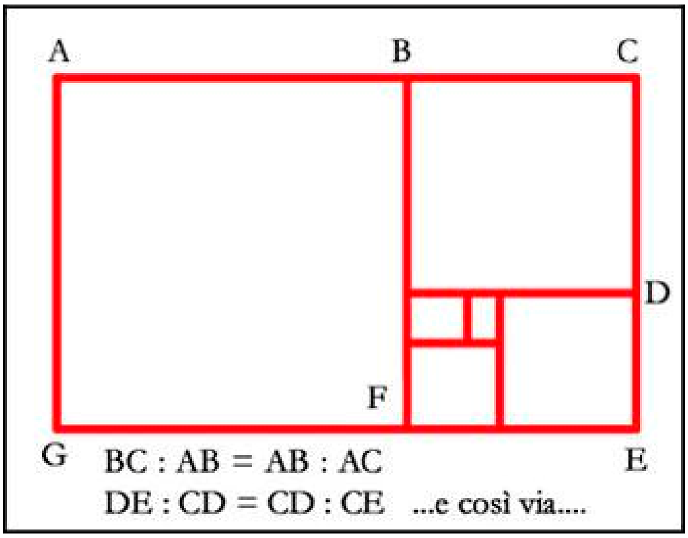
Bei rettangoli e belle spirali

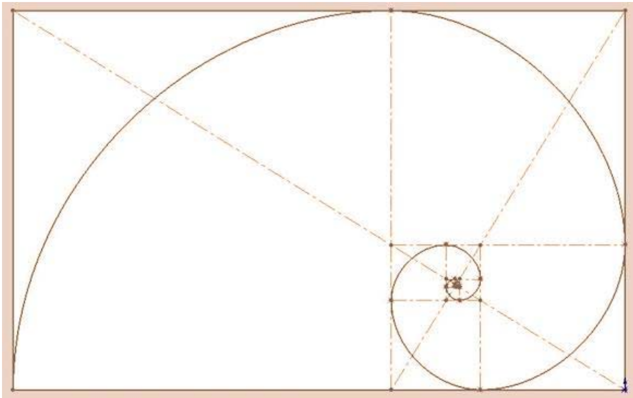
Liceo Scientifico "Italo Calvino" - Rozzano (MI)
Insegnanti di riferimento: Enrica Rosti, Maria Rosaria Guerra, Maria Stefania Strati.
Ricercatore: Federico Marini
Partecipanti: Eleonora Albanese, Marco Barracco, Andrea Bietti, Beatrice Bonelli, Simone De Cocco, Andrea Donadei, Lorenzo Gatto, Noemi Giangregorio, Giulia Guzzo, Alessandro Luberto, Maria Elena Martuscello, Francesco Mastrogiovanni, Jacopo Pasculli, Sara Peruffo, Alessio Ripamonti, Viola Scarselli, Stefano Villani.

Quanto è lunga la spirale? È possibile dire che la spirale ammette un centro? Se lo ammette dove è posizionato? Questo è il problema proposto ai partecipanti al progetto scolastico Math.en.Jeans dal ricercatore Federico Marini, del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano. L'obiettivo è quello di definire le coordinate del centro e la lunghezza di una spirale, se possibile. Grazie al ricercatore, abbiamo focalizzato il procedimento risolutivo e attraverso la collaborazione, l'impegno e la partecipazione di ciascun componente del gruppo siamo giunti alla risoluzione del problema. Provenendo da diverse classi del corso di studi, ciascuno di noi possedeva un diverso livello di conoscenze dell'argomento, perciò abbiamo dovuto utilizzare procedimenti matematici piuttosto semplificati e comprensibili a tutti. Abbiamo inizialmente notato che in un "bel" rettangolo, comunemente detto anche aureo, il rapporto tra i lati dei rettangoli costruiti via via al suo interno è costante e uguale a $\varphi=(\sqrt{5}+1)/2$.



La successione dei lati minori dei rettangoli costituisce quindi una progressione geometrica di rapporto $1/\varphi$ $(1, 1/\varphi, 1/\varphi^2, \ldots, 1/\varphi^n)$.
Abbiamo poi disegnato la cosiddetta "bella spirale". Essa è formata dall'unione di una serie di quarti di circonferenze che hanno per raggio la parte aurea (quella porzione di segmento che è

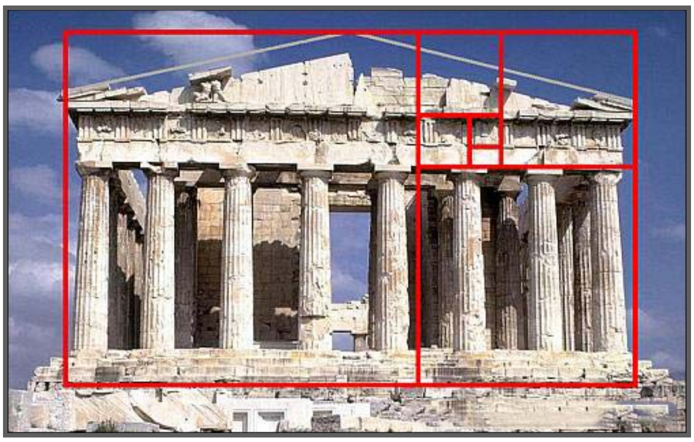
medio proporzionale tra l'intero e la parte restante) del lato maggiore del rettangolo (in un "bel" rettangolo la lunghezza della parte aurea del lato maggiore è uguale a quella del lato minore).



Anche la successione degli archi della spirale sarà quindi una progressione geometrica di rapporto $1/\varphi$ ($\pi/2, \pi/2*1/\varphi, \pi/2*1/\varphi^2,\ldots, \pi/2*1/\varphi^n$).
Abbiamo allora scritto la lunghezza della spirale come somma di n elementi di una progressione geometrica: $\mathbf{L= \pi/2*[(\varphi-\varphi^{n+1})/(\varphi^n-\varphi^{n+1})]}$. Se si considerano infiniti elementi ($n = \infty$) si ottiene

$$\mathbf{L= \pi/2*[\varphi/(\varphi-1)]}$$

ovvero la lunghezza della spirale**.** Abbiamo immaginato che il centro della spirale fosse il punto al quale essa si avvicina senza mai raggiungerlo**.** Considerato un sistema di riferimento cartesiano, avente origine nel vertice G del rettangolo della prima immagine, abbiamo scritto anche le coordinate del centro come somma di n elementi di una progressione geometrica, servendoci delle informazione che avevamo sui lati dei rettangoli. Con un procedimento analogo a quello utilizzato per ottenere la lunghezza della spirale (ponendo $n = \infty$), abbiamo individuato, come centro della spirale, il punto $\mathbf{C((5+3\sqrt{5})/10\ ;\ (5-\sqrt{5})/10)}$. La spirale, per quanto possa apparire inizialmente di lunghezza infinita, in realtà possiede una lunghezza finita e un centro. Ciò davvero non rispecchiava le nostre ipotesi di partenza!



In conclusione, quindi, non solo abbiamo ampliato le nostre conoscenze sull'argomento, ma abbiamo stretto nuovi rapporti di amicizia e abbiamo portato avanti un lavoro di cooperazione, in cui ognuno ha dato il suo piccolo contributo per giungere alla soluzione finale. È sicuramente essenziale imparare a lavorare in squadra poiché questa capacità di adattarsi ci ha consentito di imparare l'uno dall'altro nuovi concetti e nozioni. Così possiamo affermare che questa è stata un'esperienza davvero molto importante dal punto di vista formativo ed educativo, davvero un buon completamento del nostro corso di studi!