Il trasloco geometrico

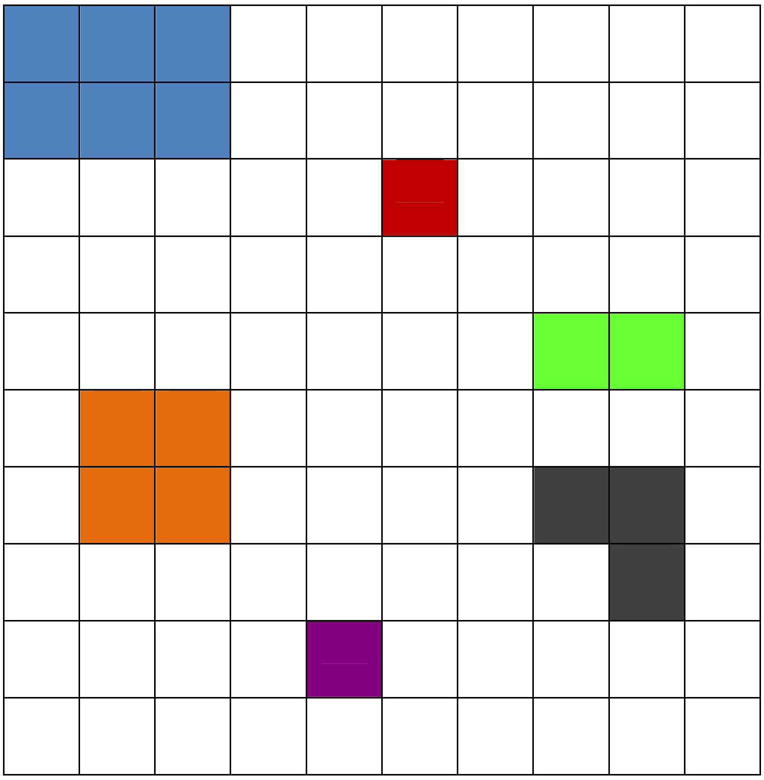
Istituto Comprensivo "Borsi" - Milano
Classi: 1°A, 1°C
Insegnanti di riferimento: Massimo Trizio, Maria Carbone
Ricercatore: Rosina Cavallaro
Ragazzi partecipanti: Matteo Brognoli, Gaia Carpentiero, Filippo Castano, Camilla Chiesa, Emma Dal Degan, Lorenzo Datteo, Aurora Jerey De Castro, Andrea Giammetta, Niccolò Graziano, Tima Kurtic, Alessandro Matrà, Leonardo Mauri, Marta Meregalli, Davide Monsorno, Petra Morlacchi, Yassury Palomino, Francesca Piacentino, Alessia Pirritano, Alessia Quaranta, Simone Rullo, Filippo Saffirio, Alessia Strigiotti, Michele Vergani

Primo problema

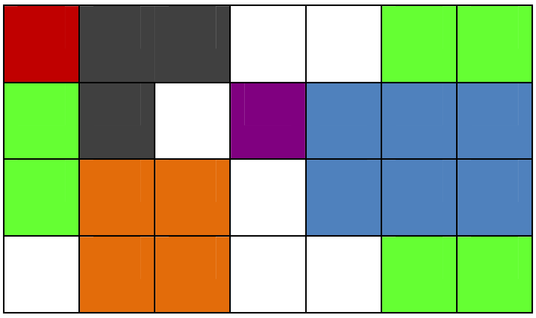
Il proprietario di un negozio di mobili in cristallo decide di rifare il negozio e si affida alla ditta di un conoscente per l'immagazzinamento temporaneo dei suoi articoli in un box.
Il proprietario non vuole assolutamente che vengano sovrapposte le varie scatole e che i mobili di uguale tipologia siano posizionati l'uno vicino all'altro, in quanto lo stesso tipo di cristallo se sottoposto a vibrazione entrerebbe in risonanza e potrebbe rompersi.
Come si possono disporre le scatole?

Classe 1°A

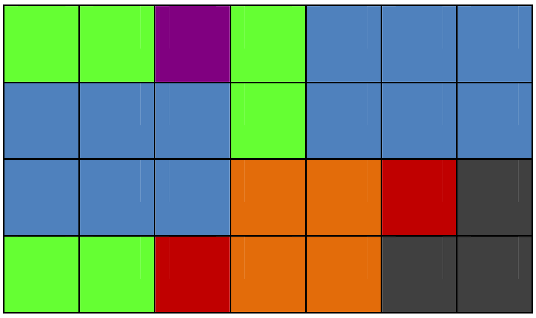
Il box ha dimensioni 7×4 m e I diversi oggetti che il proprietario ha già inscatolato sono 2 tavoli (3×2 m), 2 sedie (1×1 m), 3 divani (2×1 m), 1 appendiabiti (2×2 m), 1 vaso (1×1 m) e 1 libreria a forma di L(2×2 m).

