

Chi più ne ha... più ne metta!

Scuola secondaria di 1° grado "G. Mezzanotte – R. Ortiz" - Chieti

Classe: 2°B

Insegnante di riferimento: Diana Cipressi

Ricercatore: Alessandra Renieri

Ragazzi partecipanti: Simone Bertolin, Davide Bicocca, Ludovica Colanzi, Giulia D'Alessandro, Claudia Del Prete, Federico D'Elia, Giulia Di Pietro, Francesco Di Renzo, Luca Faieta, Laura Gigante, Daniele Morrone, Ciro Piserchia, Simone Rabottini, Alessandro Rella, Leonardo Sablone, Rebecca Torelli, Francesco Trovarello

Il proprietario Leonardo di una ditta di componenti informatici utilizza per il trasporto della merce un container che può contenere al massimo 300 kg. Possiamo aiutarlo a trovare un modo per riempire in maniera ottimale il container, sapendo che ogni articolo può essere caricato una sola volta? La lista degli articoli è:

Articolo	Prezzo in €	Guadagno in €	Peso in kg	Articolo	Prezzo in €	Guadagno in €	Peso in kg
Notebook				Fotocopiatrice			
- Modello A	390	130	5	- Modello A	1048	349	41
- Modello B	289	96	5	- Modello B	1100	366	36
- Modello C	450	150	6	- Modello C	670	223	40
- Modello D	465	155	8	- Modello D	723	241	42
- Modello E	350	116	7	Server			
- Modello F	420	140	7	- Modello A	782	260	24
Computer desktop				- Modello B	1460	486	33
- Modello A	411	137	9	- Modello C	827	275	20
- Modello B	592	197	10	- Modello D	1500	500	35
- Modello C	743	247	11	Impianto home theatre			
- Modello D	564	188	12	- Modello A	271	90	15
- Modello E	720	240	11	- Modello B	452	150	17
- Modello F	760	253	12	- Modello C	244	81	11
Stampante				- Modello D	311	103	10
- Modello A	66	22	9	Impianto Hi-Fi			
- Modello B	76	26	12	- Modello A	154	51	8
- Modello C	75	25	10	- Modello B	118	39	6
- Modello D	154	51	11	- Modello C	329	109	7

L'approccio al problema

La ricercatrice ci ha proposto inizialmente il cosiddetto “*Problema dello zaino*” come un gioco di carte: si chiede di riempire uno zaino di data capacità selezionando gli oggetti tra quelli rappresentati sulle carte, massimizzando il guadagno complessivo.

La curiosità si è subito accesa e... su con la mano a proporre un'idea.



Solo in un secondo momento ci ha proposto il vero problema.

Francesco quando ha visto il problema proposto dalla ricercatrice ha pensato: “Sarà molto difficile: non abbiamo mai trattato un problema del genere. Come va affrontato?”.

Alessandro invece si è messo le mani ai capelli: “È impossibile risolvere questo problema!”.

Simone ha commentato “Devi essere concentrato al 100% soprattutto per metterli in ordine, perché i numeri sono tanti”.

E Claudia ha pensato “Il lavoro è molto complicato, perché richiede impegno e duro lavoro”.



Le prime strategie

Leonardo non capiva come scegliere gli oggetti e come disporli, se in ordine crescente oppure decrescente, infatti “*il primo tentativo non è molto preciso e va scritto meglio!*”

Le idee erano molte e si accavallavano.

Ogni gruppo ha elaborato una proposta, ad esempio il gruppo E ha focalizzato l'attenzione sulla “*qualità*” degli articoli, scegliendo 2 oggetti per ogni categoria (2 fotocopiatrici, 2 server, ecc...)

SERVER C	275 €	20 Kg	13,75	13,3
(IMP. HUM. TNC. A	90 €	13 Kg	6	6
<hr/>				
	3741 €	300 Kg		

STRATEGIA: Per ogni articolo abbiamo preso la coppia con guadagno maggiore. Poi abbiamo aggiunto altri articoli per raggiungere 300 kg.

La questione è stata affrontata con una discussione di classe: nel testo del problema non c'è nessuna richiesta sulla qualità degli oggetti e quindi è possibile procedere indipendentemente dalla tipologia degli articoli.

Riportiamo le prime strategie che abbiamo sviluppato.

