Il problema del favo

Scuola secondaria di primo grado “L. Lotto” dell’ I.C. Mazzi - Bergamo
Classe: 2°D
Insegnante di riferimento: Anna Maria Mastroianni
Ricercatore: Giulia Bernardini
Ragazzi partecipanti: Riccardo Armati, Angela Baiano, Marco Belotti, Sara Ben Alaya, Giorgia Bracci, Fabio Ciccone, Giannela Cruz, Francesca Esposito, Pietro Falciglia, Jessica Ferrari, Farida Ibnelhaj, Luca Lacerra, Vincenza Manella, Tommaso Monaco, Alen Nusinovic, Hajar Omari, Letizia Paris, Alessia Pedata, Margherita Perazzani, Ilaria Pipola, Nicolò Salvi, Fabio Schillaci, Alessandro Silini, Helios Trapletti, Emilio Ventrella

Quale poliedro riempie meglio lo spazio?

Nel percorso di “Math.en.jeans” Giulia, nostro ricercatore, ci ha proposto di trovare il poliedro che riempie lo spazio nel modo migliore possibile. Abbiamo deciso che per noi la forma migliore è quella che ha il volume più grande possibile a parità di superficie.
Giulia ci ha suggerito di cominciare a considerare il problema sul piano (quindi con poligoni, aree e perimetri), accettando come possibili soluzioni solo poligoni regolari.

E subito ci è venuto in mente un esempio tutto naturale: il favo.
Ma cos’è il favo? Perché le api costruiscono celle esagonali?

Non è uno sciame molesto ma...
....un ronzio in testa che......
ci rende operosi e desti.....!

Il ***favo*** è una particolare struttura formata da celle esagonali di cera che le api operaie costruiscono nel loro nido. Il favo è utilizzato sia per contenere le larve delle api, sia per raccogliere e immagazzinare il miele prodotto. Ogni celletta che costituisce il favo ha forma esagonale e ogni lato di una cella è in comune con quella vicina.
Geometricamente le file di celle sono sempre allineate orizzontalmente. Così ogni cella ha due pareti verticali, con "pavimenti" e "soffitti" composti di due pareti angolate.
Il fatto che il favo sia composto da celle esagonali piuttosto che di altre forme ha due possibili spiegazioni:

1) l'esagono suddivide il piano con il minimo perimetro per porzione di superficie, quindi la creazione di un reticolo di celle a struttura esagonale con un dato volume richiede la minor quantità di materiali;
2) la forma esagonale è una conseguenza del procedimento attuato da ogni singola ape per unire tra di loro le varie celle, in qualche modo analogo a quanto accade nella creazione delle superfici di contatto in un campo di bolle di sapone.

Il fatto che una medesima parete possa servire due celle contigue è un criterio di massima economia e questo è possibile solo per determinate forme geometriche.

Al termine della nostra ricerca sul favo ci siamo posti la domanda: “quale figura può riempire un piano perfettamente?”
A questo proposito abbiamo costruito delle pavimentazioni limitando il campo ai soli poligoni regolari come il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono, l’esagono, l’ettagono... Abbiamo quindi scoperto che è possibile riempire pienamente un piano solo se la somma degli angoli relativi ai vertici che si incontrano è pari a un angolo giro. È quindi necessario che l'angolo interno del poligono regolare sia un divisore esatto intero di 360°.

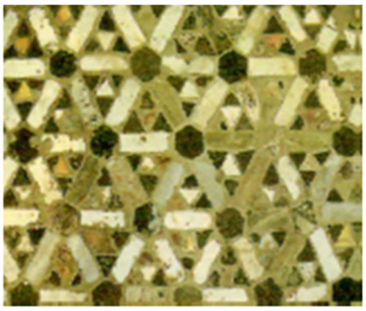
Le pavimentazioni

Le nostre compagne Farida e Hajar hanno trovato, nelle loro ricerche, che fu il matematico arabo Kalid a osservare che vi sono soltanto tre poligoni regolari aventi angoli interni la cui ampiezza soddisfa questa condizione: 60º (triangolo equilatero), 90º (quadrato), 120º (esagono). È quindi possibile accostare questi poligoni, raggruppandone intorno a ciascun vertice in numero pari al quoziente del rapporto tra 360° e la misura dell’angolo interno del poligono: 6 triangoli equilateri, 4 quadrati o 3 esagoni.
La "scelta" delle api di celle a sezione esagonale si spiega in termini di economia di materiali.