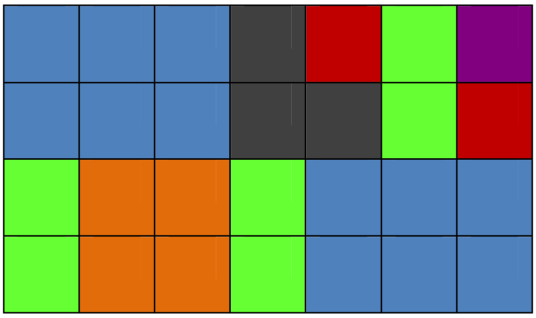


I primi tentativi non hanno avuto successo perché usavamo metodi come mettere prima gli oggetti più piccoli e dopo quelli più grandi. Continuavamo a sbagliare e non riuscivamo a trovare una soluzione.



Una delle regole del problema è che i mobili non si possono mettere uno sopra l’altro, per questo motivo non viene detta l’altezza. Inoltre, viene detto che due mobili uguali non si possono toccare neanche negli angoli.
Inizialmente non capivamo come affrontare il problema, ma dopo svariati tentativi una nostra compagna è riuscita a trovare una soluzione. E con il suo aiuto abbiamo compreso il procedimento per poter risolvere altri problemi.
Le tabelle successive mostrano due disposizioni dei mobili possibili.





Classe 1°C

La ricercatrice ci ha spiegato che la stanza era lunga 7 metri, larga 4 metri e alta 3 metri, e che i mobili avevano queste misure:

Mobili	**Quantità**	**Altezza**	**Larghezza**	**Lunghezza**
Tavoli	2	1 m	3 m	2 m
Sedie	2	0.70 m	1 m	1 m
Divani	3	1 m	2 m	1 m
Appendini	1	2 m	2 m	2 m
Vaso	1	1.50 m	1 m	1 m
Libreria	1	2.50 m	2 m *	2 m *

* la libreria ha forma “a L”

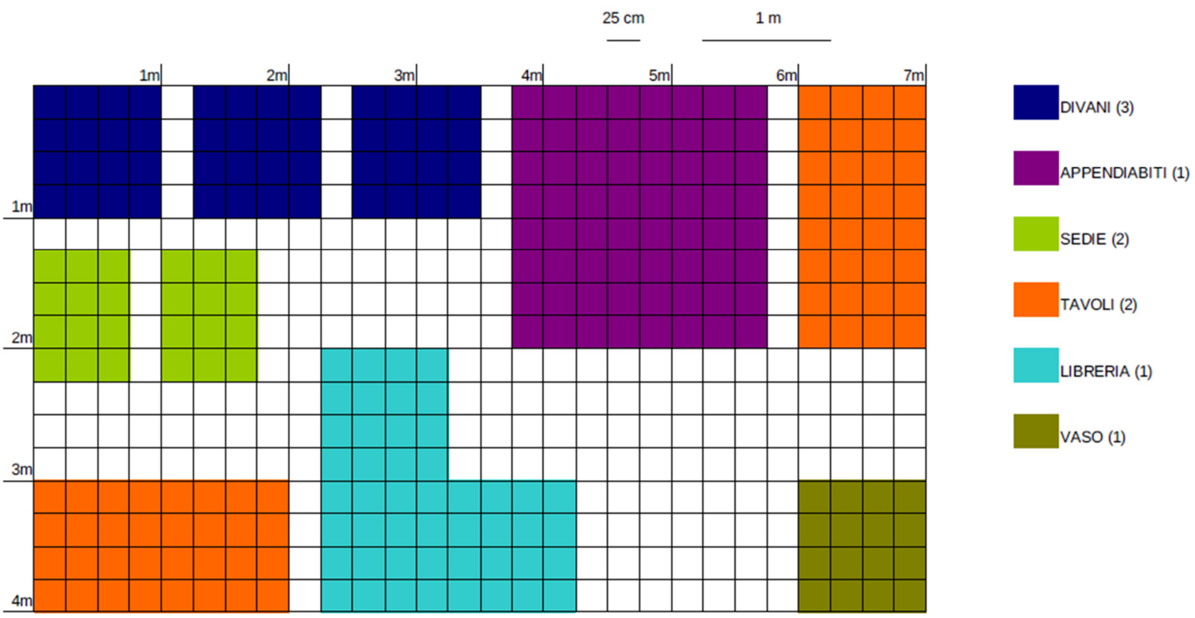
Dovevamo mettere tutti i mobili fatti di cristallo senza farli toccare.
Abbiamo trovato l’area del pavimento della stanza, che era 7 x 4 = 28 m^2, la somma delle superfici occupate dai mobili: 2x3x2 + 2x1x1+ 3x2x1 + 1x2x2 + 1x1x1 + 1x3 = 28 m^2.
Con questa osservazione siamo riusciti a dire che tutti i mobili insieme riempivano la stanza, quindi non ci potevano stare senza toccarsi.

Abbiamo provato a capovolgere qualche mobile e così siamo riusciti a risolvere questo problema.
Nella tabella che segue sono colorate, per ogni mobile, le misure minori.

Mobili	Altezza	Larghezza	Lunghezza
2 tavoli	1 m	3 m	2 m
2 sedie	0.70 m	1 m	1 m
3 divani	1 m	2 m	1 m
1 appendiabiti	2 m	2 m	2 m
1 vaso	1.50 m	1 m	1 m
1 libreria	2.50 m	2 m *	2 m *

* la libreria ha forma “a L”

Abbiamo supposto che ogni mobile venisse appoggiato a terra su una delle due facce aventi le misure colorate. Con questi dati, un esempio di soluzione è riportato nella seguente figura.



