Vincere a testa o croce

Liceo "B. Russell" - Cles (TN)
Classe 3D
Insegnante di riferimento: Claretta Carrara
Ricercatrice: Ester Dalvit
Partecipanti: Alessio, Christian, Carlo, Daniele, Elena, Filippo, Ilaria, Ivan, Lorenzo, Martina, Massimo, Mattia, Paola, Tomàs

Un giocatore ha una somma a disposizione e gioca a testa o croce contro il banco, decidendo quanto puntare prima di ogni lancio. Esiste una strategia vincente?

Dopo che è stato esposto il problema, la classe è stata divisa nei seguenti gruppi:

GRUPPO1: Lorenzo, Paola e Tomàs
GRUPPO2: Carlo, Elena, Massimo e Ivan
GRUPPO3: Alessio, Martina e Daniele
GRUPPO4: Ilaria, Filippo, Mattia e Christian

Il gruppo 2 e il gruppo 4 hanno sperimentato delle differenti tecniche di puntata, mentre il gruppo 1 e il gruppo 3 si sono concentrati più che altro sul calcolo della probabilità di ogni evento, notando che c'era qualcosa che aveva a che fare con il triangolo di Tartaglia.

Nel seguito considereremo l'uscita testa, T, come una vittoria, V e l'uscita croce, C, come una sconfitta, S.

GRUPPO 2.

Nel secondo gruppo abbiamo sperimentato un metodo dove si inizia puntando 1: in caso di vittoria si punta sempre l'unità, ma in caso di perdita si punta il minimo per riuscire, in caso di vittoria, a superare la quota iniziale di una unità.
Ecco un esempio partendo con 10€: i soldi totali dopo ogni puntata sono scritti in grassetto.

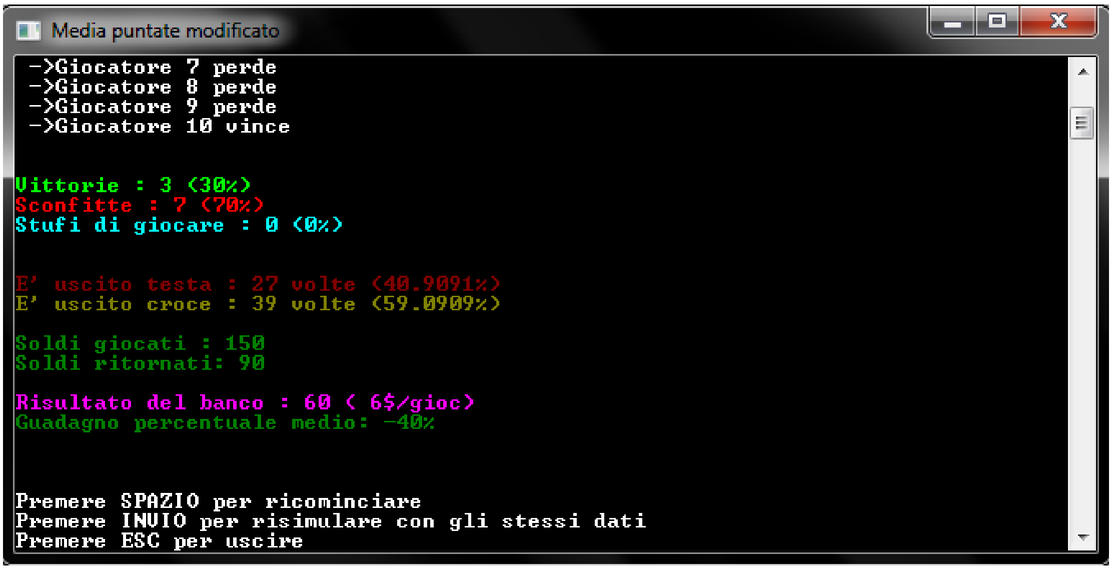
/ vinco: **12€**-->punto 1€
vinco: **11€**-->punto 1€
/ \ perdo: **10€**-->punto 1€
10€-->punto 1€
\ / vinco: **11€**-->punto 1€
perdo: **9€**-->punto 2€
\ perdo: **7€**-->punto 4€

Carlo ha preparato due programmi in C++, utilizzando la strategia più semplice, ossia quella con una puntata fissa, che verrà analizzata tramite i programmi.