Strategia n. 1: Si ordinano i pesi in modo decrescente e si scelgono gli articoli con il peso maggiore. Arrivati a 288 kg, si decide di saltare vari articoli e di scegliere due notebook (di peso minore e guadagno maggiore) ottenendo 3130 euro e 299 kg.

Strategia n. 2: Si ordinano i pesi in ordine crescente e a parità di peso si scelgono gli articoli con guadagno maggiore, fino ad ottenere 3971 euro e 300 kg.

Strategia n. 3: Si ordinano i pesi in ordine decrescente eliminando i primi tre articoli, che hanno un peso eccessivo. Si ottiene così un bel guadagno di 4388 euro, come si deduce dalla seguente tabella.

Articolo	Guadagno in €	Peso in kg	Guadagni parziali	Pesi parziali
FOTOC D	241	42		
FOTOC A	349	41		
FOTOC C	223	40		
FOTOC B	366	36	366	36
SERVER D	500	35	866	71
SERVER B	486	33	1352	104
SERVER A	260	24	1612	128
SERVER C	275	20	1887	148
HOME TH B	150	17	2037	165
HOME TH A	90	15	2127	180
COMP DESK F	253	12	2380	192
COMP DESK D	188	12	2568	204
STAMPA B	26	12		
COMP DESK C	247	11	2815	215
COMP DESK E	240	11	3055	226
HOME TH C	81	11		
STAMPA D	51	11		
COMP DESK B	197	10	3252	236
HOME TH D	103	10	3355	246

STAMPA C	25	10		
COMP DESK A	137	9	3492	255
STAMPA A	22	9		
NOTEB D	155	8	3647	263
HI-FI A	51	8		
NOTEB F	140	7	3787	270
NOTEB E	116	7	3903	277
HI-FI C	109	7	4012	284
NOTEB C	150	6	4162	290
HI-FI B	39	6		
NOTEB A	130	5	4292	295
NOTEB B	96	5	4388	300

I calcoli sono stati eseguiti con la calcolatrice, ma ciò nonostante tenere sotto controllo tutti i numeri non è stato semplice.

Il rapporto tra grandezze

Abbiamo capito che bisognava trovare un modo più efficace per mettere in relazione il guadagno e il peso degli oggetti e dopo qualche timido tentativo di utilizzare il “rapporto”, abbiamo studiato questo nuovo concetto.

Abbiamo anche osservato che nelle divisioni con resto diverso da zero è opportuno eseguire un arrotondamento del quoziente: il numero 22,45 va arrotondato per eccesso a 22,5 (la cifra da arrotondare è maggiore o uguale a 5) e il numero 21,81 va arrotondato a 21,8 (la cifra da arrotondare è minore di 5).



Illustriamo due strategie realizzate con il rapporto tra guadagno e peso.

Strategia n. 4: Si ordinano i rapporti guadagno/peso in modo decrescente, cioè disponendo gli articoli dal più conveniente. Ad un certo punto, a 198 kg, si decide di modificare e di rinforzare la strategia scegliendo gli articoli più convenienti rispetto al guadagno.

Si è totalizzato 300 kg e 4327 euro, una soluzione meno fruttuosa rispetto a quella della strategia n.3. Peccato! Ci aspettavamo un risultato diverso.

Articolo	Guadagno unitario in €	Peso in kg	Guadagno/peso	Arrotondamento	Peso parziale	Guadagno complessivo in €
NOTE B A	130	5	26	26	5	
NOTE B C	150	6	25	25	11	
COMP DESK C	247	11	22,45454545	22,5	22	
COMP DESK E	240	11	21,81818182	21,8	32	
COMP DESK F	253	12	21,08333333	21,1	45	
NOTE B F	140	7	20	20	52	
COMP DESK B	197	10	19,7	19,7	62	
NOTE B D	155	8	19,375	19,4	70	
NOTE B B	96	5	19,2	19,2	75	
NOTE B E	116	7	16,57142857	16,6	82	
COMP DESK D	188	12	15,66666667	15,7	94	
HI-FI C	109	7	15,57142857	15,6	101	
COMP DESK A	137	9	15,22222222	15,2	110	
SERVER B	486	33	14,72727273	14,7	143	
SERVER D	500	35	14,28571429	14,3	178	
SERVER C	275	20	13,75	13,8	198	
HOME TH D	103	10	10,3	10,3	208	
FOTOC B	366	36	10,16666667	10,2		
FOTOC A	349	41	8,512195122	8,5		
HOME TH A	90	15	6	6	300	4327

Ogni gruppo ha gestito in maniera autonoma il lavoro, sia nella selezione degli oggetti che nella pianificazione delle attività.