Secondo problema (stanza 6x6)

In un box di 3 metri in altezza e 6 metri sia in larghezza sia in lunghezza, dobbiamo mettere:

- *2 cassapanche;*
- *2 comodini;*
- *2 armadi;*
- *2 letti;*

che possono essere smontati in scatole con le seguenti misure (altezza x lunghezza x larghezza, espresse in metri):

- *cassapanche: 0.2x2x2 oppure 0.2x1x1 oppure 0.2x3x3;*
- *comodini: 0.6x1x1 oppure 0.6x2x2 oppure 0.6x3x3;*
- *armadi: 2.8x1x2 oppure 2.8x1x3 oppure 2.8x2x3;*
- *letti: 1x2x1 oppure 1x2x2 oppure 1x1x3.*

Le scatole NON possono essere sovrapposte.

Osservazione preliminare

L'altezza si può non considerare perché:

- se l'altezza di uno dei mobili fosse maggiore di quella della stanza il problema sarebbe impossibile da risolvere (a meno di girare le scatole, ma il problema non lo consente);
- le altezze di tutte le scatole contenenti i mobili smontati sono minori di quella della stanza, quindi tutti i mobili possono entrare tranquillamente nel box senza toccare il soffitto;
- le scatole non possono essere sovrapposte.

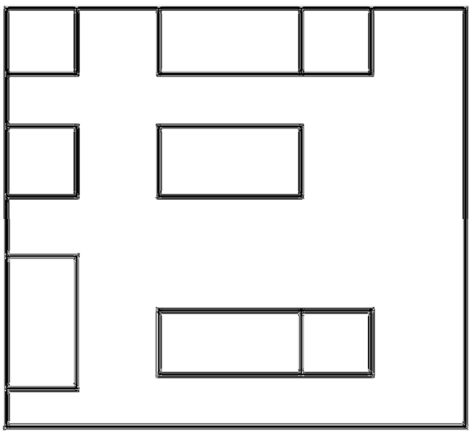
I dati su cui abbiamo lavorato sono quindi i seguenti:

Mobili	**Quantità**	**Misure fra cui scegliere (lunghezza x larghezza)**
Comodini	2	1x1 2x2 3x3
Cassapanche	2	1x1 2x2 3x3
Armadi	2	1x2 1x3 2x3
Letti	2	1x2 1x3 2x2

Esempi di soluzione

Il problema è facilmente risolvibile scegliendo le misure più piccole.

