

Vincere a testa o croce

Liceo Scientifico "Pascal" – Merano (BZ)

Classe 2 Liceo Scientifico Tecnologico

Insegnante di riferimento: Maria Elena Zecchinato

Ricercatrice: Ester Dalvit

Partecipanti: Jacopo Bottonelli, Davide Camuffo, Michele Corona, Luca Furlan, Marco Furlato, Faizul Islam, Alex Melchiori, Davide Osti, Davide Roperti, Mircea Stefan, Manuel Tondin, Nikolai Vanzo, Alessandro Viaro, Marco Zanolli.



Il problema posto chiede di rispondere alla seguente domanda:

esistono strategie vincenti per guadagnare giocando a testa o croce?

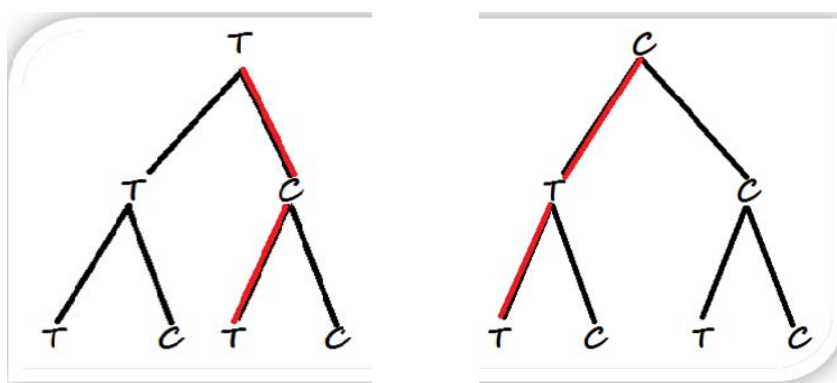
Abbiamo affrontato il problema facendo inizialmente dei test pratici, ma non siamo riusciti ad ottenere nessuna regola perché i risultati delle partite erano sempre diversi. Quindi ci siamo divisi in gruppi per cercare una strategia vincente. Per prima cosa abbiamo dovuto decidere cosa significa per noi vincere: finire con una somma di denaro maggiore rispetto a quella con cui si è iniziato.

Il problema ci diceva di partire con 10 euro in tasca e puntare ogni volta un numero intero di euro. Se avessimo perso tutto, non avremmo

più potuto giocare (non possiamo chiedere un prestito). Abbiamo però deciso di non considerare queste limitazioni, almeno nella prima analisi che abbiamo fatto.

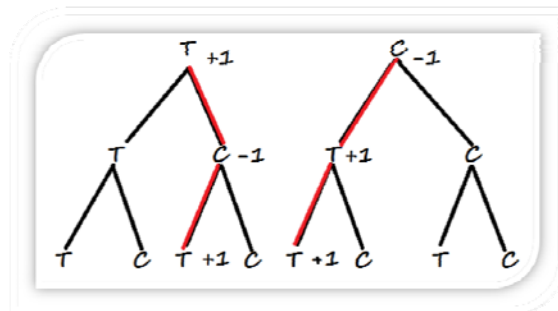
Per analizzare il nostro problema abbiamo schematizzato tutti i possibili risultati nel corso di varie partite. Con "PARTITA" intendiamo una sequenza di risultati Testa (T) o Croce (C). Abbiamo inoltre deciso che T corrisponde a una vittoria, C a una sconfitta. Lo possiamo fare senza preoccuparci, perché l'uscita di T e di croce C sono equivalenti.

Con 2 lanci otteniamo 4 diverse partite possibili, con 3 lanci otteniamo 8 partite; ad n lanci corrispondono 2^n partite.

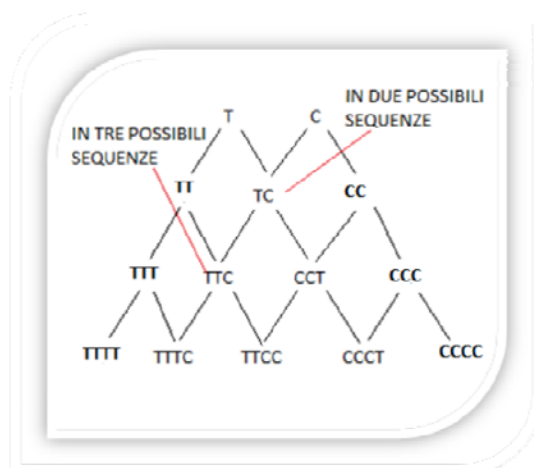


Dal grafico si può vedere che, anche se con "strade" diverse, si possono ottenere partite con lo stesso numero di TESTE e CROCI. Ad esempio T-C-T e C-T-T sono due diverse sequenze composte però dallo stesso numero di T e C (2T-1C).