Una figura costituita da poligoni che ricoprono l’intero piano senza sovrapporsi, come in un puzzle, che riproduce ad esempio la piastrellatura di un pavimento, è chiamata dai matematici *tassellazione* ed è definita come “copertura del piano con elementi qualsiasi senza intersezioni e vuoti". Per realizzare una tassellazione regolare del piano, gli elementi essenziali sono i poligoni regolari. Per quanto detto prima, è possibile solo con triangoli equilateri, quadrati o esagoni regolari.

Le tassellazioni sono state utilizzate da diverse popolazioni (greci, romani, arabi, …) per decorare ed abbellire. A Roma i *sampietrini* ne sono un esempio .

Museo Etrusco di Marzabotto. Laterizi esagonali.



Pavimento della basilica di Montecassino.

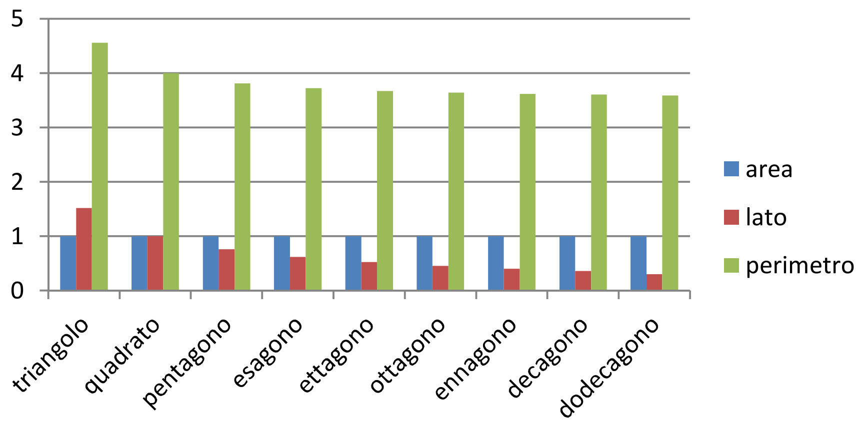
Lavoriamo con i poligoni regolari

Continuando le nostre osservazioni sui poligoni regolari, abbiamo deciso di fissare alcune caratteristiche e vedere come variano le altre al variare del numero dei lati.

Abbiamo deciso di mantenere costante l'area e con formule e costanti, osserviamo come variano i rispettivi perimetri.

Ci è tornata utile la formula $Area = lato^2 \times \varphi$.

	φ	Area (u^2)	Lato (u)	Perimetro (u)
Triangolo	0,433	1	1,519693661	4,559080982
Quadrato	1	1	1	4
Pentagono	1,72	1	0,762492852	3,812464258
Esagono	2,598	1	0,620412339	3,722474034
Ettagono	3,634	1	0,524574939	3,672024571
Ottagono	4,828	1	0,455109991	3,640879925
Ennagono	6,182	1	0,402193919	3,619745268
Decagono	7,694	1	0,360515473	3,60515473
Dodecagono	11,196	1	0,298860525	3,586326301
Cerchio		1		3,544907702



Osservazione:

maggiore è il numero dei lati, minore è il perimetro. Il "perimetro" più piccolo è quello del cerchio, la circonferenza.

Dalle due alle tre dimensioni

Trasferiamoci nello spazio e cominciamo prendendo in considerazione i prismi, ricercando quelli che riempiono lo spazio nel miglior modo possibile. Per i solidi la superficie corrisponde al rivestimento e il volume allo spazio racchiuso, “il dentro”.

Riprendiamo i regoli e con i cubetti li disponiamo in vari modi.
Avendo 8 cubetti riusciamo ad avere 3 parallelepipedi con lo stesso volume: $8u^3$.
Confrontiamo le aree di questi parallelepipedi: possiamo disporli uno sopra l’altro, accostarli a due a due o comporre un cubo. Questi parallelepipedi hanno sempre lo stesso volume, ma la superficie occupata cambia. Abbiamo, rispettivamente:

S= 4x8+2 =34 (4x8=sup.laterale, 2=area basi);

S= 6x4+4=28 (6x4=sup.laterale, 4=area basi);

S=6x4=24.