<u>Esempio 1</u>



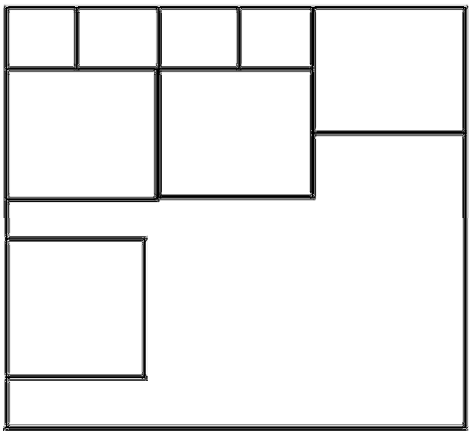
2 cassapanche 1x1

2 armadi 2x1

2 comodini 1x1

2 letti 2x1

<u>Esempio 2</u>



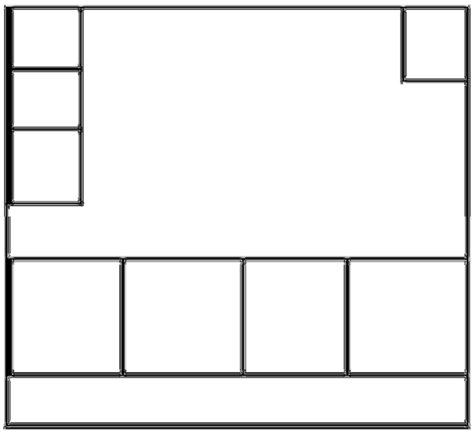
2 cassapanche 1x1

2 comodini 1x1

2 armadi 2x2

2 letti 2x2

Esempio 3



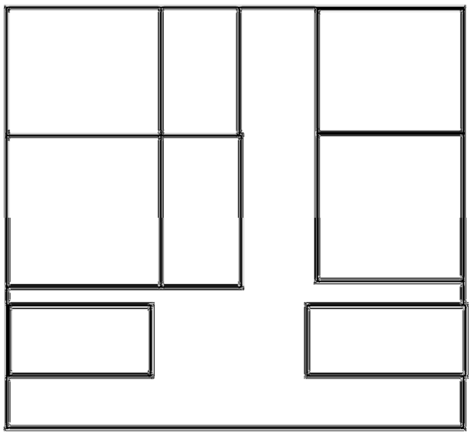
2 cassapanche 1x1

2 comodini 1x1

2 armadi 2x2

2 letti 2x2

Esempio 4



2 cassapanche 2x2

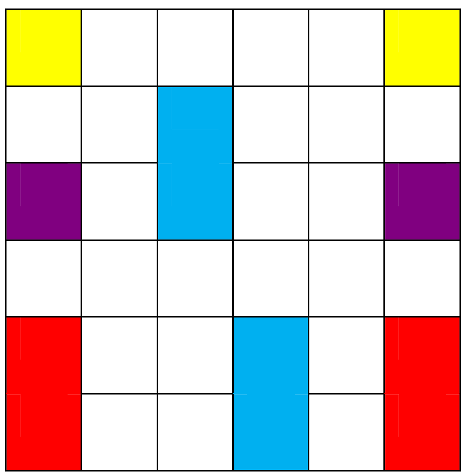
2 comodini 2x2

2 armadi 2x1

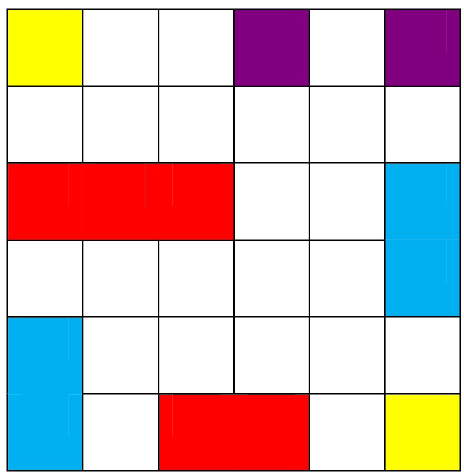
2 letti 2x1

I prossimi esempi dimostrano che si può fare in modo che nessun mobile ne tocchi altri.

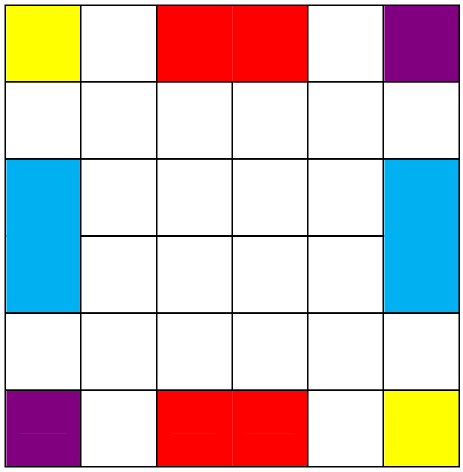
Esempio 5



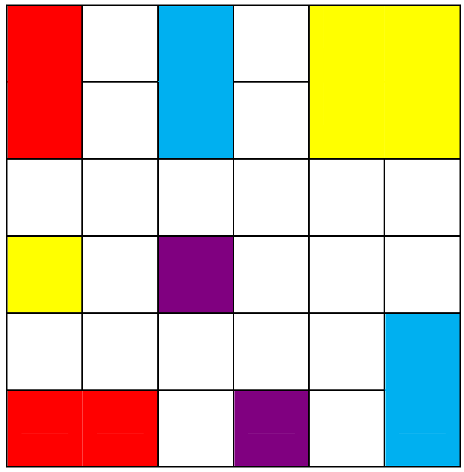
Esempio 6



Esempio 7



Esempio 8



Alcune difficoltà aggiuntive

1° difficoltà aggiuntiva: i mobili dello stesso tipo non si devono toccare.

2° difficoltà aggiuntiva: si deve occupare tutto lo spazio a disposizione.
In questo caso si deve avere, per forza, 36 m^2 (area del box di 6m x 6m) come somma delle superfici occupate dagli 8 mobili (2 comodini, 2 cassapanche, 2 letti, 2 armadi) con misure scelte fra quelle elencate.

Commento

Secondo alcuni di noi, all'inizio, era un problema talmente facile da poterlo risolvere ad occhi chiusi! Ma quando abbiamo cominciato a svolgerlo ci siamo accorti che non era così facile, ed anche che se si trovavano soluzioni con i dati numerici, queste andavano sperimentate nella realtà, ossia disegnate.

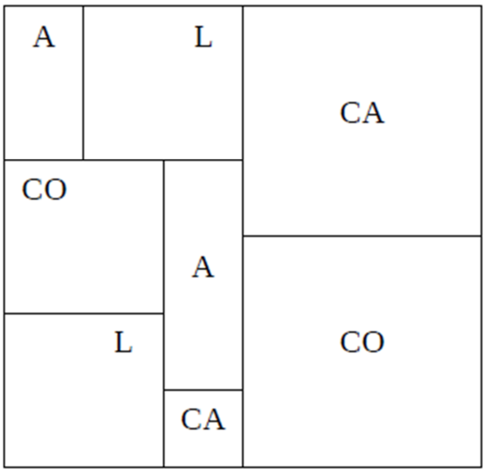
Tabella dei tentativi effettuati (sia riusciti che non) e disegni corrispondenti

Dopo aver analizzato i dati forniti dal testo del problema, abbiamo cominciato a fare alcuni tentativi. Nella prima colonna a destra si trovano i nomi di chi ha trovato il risultato corrispondente.

