se fosse minore l'angolo interno del poligono dovrebbe essere maggiore o uguale a 180°. Con queste condizioni non ci resta che risolvere l'equazione in due incognite $p = 2n/(n-2)$.
Assegniamo i valori ad n e verifichiamo se sono soddisfatte le condizioni su p.

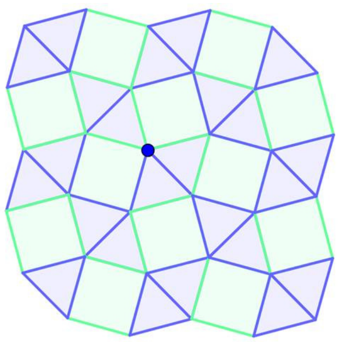
n	$p = 2n/(n-2)$	$(p\in N)\wedge(p\geq 3)$
3	6	Sì
4	4	Sì
5	10/3	no $(p\notin N)$
6	3	Sì
7	14/5	no $(p\notin N)\wedge(p<3)$

Per n maggiore di 6, il numero p dei poligoni necessari per completare l'angolo di 360° diventerebbe minore di 3. Abbiamo così dimostrato che gli unici poligoni regolari con cui possiamo costruire una rete a maglie uguali sono il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare.

Reti aventi come maglie poligoni regolari diversi e nodi tutti dello stesso tipo

Naturalmente si possono costruire anche reti con poligoni regolari di diverso tipo. Queste che presentiamo in figura sono due delle otto configurazioni con più di un poligono regolare e nodi dello stesso tipo che abbiamo trovato per via euristica utilizzando il software di geometria dinamica "GeoGebra". La ricercatrice ci ha informati che queste sono le uniche possibili di questo tipo e che la dimostrazione è analoga a quella usata per le reti con maglie formate da un unico poligono regolare.

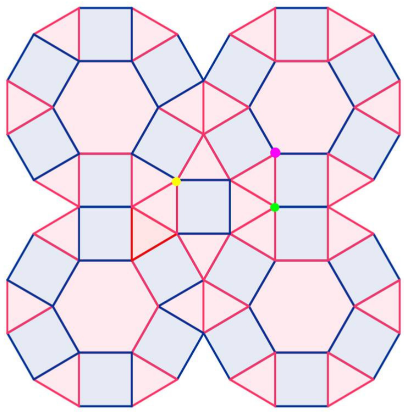




Le due reti sono diverse pur essendo costruite con gli stessi poligoni regolari. Nella prima al vertice rosso convergono tre triangoli e due quadrati (3,3,3,4,4). Nella seconda al vertice blu convergono tre triangoli e due quadrati ma in ordine diverso (3,3,4,3,4).

Reti con tipologie di nodi diverse

Le reti formate da poligoni regolari diversi possono anche avere, al loro interno, nodi di diverso tipo. Quella che presentiamo in figura è costruita con triangoli equilateri, quadrati ed esagoni regolari.



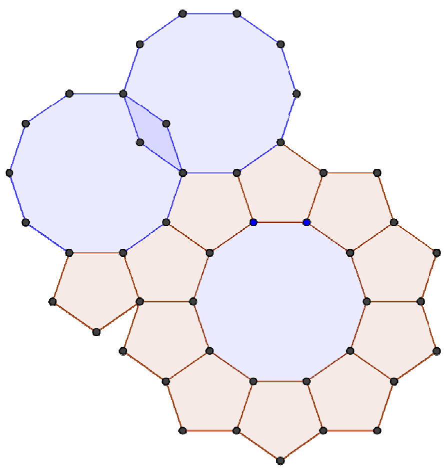
Si possono notare le tre tipologie diverse di nodi: vertice viola (6,4,3,4), vertice giallo (4,3,4,3,3) e vertice verde (3,3,3,4,4).

Il problema dell'estensione della rete

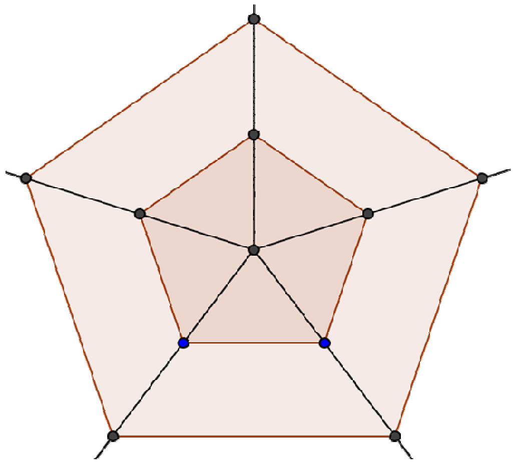
Solo alcune delle reti, formate da poligoni regolari possono estendersi all'infinito. Ad esempio quelle formate da maglie a forma di esagoni regolari o di quadrati o di triangoli equilateri.

Se vale la regola del Copia & Incolla, ovvero la possibilità di traslare un modulo formato da una o più maglie lungo due direzioni e riempire così tutto il piano, una rete può essere estesa all'infinito.

Alcune reti formate da più poligoni regolari sembrano rispettare la regola del Copia & Incolla, ma non è così! Infatti estendendole i poligoni si sovrappongono o si creano spazi vuoti che non possono essere coperti da altri poligoni regolari. Ne è un esempio la rete formata da decagoni e pentagoni rappresentata in figura.



Ci siamo anche posti il problema di costruire una rete a forma di ragnatela che rispetti le regole date e che si possa estendere all'infinito. Le sue maglie, a parte quelle a forma di triangolo vicino al centro, sono a forma di trapezio isoscele. Dopo alcune prove, ci siamo resi conto che con i vincoli dati non sempre è possibile farlo. Per esempio, la costruzione di una rete disposta su cinque assi, partendo da un pentagono, non funziona, perché cinque triangoli in cui è diviso il pentagono non sono equilateri e in questo modo non verrebbe rispettata la regola delle asticelle rigide e lunghe uguali.



Se costruiamo invece una ragnatela disposta su sei assi, partendo quindi da un esagono regolare, la rete rispetta le regole perché l'esagono regolare è formato da sei triangoli equilateri. Nella figura notiamo che ogni nuovo esagono può essere diviso in triangoli equilateri.
Ogni esagono è omotetico rispetto a quello iniziale, rispettivamente di rapporto due (al secondo esagono), tre (al terzo) e così via. Questo è il criterio per estendere la rete all'infinito.