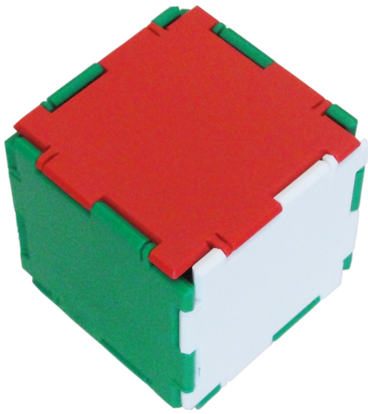
Carattere cubitale

Liceo delle scienze applicate Rainerum - Bolzano
Classe: 2°B
Insegnante di riferimento: Maddalena Angeli
Ricercatore: Matteo Bortolotto
Ragazzi partecipanti: Eleonora Acuti, Giovanni Brugnoli, Elia Chiusa, Pietro Culin, Laurence Gallo, Lorenzo Gavioli, Marco Guarda, Gianluca Iannece, Alessandro Mazzilli Muratore, Gabriele Mazzoni, Lorenza Mottinelli, Dajt Mullaj, Raffaele Mura, Corrado Pansoni, Matteo Pellitteri, Marco Poletti, Matteo Polita

Abbiamo un cubo, colorato in modo che se ne riesca a riconoscere l'orientazione, e una scacchiera le cui caselle hanno le stesse dimensioni delle facce del cubo. Dunque se posiziono il cubo su una casella e lo faccio ribaltare lungo uno dei lati, andrà a cadere dentro una casella adiacente. La domanda è: partendo da una casella a scelta, in quali caselle si può far arrivare il cubo a forza di ribaltamenti ricostruendo l'orientazione originale?



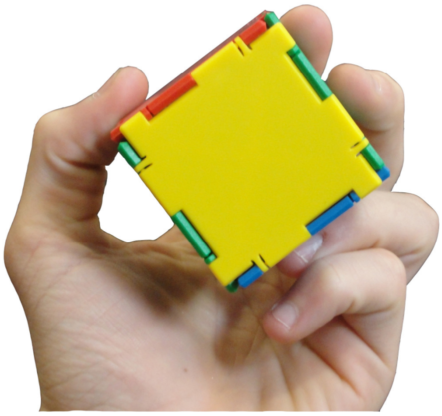
Abbiamo iniziato a lavorare divisi a gruppi e ci è stata fornita una scacchiera 4x4 per le prime analisi, che successivamente è stata sostituita da scacchiere più o meno grandi. Ci è stato fornito anche un cubo con le facce di colori diversi, per riconoscerne l'orientazione. Ma cos'è l'orientazione? È il modo in cui un oggetto è direzionato. E come annotare gli spostamenti del cubo sulla scacchiera. Abbiamo trovato vari metodi di notazioni, a "battaglia navale", a "frecce" o a "scacchiera numerata", e ogni gruppo ha utilizzato un criterio diverso, scegliendo quello che preferiva per affrontare il problema.

Già dalla prima lezione abbiamo notato che da una casella bianca (nera) si riesce ad arrivare con l'orientazione iniziale solo su una casella bianca (nera) dello stesso colore. Occorreva però dimostrare questa affermazione.

Abbiamo quindi incontrato una seconda regolarità: tutte le sequenze di mosse che portano il cubo nell'orientazione iniziale sono composte da un numero pari di mosse. Come sfruttare questa affermazione per dimostrare la prima? Alla fine abbiamo capito che erano legate tra loro: il cubo, che si trova su una determinata casella, ad ogni mossa si ritrova su una casella adiacente, che è di colore diverso, e quindi se il cubo fa un numero di mosse dispari finisce su una casella di colore diverso a quella di partenza, mentre se fa un numero pari di mosse finisce su una casella dello stesso colore di quella di partenza. Allora dimostrando che tutte le sequenze che riportano il cubo nella stessa orientazione di partenza sono pari, si dimostra anche che il cubo torna nella stessa orientazione di partenza solo su una casella dello stesso colore di quella iniziale. Per dimostrare il fatto che le sequenze erano sempre pari ogni gruppo adottò sistemi differenti.

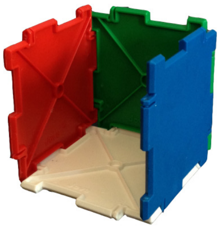
Per dimostrare che occorre avere sequenze costituite da un numero pari di mosse abbiamo adottato diverse strategie. Una di queste è il “Cubo Zoppo”. Il Cubo Zoppo è un cubo dal quale sono state rimosse una o più facce, che non possono toccare la scacchiera. Ovviamente le mosse del Cubo Zoppo sono limitate e ben presto ci siamo accorti che non era una buona strategia per arrivare alla soluzione del problema.

Abbiamo usato la “tecnica specchio”: fissato un asse di simmetria della scacchiera, i movimenti del cubo da una parte danno luogo ad altri movimenti simmetrici dall’altra. Abbiamo creato così una tabella annotando vari percorsi.