	Cassapanche		Comodini		Armadi		Letti		Superficie occupata	Si può?
Marta	1x1	3x3	3x3	2x2	1x2	1x3	2x2	2x2	36 q	Sì
Matrà	3x3	3x3	2x2	2x2	3x1	3x1	2x1	2x1	36 q	No
Filo	2x2	3x3	3x3	2x2	1x3	1x3	2x1	2x1	36 q	Sì
Matrà	3x3	2x2	3x3	2x2	3x2	2x2	3x2	2x2	36 q	(*)
Emma	3x3	2x2	2x2	2x2	2x3	1x3	2x1	2x2	36 q	Sì
Davide	2x2	3x3	1x1	1x1	1x3	1x3	2x2	1x3	36 q	Sì

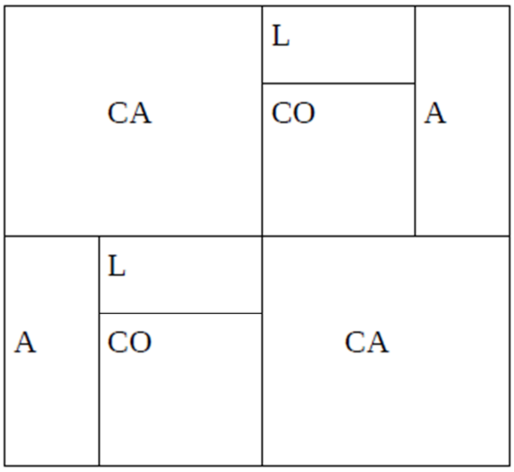
Gli schemi successivi rappresentano i risultati riportati nella tabella.

MARTA =



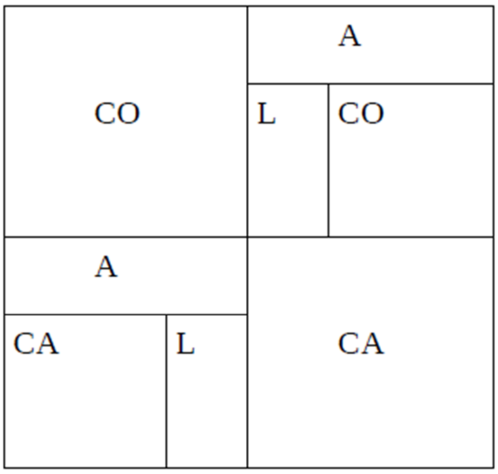
Questo risultato risponde al quesito del problema correttamente, perché gli oggetti uguali non si toccano e si è riuscito a utilizzare tutto lo spazio.

MATRÀ =



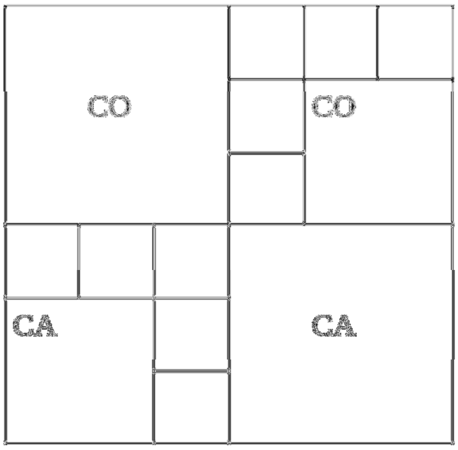
Invece questo risultato non risponde alle richieste perché le due cassapanche si toccano in un angolo.

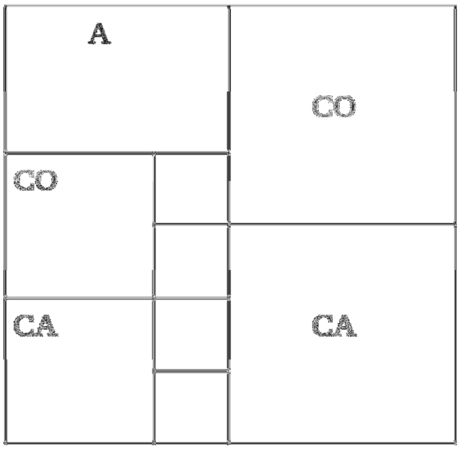
FILO =



Questa disposizione risponde al quesito correttamente.

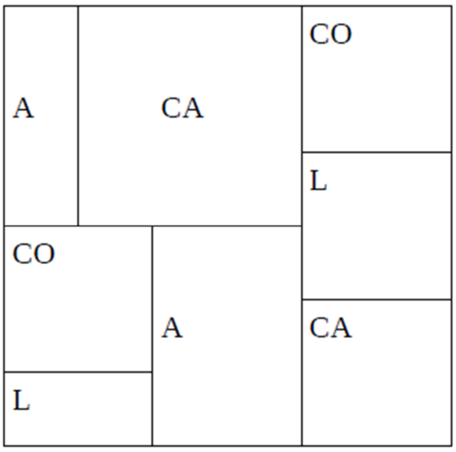
(*) MATRÀ =





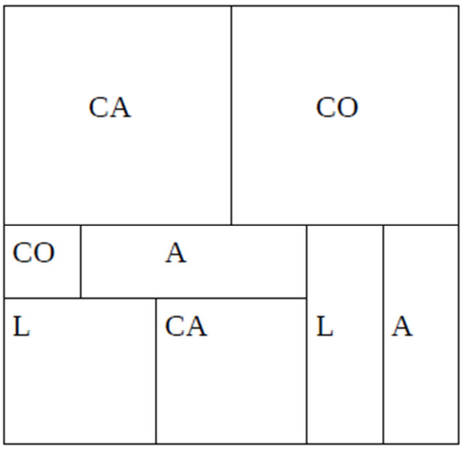
In questo caso erano stati sbagliati alcuni conti. In qualsiasi modo si dispongano gli oggetti non riusciremo mai a risolvere il problema perché ci sarà sempre troppo poco spazio a disposizione.