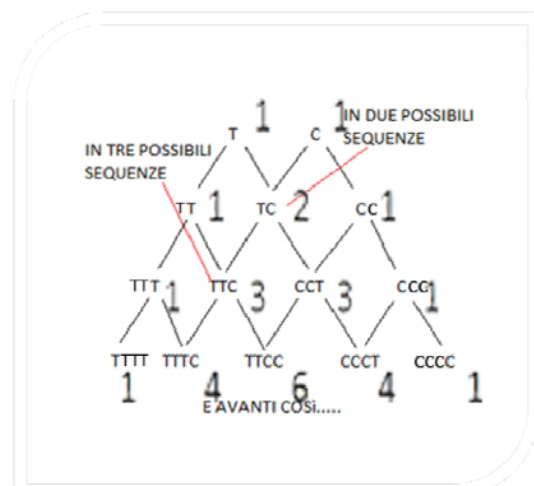
In una strategia in cui si punta sempre la stessa somma e lo stesso segno, non importa con che ordine escono i risultati, perché si finirà il gioco in ogni caso con la stessa somma. Infatti, ad es., T-C-T porta a $1-1+1=+1$ e T-T-C porta a $1+1-1=+1$.



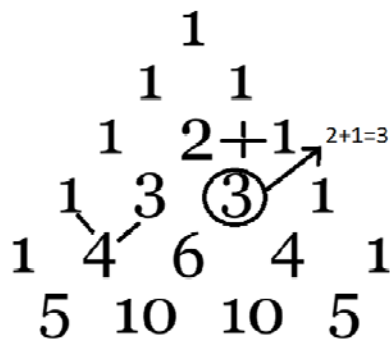
Abbiamo quindi "legato" tra loro le partite con lo stesso numero di teste o croci. TC si può manifestare in 2 possibili sequenze : TC e CT ; e TTC si può manifestare in 3 possibili sequenze: TTC o TCT o CTT.



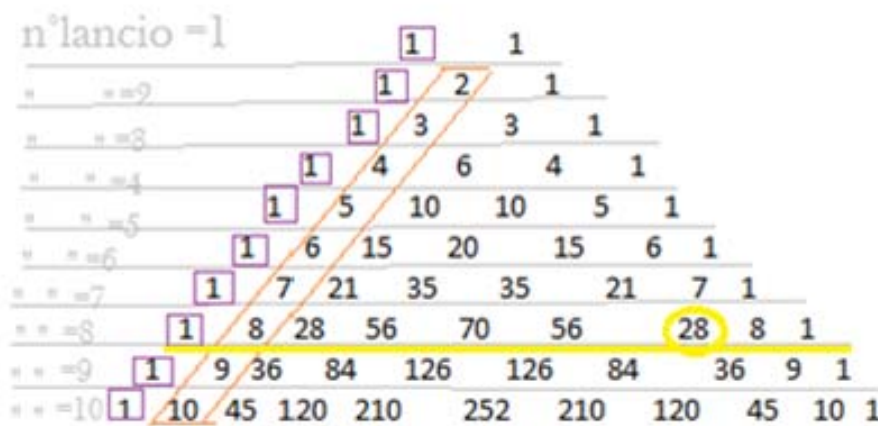
Contando le partite che contengono un ugual numero di teste e/o croci notiamo che il numero di sequenze possibili corrispondono ai coefficienti del triangolo di Tartaglia.



Ricordiamo che il Triangolo di Tartaglia è un triangolo "matematico" la cui costruzione avviene tramite la somma dei coefficienti, cioè ogni numero è la somma dei numeri che nella riga precedente gli stanno sopra. Agli estremi compare sempre il numero 1.