A parità di volume è il cubo ad avere la superficie minima!

Abbiamo poi ripetuto più volte l’esperienza utilizzando altri cubetti, ma mai meno di otto.

Perimetri, aree, altezze di poliedri

Le nostre osservazioni continuano. Adesso costruiamo prismi con lo stesso perimetro di base e teniamo costante anche l’altezza.
Fissato un perimetro, il rettangolo con area più grande è il quadrato.
Mettiamo in pila tanti rettangoli isoperimetrici fino ad una certa altezza che adesso teniamo costante, ad esempio h = 10u.

Dimensioni della base (u)		Altezza (u)	Volume (u^3)	
1	7	10	70	
2	6	10	120	
3	5	10	150	
4	4	10	160	volume massimo
5,5	2,5	10	137,5	
8	0	10	0	caso limite

Il volume del prisma è massimo quando la base è un quadrato.

Proviamo cambiando la misura dell’altezza.

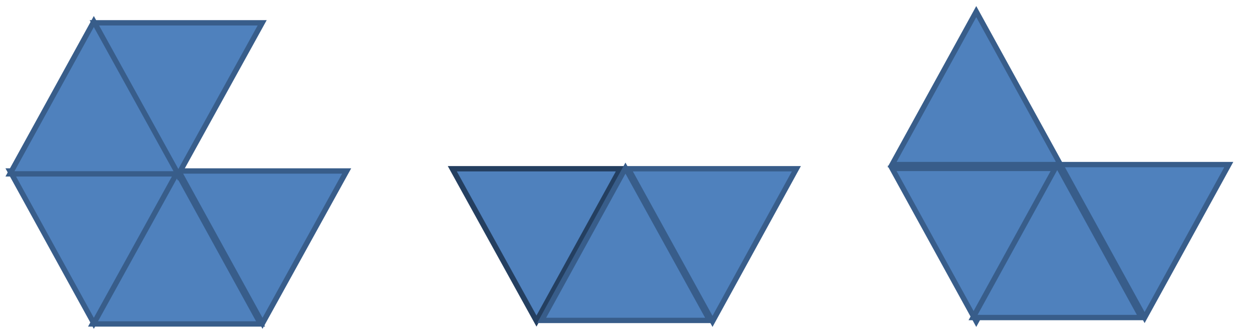
Dimensioni della base (u)		Altezza (u)	Volume (u^3)	
1	7	4	28	
2	6	4	48	
3	5	4	60	
4	4	4	64	volume massimo
5,5	2,5	4	55	
6,5	1,5	4	39	

Quando le facce sono tutte uguali, il volume è massimo.

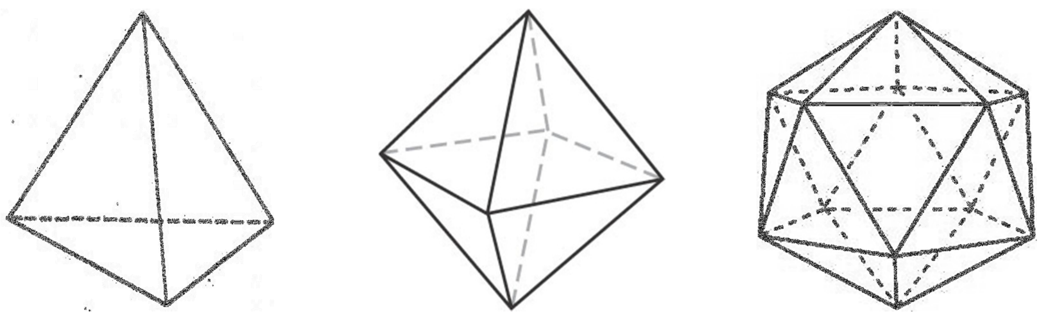
Poliedri regolari

Con la nostra insegnante di educazione tecnica abbiamo costruito tanti poligoni regolari: dal triangolo equilatero siamo arrivati a costruire il dodecagono regolare, e potevamo farne ancora altri perché di poligoni regolari ne esistono tanti.
Esistono anche tanti poliedri regolari? E le facce che concorrono ad uno stesso vertice quante e come possono essere? Il ragionamento che riguardava i 360° che avevamo fatto nel caso piano funziona ancora?
Ci mettiamo all’opera, costruiamo e vediamo cosa accade.