EMMA =



Tutto lo spazio è stato occupato e tutti i mobili sono stati disposti nella stanza correttamente, cioè senza che due cose uguali si tocchino, quindi è una soluzione corretta del problema.

DAVIDE =



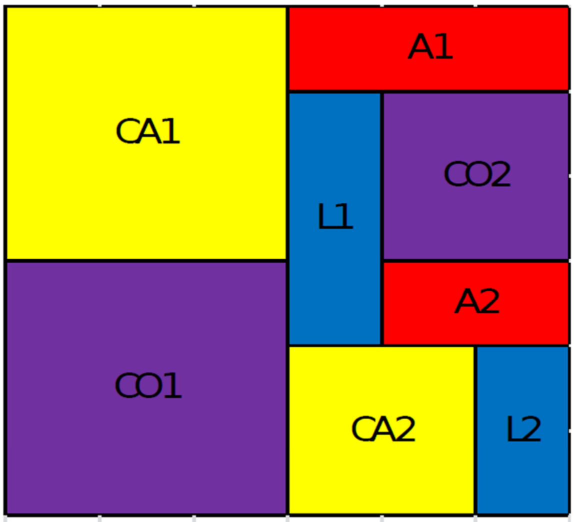
Anche questa risposta si è verificata corretta.

Varianti del secondo problema

Trovare una combinazione di misure tali che tutti i mobili entrino nel box senza essere sovrapposti o ruotati (cioè l'altezza deve rimanere l'altezza), con le seguenti ulteriori condizioni o varianti:

1) *comodini e cassapanche non si possono toccare e oggetti uguali non si possono toccare;*
2) *letti e comodini si devono toccare e nel box deve rimanere un quadretto vuoto;*
3) *in un box 8x8 gli stessi oggetti ma di dimensioni raddoppiate;*
4) *gli stessi oggetti (senza cambiarne le dimensioni) in un box 4x4.*

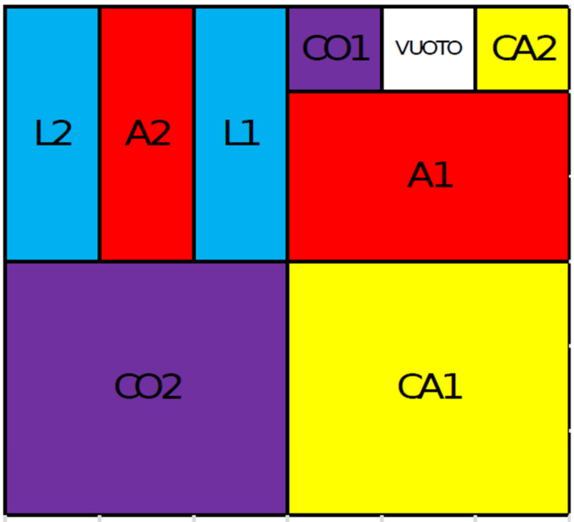
Soluzione della variante 1



LEGENDA	CA1=3X3	CA2=2X2	CO1=3X3	CO2=2X2	A1=1x3
	A2=1X2	L1=1X3	L2=1X2		

I comodini e le cassapanche non si toccano e abbiamo riempito tutto lo spazio.

Soluzione della variante 2 secondo l'interpretazione della 1°A



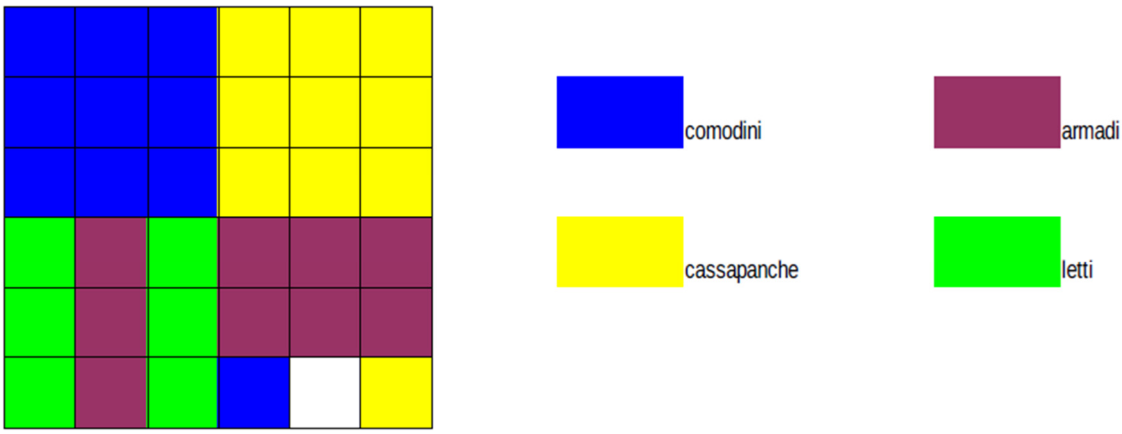
LEGENDA	L1=1X3	L2=1X3	A1=2X3	A2=1X3	CO1=1X1
	CO2=3X3	CA1=3X3	CA2=1X1	VUOTO=1X1	

I letti e i comodini si toccano tra loro ed è rimasto un quadretto vuoto.