Forniamo una possibile chiave di lettura del triangolo:



Il n° di lanci si desume dalla seconda fascia obliqua evidenziata in arancione. Gli 1 che si trovano evidenziati in viola ai lati corrispondono alle sequenze con solo T o solo C. Se si desidera sapere a cosa corrisponde un numero all'interno del nostro triangolo basta, come prima cosa, guardare a quale n° di lancio corrisponde; poi partendo da uno dei due estremi, che corrispondono a sequenze di sole croci (o sole teste), ad ogni "passo" che si fa verso il centro si toglie una croce e si aggiunge una testa (o viceversa).

Leggendo l'ottava riga, per esempio, possiamo dire che in una partita con 8 lanci si possono ottenere:

1 partita con 8 T;

8 partite con 7T e 1C;

28 partite con 6T e 2C;

56 partite con 5T e 3C;

e così via.

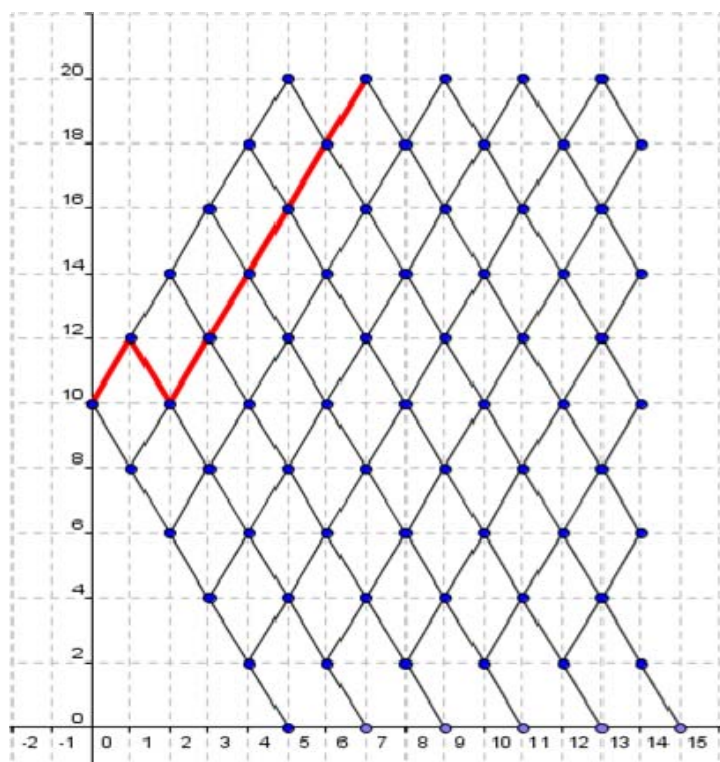
Abbiamo notato che una partita può essere anche rappresentata con il denaro posseduto (asse Y) in funzione dei lanci effettuati (asse X).

E per rappresentarla abbiamo utilizzato un grafico cartesiano dove:

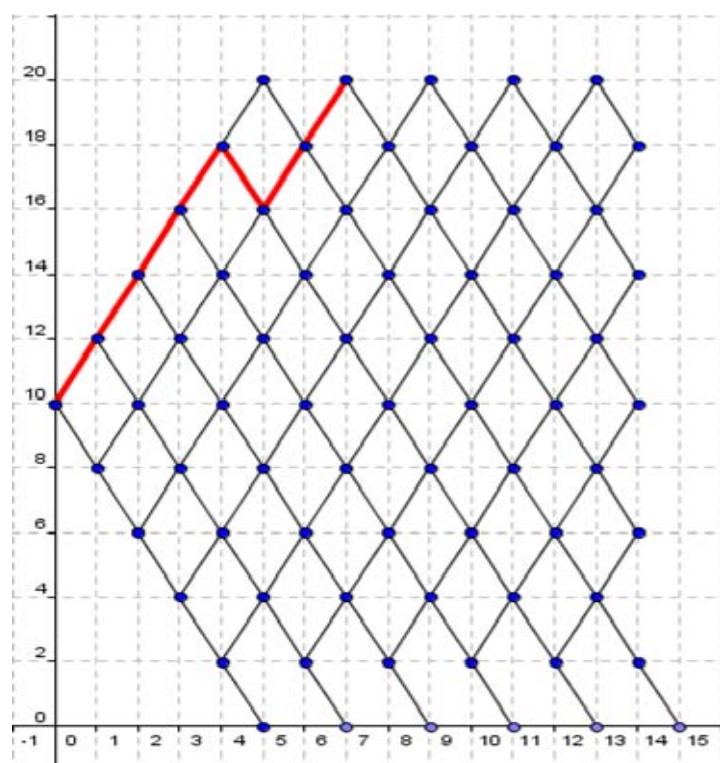
- ogni punto ha due coordinate, il numero di turni giocati come ascissa e la somma di denaro posseduta come ordinata;
- ad ogni punto posso arrivare percorrendo "cammini" diversi, che corrispondono a partite diverse, caratterizzate da successioni differenti di vincite e/o perdite;

Successivamente abbiamo iniziato a studiare le partite.