1. Il primo programma è utile per calcolare il credito, le serie di teste e croci possibili e, quindi, la probabilità di ogni evento. Il programma considera una puntata fissa e un valore da puntare fisso, calcola il numero di lanci effettuati, le vittorie e le sconfitte, il credito massimo ottenuto e poi i simboli T (vittoria) e C (sconfitta) in serie per riassumere il tutto.
2. Il secondo programma è stato abbozzato da Carlo, modificato poi da Massimo, e concluso definitivamente da Alessio. Nel programma si può scegliere il numero di giocatori, i soldi iniziali dei giocatori, la puntata (fissa), il numero massimo di volte che i giocatori possono

puntare e quanti soldi devono avere i giocatori per poter uscire dal gioco, e quindi vincere. Il programma dà in output quindi:

- il risultato di ogni giocatore che può vincere, perdere oppure raggiungere il numero massimo di lanci possibili, e in questo caso il programma darà in output i soldi del giocatore;
- il numero e la percentuale di giocatori che vincono, perdono (hanno perso tutti i soldi) e che hanno raggiunto il limite di puntate;
- quante volte è uscita testa e croce, sia in numero che in percentuale;
- i soldi giocati in totale dai giocatori e quelli ritornati, sempre in totale, ai giocatori e i soldi guadagnati o persi dal banco, che sono ovviamente la differenza tra i soldi giocati e quelli ritornati ai giocatori;
- il guadagno percentuale medio dei giocatori: se è negativo significa che il banco ha guadagnato se è positivo che il banco ci ha perso.



Dopo avere fatto delle simulazioni, Carlo ha riempito un foglio excel e ha notato che, fissato un credito iniziale sempre uguale, se si aumenta la puntata la durata della giocata rimane approssimativamente invariata, mentre il valore massimo raggiunto aumenta. Quindi in questa valutazione media sembrerebbe più conveniente giocare un valore più alto perché, se è vero che alle prime puntate si ha una maggiore probabilità di arrivare a zero, se si vince all'inizio il credito raggiunto è molto più alto e aumenta più velocemente.

GRUPPO 4.

Nel gruppo 4 abbiamo invece utilizzato il seguente metodo: si mantiene la puntata minima se si vince, mentre in caso di sconfitta si aumenta la puntata di una unità.

```
                          / vinco-->punto 1€
        vinco-->punto 1€
      /                   \ perdo-->punto 2€
punto 1€
      \                   / vinco-->punto 1€
        perdo-->punto 2€
                          \ perdo-->punto 3€
```

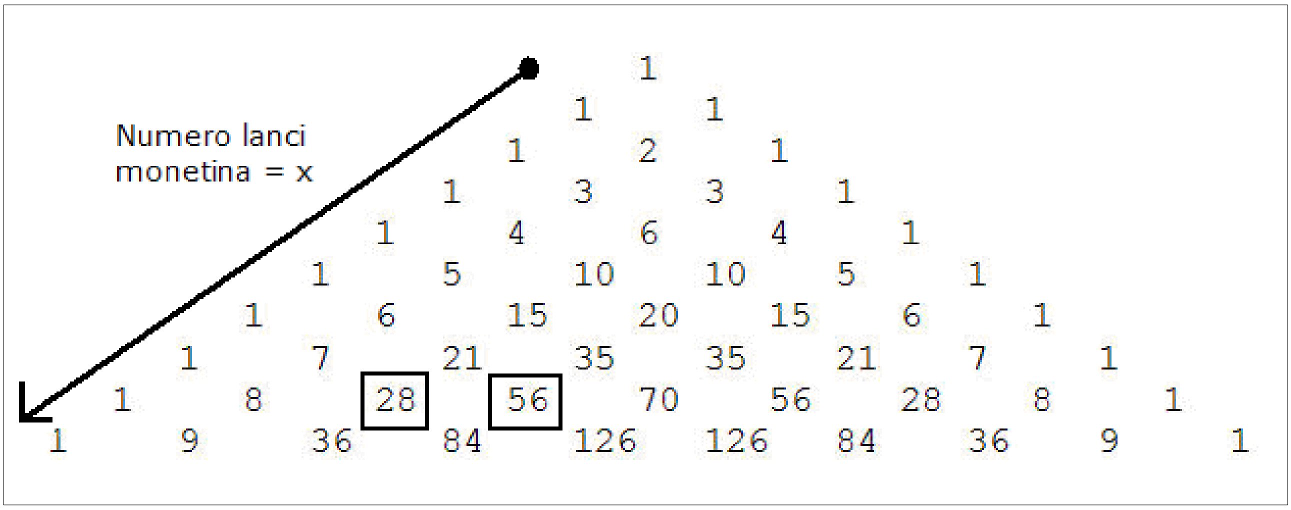
Considerando entrambe le tecniche abbiamo osservato che:

1. La somma dei soldi vinti e persi tra tutti i giocatori dopo un certo numero di lanci è sempre zero e questo significa che mentre il singolo giocatore vince o perde o rimane con i soldi di partenza, il banco non vince e non perde mai (ovviamente considerando un grande numero di giocatori).
2. Ci sono sempre più possibilità di vittoria che di sconfitta, ad esempio con quattro lanci:
   gruppo2: possibilità vittoria: 9/16
   possibilità sconfitta: 4/16
   possibilità di restare neutri: 3/16
   gruppo4: possibilità vittoria: 10/16
   possibilità sconfitta: 6/16
   possibilità di restare neutri: 0

Entrambe le strategie (questa e quella analizzata dal gruppo 2) sono più che altro conservative, perché non si vince mai molto considerato che dopo ogni vittoria si torna a puntare uno.

GRUPPO 1.

Nel gruppo uno abbiamo trovato in che modo il Triangolo di Tartaglia ha a che fare con il gioco della moneta:



Dato un numero x di lanci della monetina, i coefficienti della riga x del triangolo (senza considerare il vertice) indicano, dopo x lanci, in quanti modi differenti si può ottenere, nell'ordine:

- x volte T,
- $x-1$ volte T e quindi una volta C,
- $x-2$ volte T e quindi due volte C,
- ecc.

Ad esempio guardando l'ottava riga

1	8	28	56	70	56	28	8	1

- In un solo modo posso ottenere otto T consecutive,
- In otto modi posso ottenere sette T e una C.
- In 28 modi posso ottenere sei T e due C.
- In 56 modi posso ottenere cinque T e tre C.
- In 70 modi posso ottenere quattro T e quattro C.
- ecc.

Poiché con x lanci ho in totale 2^x possibili configurazioni, ogni coefficiente della riga x del triangolo, diviso per 2^x, rappresenta nell'ordine le probabilità di ottenere esattamente x volte T, esattamente $x-1$ volte T e una C, $x-2$ volte T e due volte C, ecc.

Abbiamo inoltre notato che, indicando con x il numero della riga del triangolo, il coefficiente a_n della riga x è uguale a:

$$a_{x,n} = a_{x,n-1} \cdot \frac{x-n+2}{n-1}$$

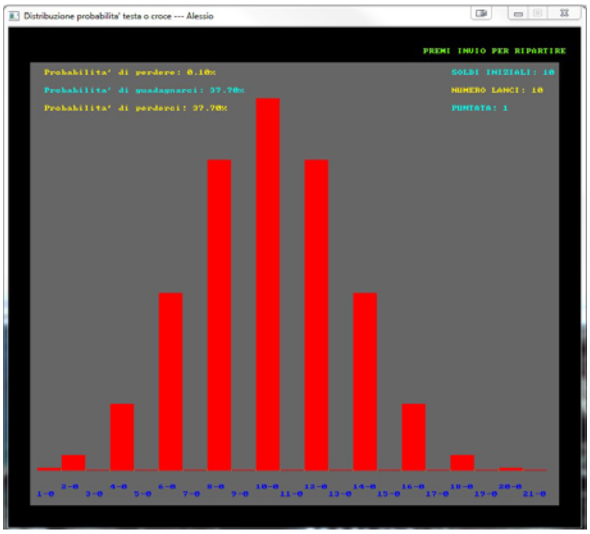
Ad esempio, il quarto coefficiente dell'ottava riga, $a_{8,4}$, è uguale al terzo coefficiente della stessa riga $a_{8,3}$ moltiplicato per $\frac{8-4+2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$, quindi $a_{8,4} = a_{8,3} \cdot 2 = 28 \cdot 2 = 56$, come si può osservare dai due numeri evidenziati tra cornici nell'immagine del triangolo.

Questa formula è però definita per ricorsione, non per calcolo analitico, e quindi per trovare un certo coefficiente bisogna conoscere quelli precedenti.

GRUPPO 3.

Nel gruppo 3 ci siamo concentrati, come nel gruppo 1, sul triangolo di Tartaglia.

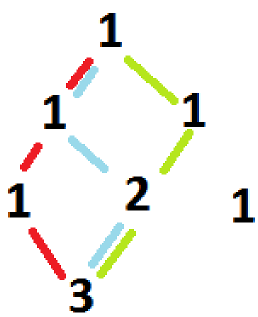
Abbiamo analizzato le varie righe e Alessio ha fatto un programma che disegna il grafico della distribuzione dei risultati possibili lanciando la moneta. Il programma esplicita anche le possibilità di perdere (cioè arrivare a 0), le possibilità di guadagnare (cioè avere più soldi di quelli di partenza), la possibilità di rimetterci (cioè avere meno soldi di quelli di partenza) e la percentuale mancante indica le possibilità di restare neutri (cioè restare alla stessa cifra che si aveva prima di puntare). Tali valori cambiano a seconda dei parametri di puntata (si può fare una puntata fissa oppure puntare una certa percentuale dei soldi che si hanno in quel momento) e dai soldi di partenza.



Ecco una spiegazione di come i due gruppi hanno capito che il gioco della monetina aveva a che fare con il triangolo di Tartaglia.

Si analizzano qui sotto tre lanci dove in ognuno posso vincere o posso perdere. Le possibilità di arrivare all' **1** è soltanto una, cioè perdere 3 volte di fila, mente per arrivare al **3** ho tre possibilità di strade, come si può osservare dalla figura sotto. Quindi i numeri 1 e 3, come tutti i numeri del triangolo di Tartaglia, rappresentano le strade possibili per arrivare a quel numero.

Lancio 0 **1**
C/ \T
Lancio 1 **1** **1**
C/ \T C/ \T
Lancio 2 **1** **2** **1**
C / \T C / \T C / \T
Lancio 3 **1** **3** **3** **1**



Dopo il terzo lancio, come si può vedere, ci sono:

- 1 possibilità di tre uscite croce: CCC,
- 3 possibilità di due croci e una testa: TCC, CTC, CCT,
- 3 possibilità di una croce e due teste: TTC, TCT, CTT,
- 1 possibilità di tre uscite testa: TTT

Nelle tre possibilità di due croci e una testa (come ovviamente quelle di una testa e due croci) cambia l'ordine delle uscite, infatti sono CCT, CTC e TCC, come si può vedere dall'immagine a fianco. Di conseguenza non si possono applicare le tecniche del secondo e quarto gruppo, perché per quelle tecniche è influente l'ordine in cui avvengono le sconfitte e le vittorie.