Numero sequenza	Sequenza madre	Sequenza specchiata	Tipo di simmetria
1	↤↓→↑→↓	→↓↤↑←↓	Rispetto a asse y verso dx
2	↤↓→↑→↓	↓←↑←↓→	Rispetto a y verso sx
3	↤↓→↑→↓	↓→↑→↓←	Rispetto a y verso sx x2
4	↤↓→↑→↓	↓←↑→↑←	Rispetto a x verso basso
5	↤↓→↑→↓	↑←↓→↓←	Ruota di 90° senso orario
6	↤↓→↑→↓	↓→↑←↑→	Ruota 90° senso antiorario
7	↤↓→↑→↓	↑→↓←↓→	Rispetto a asse x verso alto

Legenda:
- Sequenza Madre: è la sequenza degli spostamenti che si prende come riferimento.
- Sequenza Specchiata: è la simmetrica della Sequenza Madre rispetto all’asse di simmetria descritto nell’ultima colonna.
- Tipo di Simmetria: indica il tipo di simmetria adottato di volta in volta.



Abbiamo lavorato anche sui cicli, dove per cicli intendiamo sequenze di mosse che riportano il cubo nella posizione iniziale. Abbiamo creato una tabella nella quale abbiamo riportato le varie orientazione del cubo e le sequenze di mosse più brevi per ottenerle, che abbiamo chiamato sequenze base. Grazie a questa tabella e ad altre osservazioni successive siamo riusciti a dimostrare che non esistono cicli con più di tre ripetizioni. O meglio si è quasi riusciti a dimostrarlo. Mancava da dimostrare, infatti, la seguente affermazione: ogni sequenza di mosse dispari porta ad una orientazione che nella tabella è associata ad una sequenza base dispari. Viceversa una sequenza di mosse pari porta dopo un giro ad una orientazione che nella tabella è associata ad una sequenza base pari. Dimostrare quest'affermazione equivaleva, oltre a dimostrare che non esistono cicli superiori a tre giri, a dimostrare che le sequenze che portano il cubo nella stessa orientazione di partenza sono sempre pari.

E finalmente siamo arrivati al momento in cui, dopo mesi di lavoro, abbiamo capito che tutto quello che avevamo osservato e/o dimostrato era conseguenza di un unico fatto molto più breve e semplice. Perché ogni sequenza dispari è riconducibile ad una sequenza base dispari e una sequenza pari ad una sequenza base pari? Perché in realtà non esistono sequenze base e ogni sequenza può essere considerata tale. Infatti, ecco il concetto fondamentale, determinate orientazioni si ottengono **solo** con un numero dispari di mosse, mentre altre orientazioni si ottengono **solo** con un numero pari di mosse. Questo potrebbe spiegare perché si ottiene l'orientazione iniziale solo con un numero pari di mosse, e quindi solo su una casella dello stesso colore di quella di partenza. Manca, però, la dimostrazione di tale affermazione. Abbiamo creato dunque una nuova tabella. Considerata per prima una determinata orientazione, abbiamo considerato le quattro orientazioni ottenibili con un qualsiasi spostamento del cubo. Queste sono le orientazioni dispari (D), ovvero, quelle che si ottengono con un numero dispari di mosse, in questo caso una. Consideriamo ora queste quattro orientazioni e, per ognuna di esse, le altre quattro orientazioni ottenibili con uno spostamento. E queste sono le orientazioni pari (P). Così via finche non si sono considerate tutte e 24 le orientazioni del cubo. Si può quindi notare che ogni orientazione P si ottiene solo dopo una orientazione D e viceversa. Quindi ogni orientazione è ottenibile con un numero pari o dispari di mosse a seconda di quale orientazione sia stata utilizzata come iniziale. In particolare l'orientazione iniziale è quindi ottenibile solo con un numero pari di mosse.

Orientazioni	←	→	↑	↓
5/1 P	3/1 D	4/1 D	1/2 D	6/5 D
3/1 D	2/1 P	5/1 P	1/4 P	6/3 P
2/1 P	4/1 D	3/1 D	1/5 D	6/2 D
4/1 D	5/1 P	2/1 P	1/3 P	6/4 P
1/2 D	3/2 P	4/2 P	2/6 P	5/1 P
3/2 P	6/2 D	1/2 D	2/4 D	5/3 D
4/2 P	1/2 D	6/2 D	2/3 D	5/4 D
6/2 D	4/2 P	3/2 P	2/1 P	5/6 P
1/3 P	5/3 D	2/3 D	3/6 D	4/1 D
5/3 D	6/3 P	1/3 P	3/2 P	4/5 P
6/3 P	2/3 D	5/3 D	3/1 D	4/6 D
2/3 D	1/3 P	6/3 P	3/5 P	4/2 P
2/4 D	6/4 P	1/4 P	4/5 P	3/2 P
6/4 P	5/4 D	2/4 D	4/1 D	3/6 D
1/4 P	2/4 D	5/4 D	4/6 D	3/1 D
5/4 D	1/4 P	6/4 P	4/2 P	3/5 P
3/5 P	1/5 D	6/5 D	5/4 D	2/3 D
1/5 D	4/5 P	3/5 P	5/6 P	2/1 P
4/5 P	6/5 D	1/5 D	5/3 D	2/4 D

6/5 D	3/5 P	4/5 P	5/1 P	2/6 P
4/6 D	2/6 P	5/6 P	6/3 P	1/4 P
2/6 P	3/6 D	4/6 D	6/5 D	1/2 D
3/6 D	5/6 P	2/6 P	6/4 P	1/3 P
5/6 P	4/6 D	3/6 D	6/2 D	1/5 D