Per esempio se in una partita a testa o croce parto con 10€, punto 2€ ad ogni lancio, vinco la prima partita, perdo la seconda e vinco tutte le altre, in 7 lanci otterrò 20€.

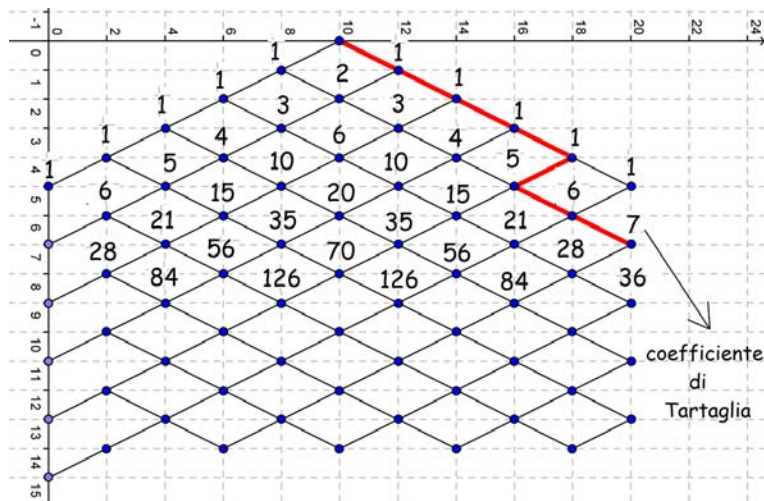


La domanda che ci siamo posti è la seguente: in quanti modi posso ottenere 20€ in 7 lanci? Potremmo vincere o perdere nei singoli lanci in un ordine diverso:



Esistono 7 modi per arrivare al punto (7;20), ovvero a 20 euro in 7 partite.

Osservando il nostro grafico cartesiano abbiamo notato che esso, se ruotato e interpretato correttamente, risulta essere il TRIANGOLO di TARTAGLIA.



Grazie a questo grafico siamo riusciti a semplificare il metodo per ottenere il numero di cammini che portano ad un punto. Ovvero: *il numero di cammini che portano ad un punto è uguale al coefficiente di Tartaglia di quel punto.*

Che probabilità abbiamo di vincere? Cosa si intende per probabilità?

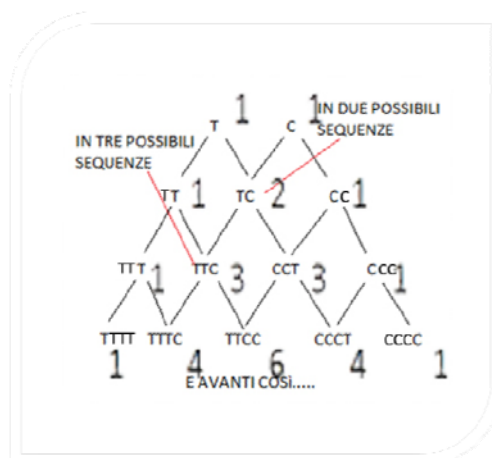
Poniamo delle condizioni:

1. La probabilità è espressa in percentuale da un minimo di 0% (impossibile) ad un massimo di 100% (sicuro). Si può esprimere anche in frazione.
2. Quando calcolo la probabilità devo scegliere se valutare la sequenza (ad esempio TTC) oppure il complesso dei risultati (ad esempio 2 T e 1 C): la scelta effettuata (sequenza oppure complesso dei risultati) modifica il metodo di calcolo della probabilità.