Federico commenta: “All’interno del gruppo ci sono difficoltà di comprensione, perché le idee sono tante e confuse”.

Rebecca invece osserva che nel suo gruppo “se qualcuno propone un’idea nuova migliore, la prendiamo in considerazione”.

Strategia n. 5: Il gruppo B, coordinato da Francesco, ha avuto un’idea originale:

- a) si calcola il peso complessivo degli articoli nel magazzino;
- b) si individuano gli articoli non convenienti da scartare;
- c) si ricavano le merci restanti da inserire nel container.

Si ottiene così un guadagno di 4394 euro, sottraendo i pesi degli oggetti da scartare e aggiungendo i guadagni degli oggetti selezionati.

La procedura adottata è stata scritta più volte:

- nel primo tentativo sono annotati da un lato l'elenco degli articoli selezionati e dall'altro il calcolo delle quantità;

Strategia utilizzata

GRUPPO B

Togliere i prodotti che al Kg ci faceremo guadagnare di meno, osservando i rapporti

Prodotti scartati

- 1) Modello A, B, C, D della stampante
- 2) Modelli C, D della fotocopiatrice
- 3) Modello A, B, C, D dell'impianto home theatre
- 4) Modello A, B dell'impianto hi-fi

Prodotti utilizzati

- 1) Modello A, B, C, D, E, F del notebook
- 2) Modello A, B, C, D, E, F del computer desktop
- 3) Modelli A, B della fotocopiatrice
- 4) Modello A, B, C, D del server
- 5) Modello C dell'impianto hi-fi

Calcoli effettuati

$$\text{Peso} = 490 \text{ Kg} - (9 \text{ Kg} + 12 \text{ Kg} + 10 \text{ Kg} + 11 \text{ Kg} + 40 \text{ Kg} + 42 \text{ Kg} + 15 \text{ Kg} + 17 \text{ Kg} + 11 \text{ Kg} + 10 \text{ Kg} + 8 \text{ Kg} + 6 \text{ Kg}) = 490 \text{ Kg} - 191 \text{ Kg} = 299 \text{ Kg}$$

$$\text{Guadagno} = (\text{€ } 130 + \text{€ } 96 + \text{€ } 150 + \text{€ } 155 + \text{€ } 116 + \text{€ } 140 + \text{€ } 137 + \text{€ } 187 + \text{€ } 227 + \text{€ } 188 + \text{€ } 210 + \text{€ } 253 + \text{€ } 348 + \text{€ } 366 + \text{€ } 260 + \text{€ } 486 + \text{€ } 275 + \text{€ } 500 + \text{€ } 108) = \text{€ } 4354$$

- nella seconda stesura è compilata una tabella nella quale gli articoli che fanno guadagnare meno sono messi in relazione con i pesi residui.

GRUPPO B

Prodotti scartati

f) Modello

ARTICOLI DA TOGLIERE	PESO	PESO DA TOGLIERE
MODELLO A STAMPANTE	9 Kg	$490 - 9 = 481$ Kg
MODELLO B STAMPANTE	12 Kg	$481 - 12 = 469$ Kg
MODELLO C STAMPANTE	10 Kg	$469 - 10 = 459$ Kg
MODELLO D STAMPANTE	11 Kg	$459 - 11 = 448$ Kg
MODELLO C FOTOCOPIATRICE	40 Kg	$448 - 40 = 408$ Kg
MODELLO D FOTOCOPIATRICE	42 Kg	$408 - 42 = 366$ Kg
MODELLO A IMPIANTO HOME THEATRE	15 Kg	$366 - 15 = 351$ Kg
* MODELLO B IMPIANTO HOME THEATRE	17 Kg	$351 - 17 = 334$ Kg
* MODELLO C IMPIANTO HOME THEATRE	11 Kg	$334 - 11 = 323$ Kg
* MODELLO D IMPIANTO HOME THEATRE	10 Kg	$323 - 10 = 313$ Kg
* MODELLO A IMPIANTO HI-FI	8 Kg	$313 - 8 = 305$ Kg
* MODELLO B IMPIANTO HI-FI	6 Kg	$305 - 6 = 299$ Kg

I lavori prodotti sono stati trascritti al computer con il foglio *Excel*, dopo aver imparato a gestire le celle e alcune funzioni (l'arrotondamento, la somma e l'ordinamento di dati), in modo da avere un maggiore controllo dei calcoli e delle procedure.