Soluzione della variante 2 secondo l'interpretazione della 1°C

Avevamo diverse misure per ogni mobile, ma noi abbiamo deciso di utilizzare delle misure che si potessero sommare dando come risultato 35 m^2 (perché il problema ci chiedeva di riempire il box 6x6 con tutti i mobili lasciando però 1 m^2 libero).
Abbiamo avuto delle difficoltà, prima fra tutte scegliere le misure idonee. Per non parlare poi della disposizione dei mobili, visto che mobili uguali non potevano toccarsi l'un l'altro mentre comodini e letti che dovevano farlo.
Alla fine siamo riusciti a risolvere il problema.

MOBILI	MISURE POSSIBILI	MISURE SCELTE	AREE
comodino	1x1 2x2 3x3	3x3	9 m^2
comodino	1x1 2x2 3x3	1x1	1 m^2
cassapanca	1x1 2x2 3x3	3x3	9 m^2
cassapanca	1x1 2x2 3x3	1x1	1 m^2
armadio	1x2 1x3 2x3	1x3	3 m^2
armadio	1x2 1x3 2x3	2x3	6 m^2
letto	1x2 1x3 2x2	1x3	3 m^2
letto	1x2 1x3 2x2	1x3	3 m^2
		SOMMA DELLE AREE	**35 m^2**



Soluzione della variante 3

<u>Prima opzione: con buco</u>

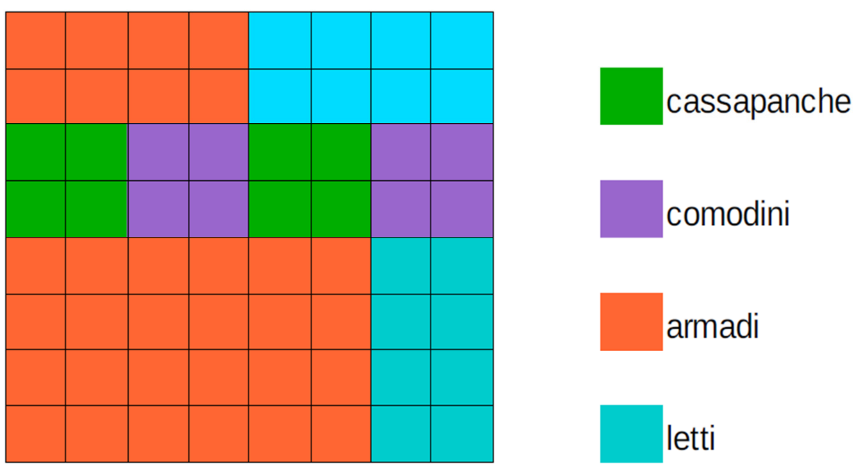
4x2 L	2x2 CO	2x2 CA
4x2 A		
4x2 L		
4x2 A	2x2 CO	2x2 CA

In questa soluzione la stanza non viene riempita completamente.
La tabella delle aree chiarisce la situazione.

MOBILI	MISURE POSSIBILI	MISURE SCELTE	AREE
comodino	2x2 4x4 6x6	2x2	4 m^2
comodino	2x2 4x4 6x6	2x2	4 m^2
cassapanca	2x2 4x4 6x6	2x2	4 m^2
cassapanca	2x2 4x4 6x6	2x2	4 m^2
armadio	2x4 2x6 4x6	2x4	8 m^2
armadio	2x4 2x6 4x6	2x4	8 m^2
letto	2x4 2x6 4x4	2x4	8 m^2
letto	2x4 2x6 4x4	2x4	8 m^2
		SOMMA	**48 m^2**
Box intero		**8x8**	**64 m^2**
Spazio inutilizzato		**4x4**	**64 – 48 = 16 m^2**

<u>Seconda opzione: senza buchi</u>
In questo caso ci siamo posti l'obiettivo di riempire completamente lo spazio.
È stata quindi cercata una soluzione in cui la somma delle aree dei mobili fosse 64 m^2.
Ci siamo accorti che il problema può essere risolto in più di un modo: diamo qui un esempio.

MOBILI	MISURE POSSIBILI	MISURE SCELTE	AREE
comodino	2x2 4x4 6x6	2x2	4 m^2
comodino	2x2 4x4 6x6	2x2	4 m^2
cassapanca	2x2 4x4 6x6	2x2	4 m^2
cassapanca	2x2 4x4 6x6	2x2	4 m^2
armadio	2x4 2x6 4x6	2x4	8 m^2
armadio	2x4 2x6 4x6	4x6	24 m^2
letto	2x4 2x6 4x4	2x4	8 m^2
letto	2x4 2x6 4x4	2x4	8 m^2
		SOMMA DELLE AREE	**64 m^2**



Soluzione della variante 4
Abbiamo notato che anche in un box 4x4 riusciamo a farci stare tutto perfettamente: basta scegliere due armadi 3x1, due letti 3x1 e sia i comodini che le cassapanche 1x1.

CA	CO	CA	CO
A	L	A	L

CO = comodino 1x1

CA = cassapanca 1x1

A = armadio 1x3

L = letto 1x3

Questa variante non era stata posta né dalla ricercatrice né dal nostro professore.