Definiamo la probabilità di un evento E il rapporto tra i casi favorevoli al suo verificarsi diviso per il numero di tutti i casi possibili che si possono verificare.

$$\text{Prob}(E) = \frac{\text{Casi}_{\text{Favorevoli}}}{\text{Casi}_{\text{Possibili}}}$$

Per esempio, dal grafico



deduciamo che la partita 3T ha probabilità $\frac{1}{8}$ di verificarsi, la partita 2T 1C ha probabilità $\frac{3}{8}$, la partita 2T 2C ha probabilità $\frac{6}{16}$,

E, dal grafico cartesiano, per ottenere 20 euro in 7 lanci, abbiamo 7 possibilità su 128; dove 7 è il coefficiente di Tartaglia e 128 risulta essere 2^7 ovvero il numero di partite possibili con 7 lanci.

$$\text{Prob}(x;y) = \frac{\text{coefficiente}_{di_Tartaglia}(x;y)}{2^n}$$

in cui con $\text{Prob}(x;y)$ intendiamo la probabilità di ottenere la somma y con una partita di x lanci. La vincita media, ovvero la somma di denaro che mediamente possediamo dopo aver giocato, si può calcolare in due modi.

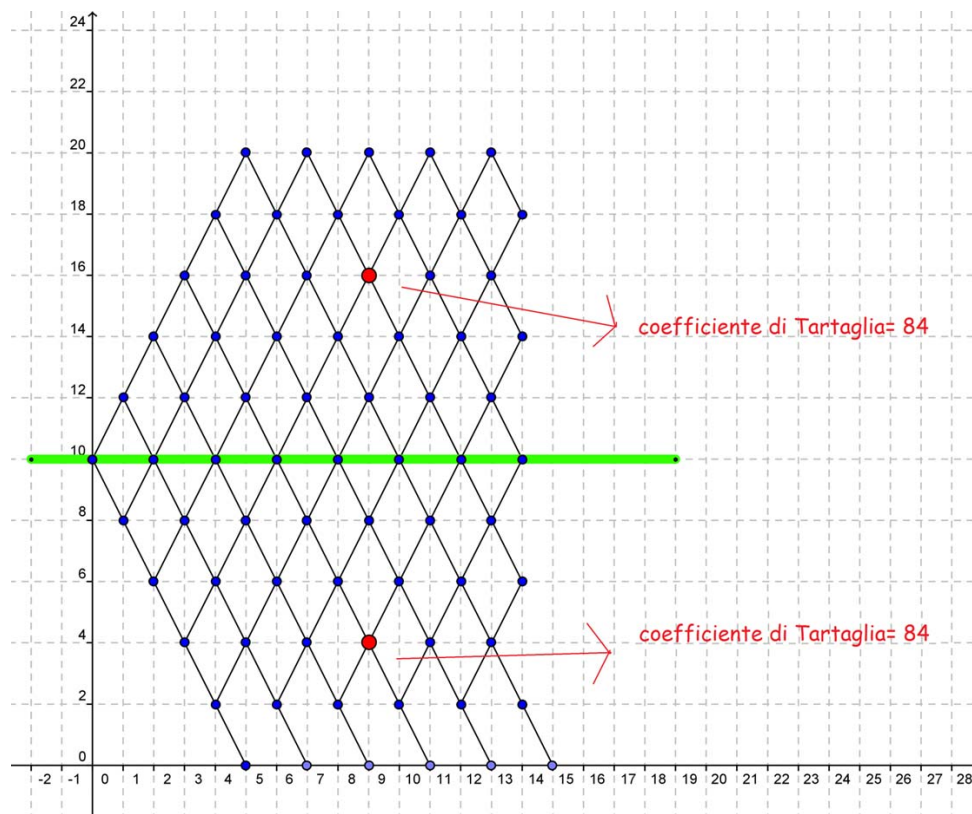
Il primo è un modo "pratico", che consiste nello schematizzare tutte le possibili partite con un diagramma ad albero che mostri anche la quantità di denaro posseduta seguendo una determinata partita. In questo modo basterà sommare tutte le quantità di uno stesso lancio (riga del diagramma) e dividere per il numero delle quantità.

Il secondo è il metodo "teorico". Se partiamo con una somma S di denaro, dopo il primo lancio potremo avere una vincita x o una perdita $-x$. La media di questi due risultati è

$$\frac{S+x+S-x}{2} = S$$

Non si ha quindi né una vincita, né una perdita. I lanci successivi, presi singolarmente, saranno sempre del tipo $S+x_n$ e $S-x_n$, la cui media risulta sempre S .