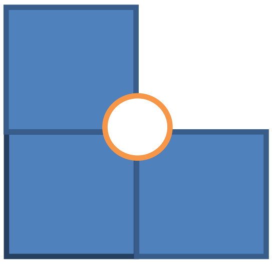
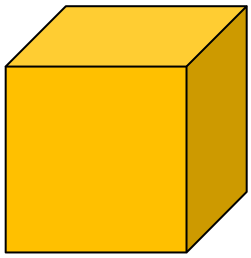
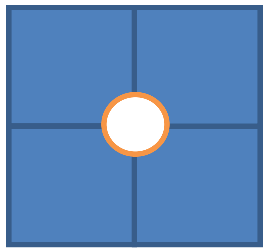
Triangoli equilateri
Se le facce di un poliedro sono triangoli equilateri, ciascuno degli angoli è di 60°. Si possono avere questi casi:



In un vertice possono convergere tre, quattro o cinque facce. Se sei facce hanno in comune un vertice … siamo tornati al piano!
Usando triangoli equilateri come facce, si hanno questi poliedri regolari:

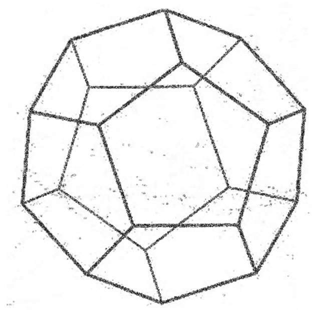


Quadrati
Se le facce di un poliedro sono dei quadrati, ciascuno degli angoli è di 90°. Si può avere allora un solo caso, quando in un vertice convergono tre quadrati (3 x 90° = 270°).
Il poliedro regolare corrispondente è l'esaedro, ossia il cubo.

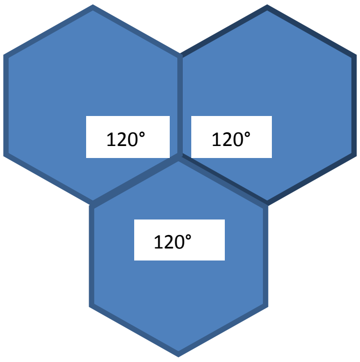
Se le facce fossero quattro, sarebbero tutte sullo stesso piano (perché: 4 x 90° = 360°) e quindi non si potrebbe costruire alcun solido.

Facce: pentagoni regolari
La somma degli angoli interni di un poligono è pari a tanti angoli piatti quanti sono i lati diminuiti di due. Quindi la somma degli angoli interni di un pentagono è 180° x (5 - 2) = 540° e ogni angolo di un pentagono regolare misura 540°: 5 = 108°.
Si può costruire un poliedro facendo convergere in ogni vertice tre pentagoni regolari (3 x 108° = 324° < 360°): il dodecaedro regolare.



Non si può costruire un poliedro con quattro pentagoni regolari che convergono in ciascun vertice perché 4 x 180° = 432° > 360°.

Facce esagonali
Non riusciamo a costruire dei poliedri aventi per facce dei poligoni regolari con un numero di lati superiore a cinque. Se volessimo per esempio costruire un poliedro avente per facce degli esagoni regolari, anche facendo convergere in un vertice solamente tre esagoni avremmo 3 x 120° = 360°; perciò le tre facce sarebbero sul piano.



