Il piano e i suoi punti

Istituto Comprensivo Statale - Castellanza
Classe: 2°A
Insegnante di riferimento: Nicoletta Bonacina
Ricercatore: Elena Ballante
Ragazzi partecipanti: Sabrina Bonelli, Martina Di Nardo, Sara Ferri, Gianluca Ferri, Nicoly Fornazieri, Greta Gaudino, Alba Gjetja, Mattia Gnoni, Graziano Gorgonio, Sharon Iaccarini, Vittoria Iaccarino, Arianna Manfridi, Giulia Perota, Luca Proverbio, Rebecca Rampinini, Diego Ruggiero, Dashini Sungalee, Andrey Trebuntsev, Christian Trezzi

Ogni punto del piano viene colorato in bianco o in nero.
Allora, indipendentemente dalla colorazione scelta, si verificano questi tre fatti:

1. *esistono due punti dello stesso colore la cui distanza sia minore di 2;*
2. *esiste un segmento AB di lunghezza 2 i cui vertici A e B abbiano lo stesso colore;*
3. *esiste un triangolo rettangolo ABC con l'ipotenusa di lunghezza 2 e un angolo acuto di 60° tale che A, B, C siano dello stesso colore.*

Quando Elena – la nostra ricercatrice *MeJ* – ci ha presentato questo problema, noi ci sentivamo veramente sconcertati perché non capivamo niente e sembrava un enigma impossibile da risolvere.

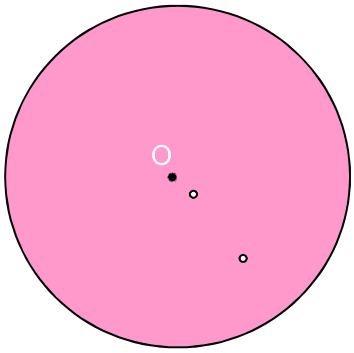
Inizialmente ci siamo messi a disegnare vari piani con la colorazione richiesta dal quesito, ma mentre lavoravamo ci sono venuti un sacco di dubbi sui quali abbiamo discusso molto in classe: ci siamo chiesti cosa sia davvero un piano, cosa stavamo in realtà colorando visto che sappiamo che il piano non ha confini. Certo, però dobbiamo metterglieli per poterlo colorare. Allora ci siamo detti che il foglio è solo una parte di piano e così, come se ci fosse uno zoom, abbiamo "ingrandito" la superficie immaginando di andare sul banco, sul pavimento, sul territorio del nostro comune e poi della regione e così via fino ad arrivare alla superficie terrestre che però è sferica e quindi non possiamo più estenderla… Allora, per evitare di confonderci troppo, ci siamo fermati.
Appena tolto il dubbio del piano, ci siamo chiesti che cosa fosse un punto e soprattutto quanti punti dovessimo colorare, perché sul piano che non ha limiti abbiamo capito che i punti sono infiniti. Ci siamo fatti molte domande, come: ma in una regione finita quanti sono i punti? Sono infiniti o tantissimi?
Dopo lunghe discussioni ci siamo ricordati che il libro di geometria dice che i punti non hanno dimensione e allora abbiamo capito che i punti sono infiniti anche in una regione finita.

E così ci siamo concentrati sul primo quesito, capendo che i punti a distanza minore di 2 da un punto O sono tutti quelli che stanno all'interno della circonferenza con centro in O e raggio 2.
Inizialmente non sapevamo come partire, ma ogni volta ognuno dava la propria idea: anche se nessuna era completamente corretta, unendole tutte insieme e seguendo i consigli di Elena siamo riusciti a trovare una soluzione a tutti i quesiti richiesti.
E questo ci ha riempito di soddisfazione!!!

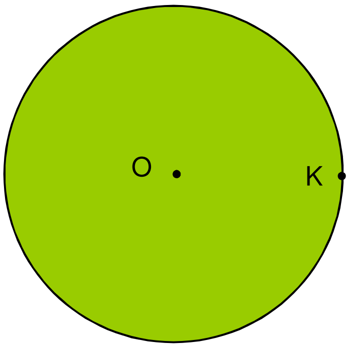
Ecco di seguito come abbiamo alla fine risolto il problema.