Abbiamo quindi cercato di trovare una funzione definita in maniera analitica, non ricorsiva, per calcolare i coefficienti del triangolo di Tartaglia.
A tale scopo abbiamo disegnato il triangolo sotto forma di tabella in cui vengono indicati i valori assunti da $T(x,y)$:

	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5
2	1	3	6	10	15
3	1	4	10	20	35
4	1	5	15	35	70

Ogni valore, come osservato prima, è uguale al numero dei percorsi diversi per arrivare in quel punto (spostandosi solo a destra o in basso). Rappresentando i lanci come una sequenza di teste e croci (es. CCT corrisponde a $(x,y)=(2,1)$ nella tabella) il valore di $T(x,y)$ è uguale al numero di combinazioni diverse di croci, x, e teste,y.
Disegniamo la sequenza di lanci per la posizione $(x,y)=(6,4)$.
Ci sono $x+y=10$ lanci, divisi in sei uscite C e quattro uscite T. Supponiamo di volere riempire una riga che rappresenti i dieci lanci e di scegliere in quali lanci posizionare le teste e le croci. Inizialmente abbiamo $x+y=10$ modi di mettere la prima C, poi 9, poi 8 fino a quando mettiamo tutte le sei C e rimangono libere le quattro caselle per le T.

T	C1	T	C2	T	C3	C4	C5	T	C6

Abbiamo $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$ modi di mettere le C, che possiamo scrivere più sinteticamente tramite la formula:

$$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{10!}{4!}$$

Generalizzando troviamo che il numero di disposizioni di x vittorie in $x+y$ lanci è uguale a

$$\frac{(x+y)!}{y!}$$

Vi sono però alcuni casi uguali, ad esempio i due casi seguenti:

T	C1	T	C2	T	C3	C4	C5	T	C6

T	C2	T	C5	T	C4	C1	C5	T	C3

Inoltre ci sono $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ modi di scambiare tra loro le C, in generale x! modi per scambiare le x sconfitte inizialmente posizionate. Quindi il valore di $T(x,y)$ è

$$T(x,y)=\frac{(x+y)!}{x!\,y!}$$

ALCUNE DIMOSTRAZIONI

Per concludere il lavoro abbiamo fatto due dimostrazioni.

LE STRATEGIE SONO "INUTILI"

Iniziamo con un esempio, consideriamo i quattro casi possibili, dove ogni giocatore porta uno dei casi. Inizialmente ogni giocatore possiede una cifra **S**. Al primo lancio, dove tutti fanno una puntata **p,** si realizzano, o meglio dovrebbero realizzare, due vittorie T, e due sconfitte C. Al secondo lancio, tutti puntano nuovamente **p** e si avranno quattro casi TT, TC, CT, CC.

p/ T: $S_1+p=S+2p$

esce T: $S_1=S+p$

p\ C: $S_1-p=S$

p/

S

p\

p/ T: $S_2+p=S$

esce C: $S_2=S-p$

p\ C: $S_2-p=S-2p$

Soldi iniziali: $4\cdot S$

Soldi dopo il primo lancio: $2\cdot(S_1+S_2)=2\cdot(S+p+S-p)=4\cdot S$

Soldi dopo il secondo lancio $(S_1+p)+(S_1-p)+(S_2+p)+(S_2-p)=2(S_1+S_2)=4\cdot S$

Quindi i soldi del banco restano invariati, ovvero, globalmente, non si vince e non si perde.

Adesso consideriamo un numero $2n$ di giocatori suddivisi in coppie dove, ad ogni lancio, uno punta testa l'altro croce, così uno vince e l'altro perde, per ottenere così tutti i casi possibili. Ognuno dei due giocatori di ogni coppia ha una cifra S_i e fa una puntata p_i con i=1, 2, …, n.

Inizialmente il totale **S** di tutti i soldi dei $2n$ giocatori è la somma dei soldi di ogni giocatore i, quindi i soldi totali sono:

$$S=2(S_1+S_2+\dots+S_n)$$

Si considera quindi la giocata successiva, dove ogni giocatore di ciascuna coppia punta la cifra p_i con i=1, 2, …, n. A questo punto i soldi totali dei giocatori saranno:

$$(S_1+p_1)+(S_1-p_1)+(S_2+p_2)+(S_2-p_2)+\dots+(S_n+p_n)+(S_n-p_n)=2(S_1+S_1+\dots+S_n)=S$$

La somma totale resta quindi invariata.