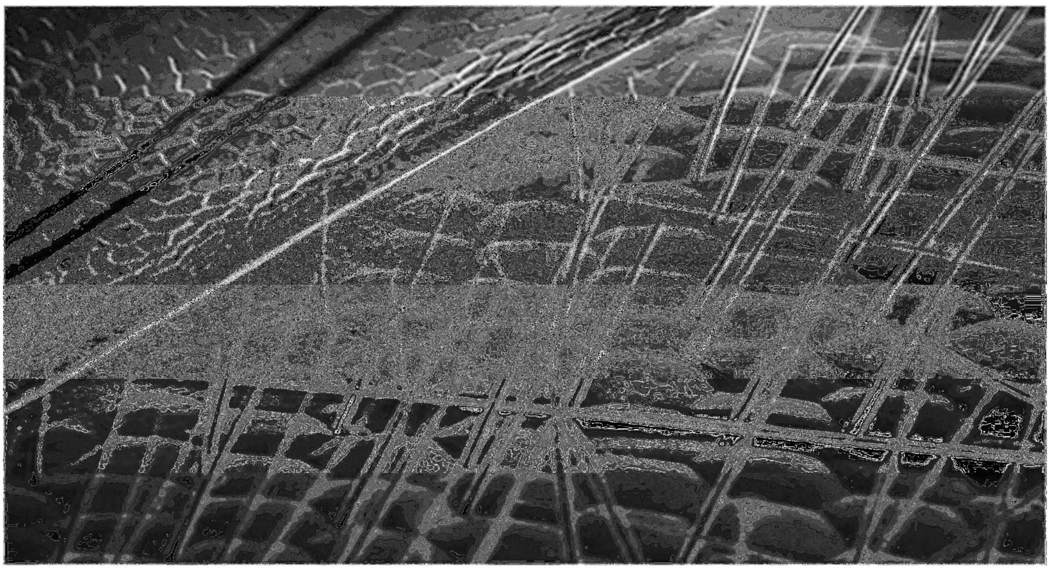
Abbiamo scoperto che esistono solo cinque tipi di poliedri regolari: tetraedro, ottaedro, icosaedro, esaedro (o cubo) e dodecaedro.

Poliedro	Tipo di facce	Numero di facce per vertice	Somma degli angoli delle facce che convergono in ciascun vertice
Tetraedro	triangoli	3	3 x 60° = 180°
Ottaedro	triangoli	4	4 x 60° = 240°
Icosaedro	triangoli	5	5 x 60° = 300°
Esaedro (cubo)	quadrati	3	3 x 90° = 270°
Dodecaedro	pentagoni	3	3 x 108° = 324°

Qualche ricerca nel campo della biologia

Le nostre piccole api ci invitano anche ad osservarle dal punto di vista biologico.

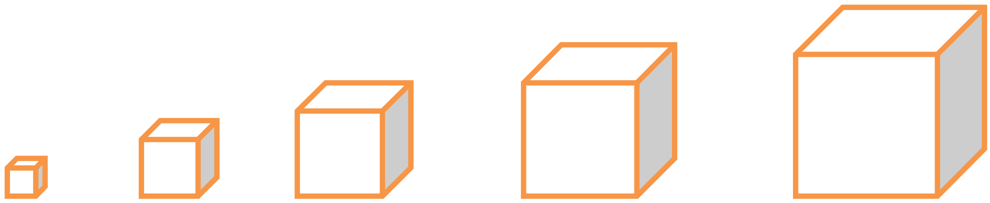
Ritroviamo una figura ben nota nella struttura dei loro occhi.
"La prima volta che ho visto l'occhio di un'ape ingrandito al microscopio sono rimasta colpita dal vedere file e file di esagoni, del tutto simili a quelli di un alveare. È solo una coincidenza o c'è una corrispondenza tra ciò che le api vedono e le strutture che costruiscono?"



Occhio di un'ape mellifera ingrandito 370 volte, composto da migliaia di lenti esagonali che catturano la luce a differenti angolazioni e permettono di percepire il movimento. Gli occhi delle api sono sensibili ai raggi UV che permettono loro di identificare i fiori più ricchi di polline.

Matematica e biologia

Le cellule mostrano varie forme rispondenti alle specifiche funzioni cellulari. Hanno una geometria regolare. Le dimensioni si mantengono grosso modo costanti (circa 6-20 micron) e si basano su un importante principio fisico: rapporto superficie/volume. La cellula scambia materiale con l'ambiente esterno attraverso la membrana che ricopre la sua superficie: se aumenta il volume della cellula, aumenta anche la quantità di materiali da trasportare, ma il volume aumenta molto più rapidamente della superficie ed è proprio il rapporto superficie/volume che impone limiti nelle dimensioni cellulari.