Nella trascrizione al computer della strategia n. 5, ci siamo accorti di dover organizzare i dati della tabella in modo più preciso. Abbiamo così deciso di mettere in relazione ogni

oggetto con il guadagno unitario, il peso unitario, il rapporto guadagno/peso, l'arrotondamento del rapporto e il peso residuo.

Nelle righe bianche della tabella sottostante si trovano gli articoli da inserire nel container.

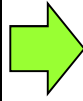
Articolo	Guadagno unitario in €	Peso in kg	Rapporto Guadagno/peso €/kg	Arrotondamento	Peso residuo kg	Guadagno Totale €
STAMP B	26	12	2,166666667	2,2	478	
STAMP A	22	9	2,444444444	2,4	469	
STAMP C	25	10	2,5	2,5	459	
STAMP D	51	11	4,636363636	4,6	448	
FOTOC C	223	40	5,575	5,6	408	
FOTOC D	241	42	5,738095238	5,7	366	
HOME TH A	90	15	6	6	351	
HI-FI A	51	8	6,375	6,4	343	
HI-FI B	39	6	6,5	6,5	337	
HOME TH C	81	11	7,363636364	7,4	326	
FOTOC A	349	41	8,512195122	8,5		349
HOME TH B	150	17	8,823529412	8,8	309	
FOTOC B	366	36	10,166666667	10,2		715
HOME TH D	103	10	10,3	10,3	299	
SERVER A	260	24	10,833333333	10,8		975
SERVER C	275	20	13,75	13,8		1250
SERVER D	500	35	14,28571429	14,3		1750
SERVER B	486	33	14,72727273	14,7		2236
COMP DESK A	137	9	15,22222222	15,2		2373
HI-FI C	109	7	15,57142857	15,6		2482
COMP DESK D	188	12	15,66666667	15,7		2670
NOTE B E	116	7	16,57142857	16,6		2786
NOTE B B	96	5	19,2	19,2		2882
NOTE B D	155	8	19,375	19,4		3037
COMP DESK B	197	10	19,7	19,7		3234
NOTE B F	140	7	20	20		3374
COMP DESK F	253	12	21,08333333	21,1		3627
COMP DESK E	240	11	21,81818182	21,8		3867
COMP DESK C	247	11	22,45454545	22,5		4114
NOTE B C	150	6	25	25		4264
NOTE B A	130	5	26	26		4394

Un caso più semplice

La strategia n. 5 però non è risultata effettivamente la migliore tra tutte, come è stato verificato con altri problemi più "semplici", aventi un numero ridotto di oggetti.

Consideriamo, ad esempio, il caso seguente.

Capienza massima 30 kg			
Oggetto	Peso kg	Guadagno €	Rapporto Guadagno/Peso
x ₁	22	43	1,95
x ₂	18	32	1,78
x ₃	13	26	2
x ₄	7	12	1,71



Capienza massima 30 kg			
Oggetto	Peso kg	Guadagno €	Rapporto Guadagno/Peso
x ₄	7	12	1,71
x ₂	18	32	1,78
x ₁	22	43	1,95
x ₃	13	26	2

Si scopre che usando la strategia 5 (stimata come la migliore) si ottiene il seguente risultato:

$$\text{Peso zaino} = \text{peso totale} - (x_4 + x_2 + x_1) = 60 \text{ kg} - (7 + 18 + 22) \text{ kg} = 13 \text{ kg}$$

