Cartolina dallo spazio

Un astronauta si trova su una navicella spaziale che orbita attorno alla Terra e deve misurare l'area di un triangolo che possiede i suoi vertici nelle città di Milano, Berlino e Mosca. Per fare ciò ha a sua disposizione soltanto due strumenti, uno per misurare le lunghezze e uno per misurare le ampiezze degli angoli. Può effettuare questa operazione? Se sì, sono necessari entrambi gli strumenti?

Liceo Scientifico Interculturale Collegio "San Carlo" – Milano
Classi II B e II D
Insegnante di riferimento: Francesca Perugino
Ricercatore: Elena Panzeri
Partecipanti: Niccolò Bevacqua, Riccardo Broggi, Pietro Maronati, Ilaria Navone, Emanuele Scalfi, Benedetta Spadaro, Giovanni Tarizzo

Durante il primo incontro conosciamo la ricercatrice Elena Panzeri, che ci pone il quesito riportato qui sopra.
Ci siamo scervellati su possibili metodi di risoluzione e subito abbiamo capito che la geometria euclidea non era utile alla soluzione del problema.
Ci trovavamo su un terreno per noi del tutto inesplorato: la geometria su una superficie sferica.
Così abbiamo deciso di utilizzare alcuni oggetti sferici facilmente reperibili e manipolabili e abbiamo iniziato con un pomelo per poi passare all'uso delle arance.

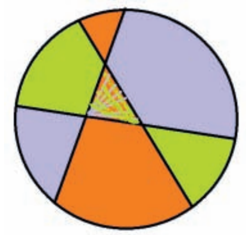
Con il pomelo ci siamo subito resi conto che l'area di due triangoli con gli stessi lati, ma uno su un piano e uno su una sfera, non sono uguali.

Utilizzando arance ed elastici, abbiamo definito gli enti fondamentali della geometria sulla sfera e abbiamo capito che il corrispondente del segmento sulla sfera è un tratto di circonferenza massima.
Abbiamo osservato che gli angoli sulla sfera, come sul piano, sono individuati dall'intersezione di due rette (circonferenze massime) e anche che gli angoli sulla sfera delimitano una superficie limitata, che abbiamo chiamato "spicchio". In realtà abbiamo visto che una coppia di circonferenze massime individua sempre quattro spicchi a due a due congruenti.
Utilizzando la proporzione: $A_S : A_{TOT} = \alpha : 360°$ (dove α indica l'angolo dello spicchio) siamo riusciti a trovare l'area A_S di ciascuno spicchio:

$$A_S = \frac{\alpha \cdot A_{tot}}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 = 2\alpha r^2.$$

Sempre con i nostri strumenti "pratici" siamo riusciti a comprendere che un triangolo su una sfera equivale all'intersezione di tre spicchi.

Colorando gli spicchi congruenti con lo stesso colore, abbiamo osservato che utilizzando tre colori diversi si riesce a colorare tutta la sfera. Abbiamo notato inoltre che il triangolo risultante dall'intersezione degli spicchi viene colorato tre volte. Stessa cosa avviene per il triangolo diametralmente opposto.



In conclusione, chiamando α, β e γ gli angoli del triangolo e considerando la misura degli angoli in radianti:

$$\sum A_{spicchi} = A_{sfera} + 4A_{triangolo}$$

$$A_{triangolo} = \frac{\Sigma A_{spicchi} - A_{sfera}}{4}$$

$$A_{triangolo} = \frac{2(2\alpha r^2) + 2(2\beta r^2) + 2(2\gamma r^2) - 4\pi r^2}{4}$$

$$A_{triangolo} = \frac{4r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)}{4} = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Dopo questo ragionamento abbiamo potuto affermare con certezza che il nostro astronauta può calcolare l'area del triangolo e che ha bisogno solo della misura degli angoli.
Ci siamo chiesti allora come possano essere gli angoli del triangolo sulla sfera dato che (con quello che abbiamo appena visto) ci siamo resi conto che non è più vero che la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°.
Abbiamo verificato con spilli, elastici e palla di polistirolo che può esistere, per esempio, un triangolo con due angoli retti. E, poiché l'area non può essere negativa, la somma degli angoli interni è sicuramente maggiore di un angolo piatto.
Può esistere anche un triangolo con tre angoli retti, quindi la somma degli angoli interni di un triangolo su una sfera non è costante.

Arriviamo così a dire che:
- sul piano i lati del triangolo ne definiscono gli angoli;
- sulla sfera sono gli angoli a definire i lati.

Allora sulla sfera non valgono i criteri di similitudine; infatti non si possono avere triangoli aventi angoli uguali ma lati diversi.