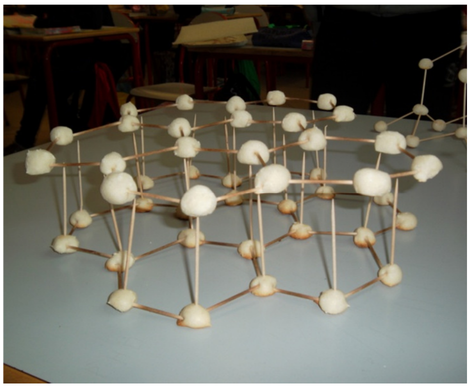
Lato (μm)	1	2	3	4	5
Superficie (μm^2)	6	24	54	96	150
Volume (μm^3)	1	8	27	64	125
Sup/vol (μm^{-1})	6	3	2	1,5	1,2

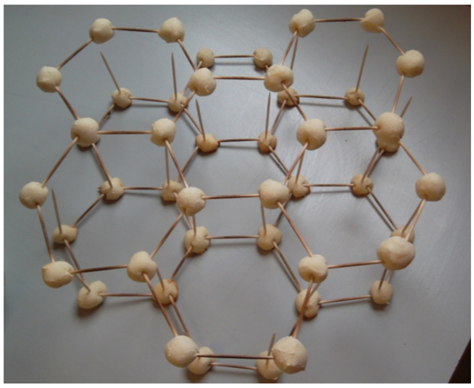
Il rapporto S/V aumenta al diminuire delle dimensioni della cellula: in pratica cellule piccole hanno in proporzione più membrana per effettuare gli scambi.

Gli esagoni e la chimica

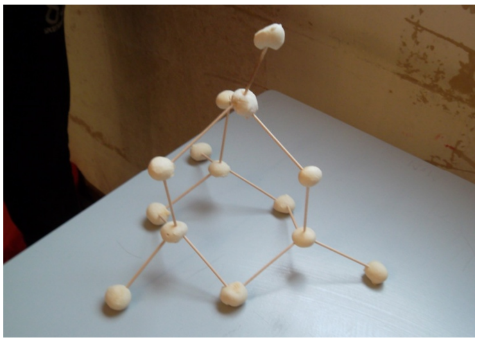
Il carbonio è il sesto elemento della tavola periodica, ha numero atomico 6 (6 protoni e 6 elettroni). Il suo successo dipende dalla capacità di formare con legami semplici, doppi o tripli, strutture a catena anche molto lunghe, lineari o ramificate. A queste impalcature di base costituite da atomi di carbonio si possono unire altri elementi chimici (idrogeno, ossigeno, azoto…) per formare composti.
In natura il carbonio esiste in due forme diverse: la grafite e il diamante.

<u>La grafite</u>
La grafite ha proprietà lubrificanti. Tra gli atomi dei diversi strati si stabiliscono deboli legami, per cui gli strati possono slittare l'uno rispetto all'altro.





Il diamante
Il diamante ha una struttura dura e compatta. Nel diamante gli atomi di carbonio occupano il centro e i vertici di un tetraedro.



Un commento di Francesca

"Quest'attività, nata quasi per caso, ci ha trovato prima preoccupati per il semplice fatto di non riuscire a terminare in tempo, poi più tranquilli e curiosi di scoprire la risoluzione.
Il nostro programma di seconda media sulla geometria piana prevedeva come argomento i poligoni regolari. Non abbiamo saltato lezioni per questo progetto, perché questo progetto è una lezione. Abbiamo capito e studiato non come "al solito" cioè in classe, seduti nei nostri banchi. Applicando costanti, variando dati e ragionando, siamo arrivati alle conclusione che abbiamo spiegato prima.
Un GRAZIE enorme alla nostra ricercatrice Giulia Bernardini. Un GRAZIE speciale alla nostra professoressa di matematica, la professoressa Anna Mastroianni, che ci ha seguito e supportato.
GRAZIE alla prof.ssa Giovanna Pacucci. GRAZIE alle nostre amiche api, ora risvegliate dalla primavera. Abbiamo imparato, ci siamo divertiti, scoprendo che la matematica è intorno a noi, come questi piccoli insetti che costruiscono celle esagonali."