$$\text{Guadagno} = 26 \text{ €}$$

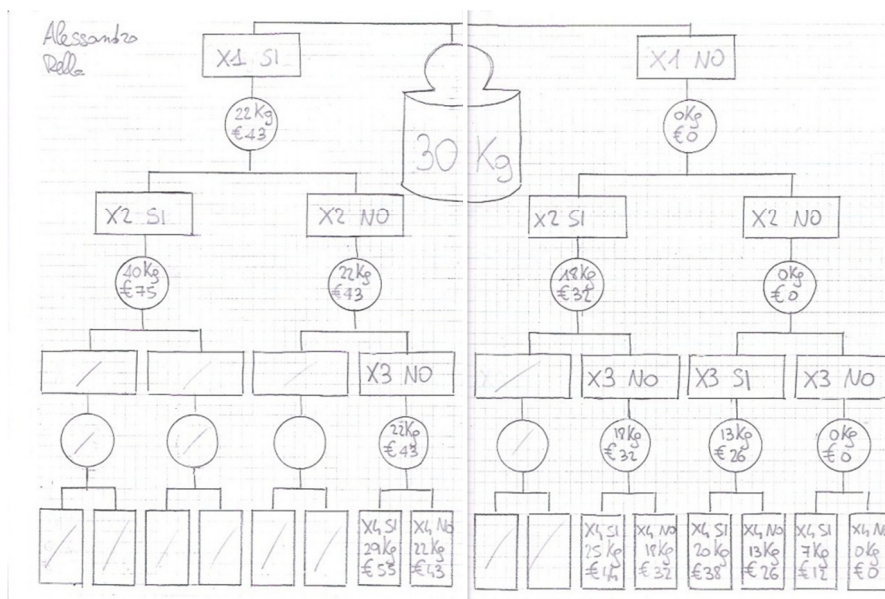
Si può però ottenere un guadagno maggiore di 55 €, selezionando x₁ e x₄.



L'albero binario

Abbiamo analizzato il problema semplificato con soli quattro oggetti x₁, x₂, x₃, x₄ utilizzando uno schema, con il vantaggio di avere una panoramica di tutte le possibilità e di trovare in modo rapido la strategia migliore.

Purtroppo abbiamo scoperto che questo tipo di grafico diventa complesso con l'aumentare del numero degli oggetti. Ad esempio con 31 articoli il numero di possibilità è 2³¹!



La strategia golosa

Le strategie applicate sono quelle che si chiamano *greedy*, cioè golose, dove si decide di scegliere gli oggetti che a prima vista sembrano convenienti ma che alla fine non lo sono. Questo succede quando prendiamo una decisione iniziale e insistiamo nel seguire quella strada.

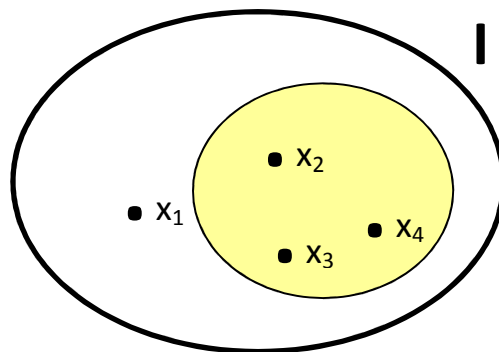
Abbiamo provato a scrivere una strategia golosa usando il linguaggio degli insiemi:

Zaino o Container all'inizio: $Z = \emptyset$

Oggetti da selezionare $n = 4$: $I = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

x_1 con peso p_1 e guadagno g_1 ; ecc. Capacità di Z : $C = 30 \text{ kg}$

- scegliere l'oggetto $x_1 \in I$;
- se $p_1 < C$ allora x_1 è il "meglio" di I ;
- allora $x_1 \in Z$;
- scegliere l'oggetto $x_2 \in I - \{x_1\}$ nel sottoinsieme degli $n-1=3$ oggetti rimanenti;
- ripetere la procedura fino a quando $I = \emptyset$ (cioè tutti gli oggetti sono stati scelti) oppure Z ha raggiunto la capacità massima.



Il convegno

Il giorno della presentazione, abbiamo esibito i materiali prodotti su fogli di cartoni ondulati, a mo' di lavagnette, abbiamo esposto le varie fasi del progetto e proposto una scenetta nella quale i 4 pacchi x_1 , x_2 , x_3 , x_4 messi in mostra si alternavano secondo l'ordine stabilito dalle varie strategie.

Tanti sono stati i visitatori che, incuriositi dai nostri cartoni, ci hanno chiesto spiegazioni sul nostro progetto e da dove venivamo.