Possiamo concludere quindi dicendo che, se ci sono molti giocatori, il banco non vince e non perde mai. Non esiste quindi una strategia vincente considerando un elevato numero di giocatori e quindi il banco. In altre parole un giocatore in media vince 0.

Nei giochi reali di azzardo in media si perde, altrimenti il gestore del gioco non guadagnerebbe e andrebbe in fallimento. Facciamo quindi un esempio con la Roulette francese. Consideriamo 37 giocatori che puntano ognuno la stessa cifra S su ognuno dei 37 numeri (dallo 0 al 36). I soldi totali puntati dai giocatori sono quindi 37S. La pallina si fermerà su un numero: il giocatore che aveva puntato su quel numero vincerà 35 volte in più di quello che ha puntato, quindi 36S. Il restante S lo tiene il banco che, così facendo, non perde appunto mai.

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE DELLA FORMULA DI ALESSIO

Per definizione, ogni numero del triangolo di Tartaglia è la somma dei due numeri sovrastanti. In questo caso noi consideriamo il triangolo ruotato per poterlo rappresentare come una tabella e quindi più facilmente come funzione in *x*, verticale, e in *y*, orizzontale. Nel nostro caso, perciò, ogni numero sarà la somma del numero sovrastante e di quello alla sua sinistra.
Il triangolo di Tartaglia si può quindi definire così:

- $T(0,y)=1$: nella prima riga (x=0) tutte le celle contengono 1;
- $T(x,0)=1$: nella prima colonna ($y=0$) tutte le celle contengono 1;
- $T(x,y)=T(x-1,y)+T(x,y-1)$ con $x,y>0$: ogni numero è la somma di quello sovrastante e di quello a sinistra.

Dimostriamo per induzione la validità della formula

$$T(x,y)=\frac{(x+y)!}{x!\cdot y!}$$

- Dalla definizione di Tartaglia, sappiamo che $T(1,1)=T(0,1)+T(1,0)=1+1=2$. Utilizzando formula otteniamo: $\frac{(1+1)!}{1!\cdot 1!}=\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1}=2$

  Quindi la formula è valida per $x=y=1$.
- Supponiamo quindi che la formula sia vera fino a x, y con $x+y=n$ e verifichiamone la validità per $T(x+1,y)$ e $T(x,y+1)$.

  Dalla definizione del triangolo di Tartaglia sappiamo che:

  $$T(x+1,y)=T(x,y)+T(x+1,y-1)=\frac{(x+y)!}{x!\cdot y!}+\frac{(x+1+y-1)!}{(x+1)!\cdot(y-1)!}=\frac{(x+y)!\cdot(x+1)+(x+y)!\cdot y}{(x+1)!\cdot y!}=$$

  $$=\frac{(x+y)!(x+1+y)}{(x+1)!\cdot y!}=\frac{(x+y+1)!}{(x+1)!\cdot y!}$$

  Quindi anche in questo caso la formula è valida.

  Analogamente dalla definizione del triangolo di Tartaglia sappiamo che:

  $$T(x,y+1)=T(x-1,y+1)+T(x,y)=\frac{(x-1+y+1)!}{(x-1)!\cdot(y+1)!}+\frac{(x+y)!}{x!\cdot y!}=\frac{(x+y)!\cdot x+(x+y)!\cdot(y+1)}{x!\cdot(y+1)!}=$$

  $$=\frac{(x+y)!(x+y+1)}{x!\cdot(y+1)!}=\frac{(x+y+1)!}{x!\cdot(y+1)!}$$

  Anche in questo caso la formula è valida.

Abbiamo quindi dimostrato che, spostandosi verso destra o verso il basso da una qualsiasi posizione del triangolo di Tartaglia, la formula

$$T(x,y)=\frac{(x+y)!}{x!\cdot y!}$$

è valida.