Quesito 1

Abbiamo considerato un punto O che fosse, ad esempio, nero.
Abbiamo costruito una circonferenza di centro O e raggio 2u: se all'interno della circonferenza troviamo un altro punto nero ecco due punti a distanza < 2u.
Se non troviamo un secondo punto nero, allora all'interno della circonferenza i punti sono tutti bianchi, e quindi ce ne saranno almeno due a distanza inferiore di 2u.



Quesito 2

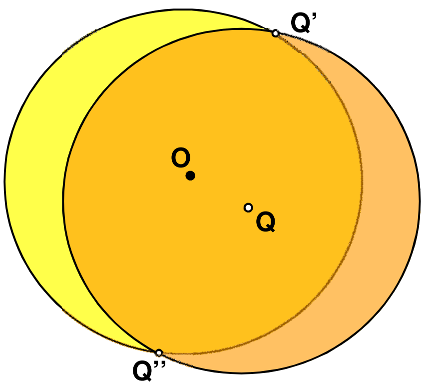


Consideriamo sempre il nostro punto O, per esempio nero, e costruiamo una circonferenza di centro O e raggio 2u.
Se troviamo un altro punto nero K sulla circonferenza allora ecco trovati due punti a distanza esattamente 2u.

Se non troviamo un secondo punto nero sulla circonferenza vuol dire che tutti i punti della circonferenza sono bianchi.

Allora scegliamo un punto bianco Q interno al cerchio (c'è per forza, al limite è un punto della circonferenza) e costruiamo la circonferenza di centro Q e raggio 2u.
La nuova circonferenza incontrerà la vecchia in due punti Q' e Q'' che sono:

- certamente a distanza 2u da Q perché appartenenti alla seconda circonferenza;
- certamente bianchi perché appartenenti alla prima circonferenza fatta tutta di punti bianchi.



Quesito 3

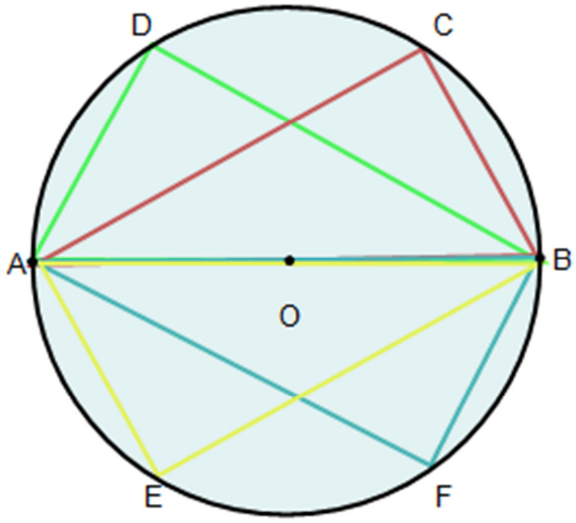
Questo è stato il rompicapo più tremendo…

Abbiamo disegnato un cerchio di raggio 1u e centro O e tracciato un suo diametro AB.

Avendo dimostrato il quesito 2, possiamo considerare A e B dello stesso colore, per esempio neri, poiché distano 2u.

Sappiamo che un triangolo rettangolo è sempre inscrivibile in una semicirconferenza.

Quindi nel nostro cerchio di diametro 2u possiamo inscrivere quattro triangoli rettangoli con angoli di 30°, 60° e 90° e con l'ipotenusa sul diametro (e quindi di lunghezza 2u) che individuano 4 punti sulla circonferenza: C, D, E, F.



Se qualcuno dei punti C,D,E,F è nero, allora abbiamo dimostrato il punto 3.

Se ciò non accade vuol dire che tutti e 4 i punti sono bianchi e siccome a 3 a 3 appartengono ad un triangolo con angoli di 30°, 60° e 90°… ecco dimostrato il punto 3!

Ma, non bariamo, siamo davvero certi che i punti D,C,E sono vertici di un triangolo con angoli di 30°, 60° e 90°?

I triangoli AOD, AOE, COD sono equilateri e congruenti; DH è mediana altezza e bisettrice del triangolo AOD relativamente al lato AO, quindi l'angolo HDO misura 30°; l'angolo OCD 60° e l'angolo EDC 90°, quindi il triangolo ECD è rettangolo. Perciò ED passa per il centro e misura 2u, l'angolo CDE è di 60° e quindi il triangolo è proprio quello che ci serve!