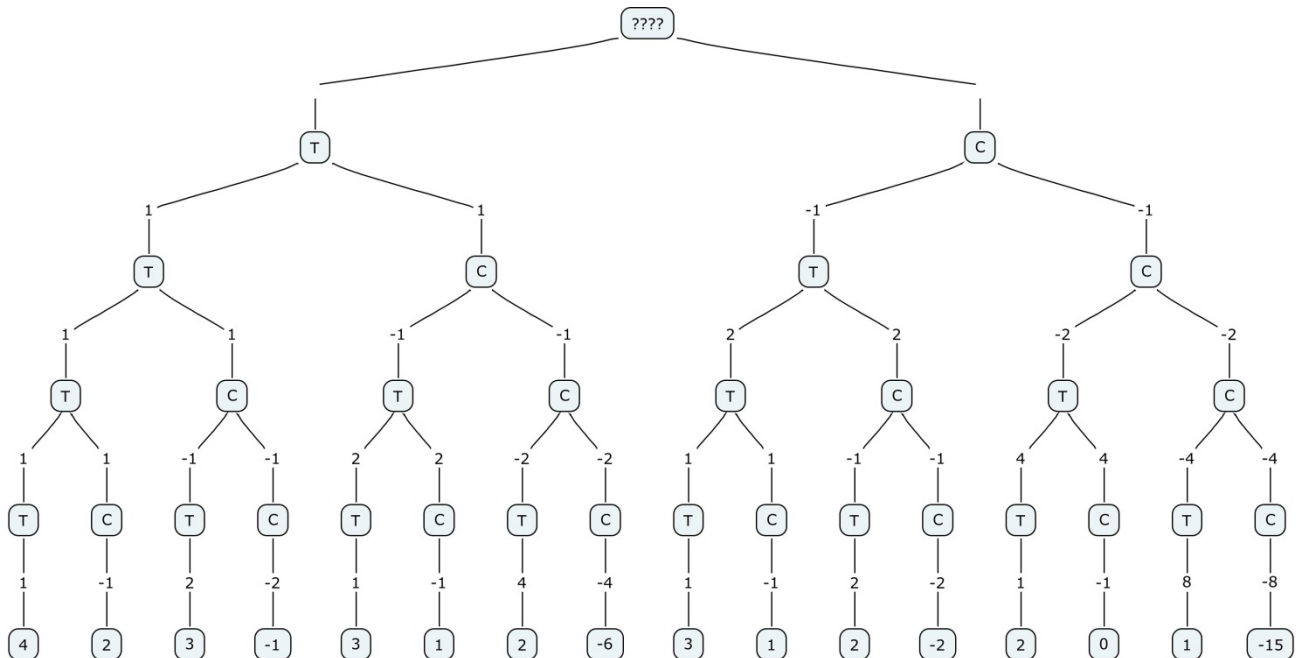
Possiamo quindi affermare che, giocando a testa o croce, in media, non vinciamo e non perdiamo. Si vede anche dal grafico seguente che, per simmetria, la probabilità di vincere o perdere la stessa somma è la stessa.



Secondo la nostra analisi, la strategia con cui è più probabile vincere è:

- ad ogni tentativo puntiamo 1€ cioè la puntata minima;
- se vinciamo ripuntiamo la puntata minima;
- se perdiamo raddoppiamo la puntata.

In questo modo basterà vincere una sola volta per recuperare tutte le perdite precedenti.



Sommando tutti i valori ottenuti nell'ultima riga, si ottiene come risultato il numero 0, come ci aspettavamo dal nostro calcolo "teorico" della media delle vincite. Quindi, secondo i calcoli, non vinciamo e non perdiamo, però in generale abbiamo più possibilità di vincere piuttosto che di perdere perché basta solo una vincita per recuperare tutto ciò che si aveva perso guadagnando la giocata minima.

Abbiamo anche analizzato qualche altra strategia, ma non la riportiamo perché non ci sembra significativa.

Dopo aver tenuto conto di tutte le scoperte, possiamo concludere che:

- giocando a testa o croce, in media, non si vince e non si perde, qualsiasi strategia noi usiamo;
- esistono particolari strategie, come quella appena illustrata, che consentono di avere maggior probabilità di vincita rispetto a quella di perdita. In questo caso, però, le perdite sono più ingenti delle vincite, ma meno probabili. La media delle vincite rimane comunque 0.