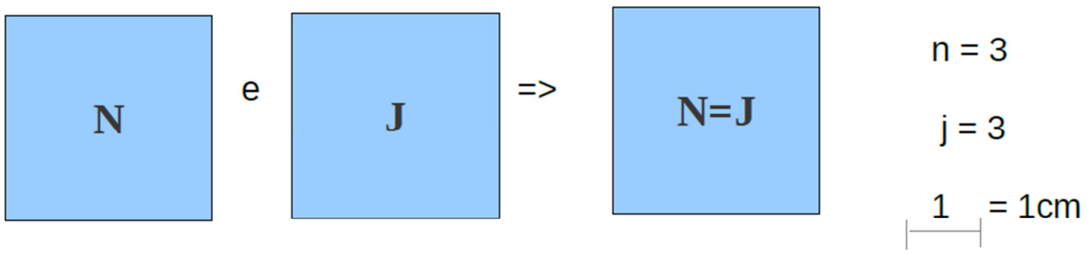
Terzo problema

Siano n, j numeri naturali, sia N un quadrato di lato n e J un quadrato di lato j. Fissato N, trovare quali J possono ricoprire senza spazi e senza sovrapposizioni N. Trovare inoltre quanti J ricoprono totalmente il quadrato.

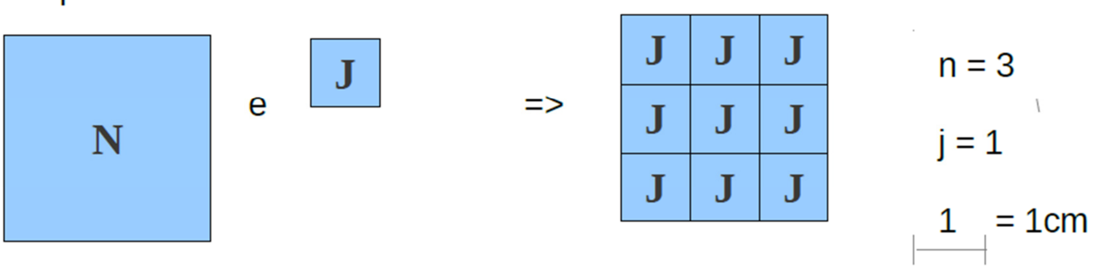
Abbiamo avuto difficoltà a capire questo problema appena la ricercatrice ce l'ha presentato, però alla fine siamo arrivati alla soluzione anche grazie alle sue spiegazioni.

La prima cosa che ci ha spiegato è stata che n e j corrispondono a due numeri naturali, che rappresentano i lati di quadrati, mentre N e J i quadrati corrispondenti. Dato che il problema chiede quali e quante volte J sta in N, j deve per forza essere minore o uguale a n. Per farci capire quali quadrati J stanno in N ci ha fatto fare varie prove e siamo arrivati alla conclusione che ogni quadrato di lato n può sempre essere ricoperto con quadrati aventi lato di misura 1 o n stesso.

Esempio J = N

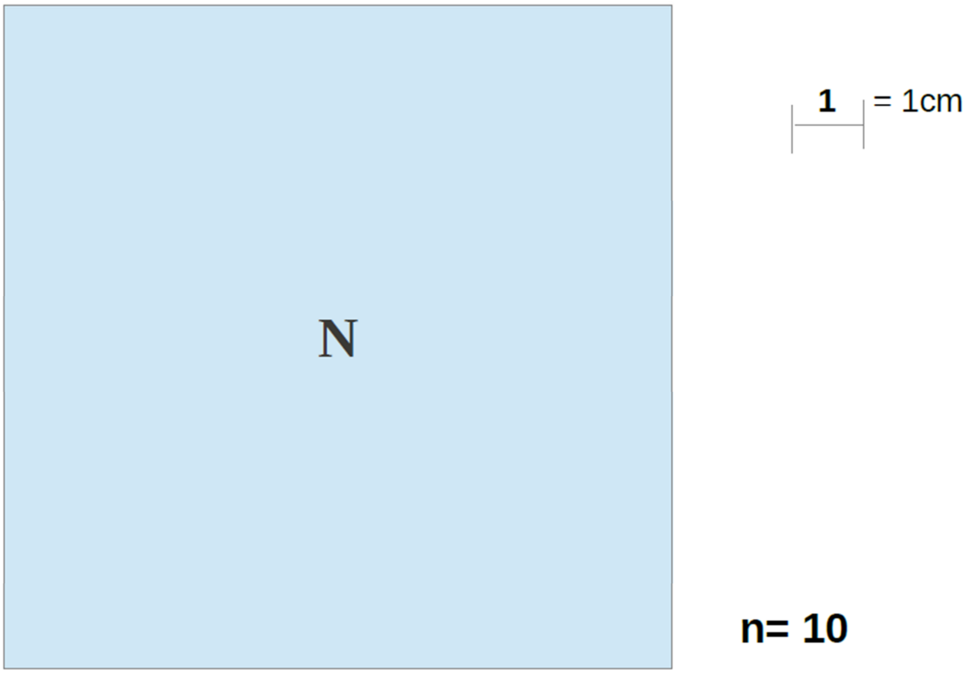


Esempio J = 1

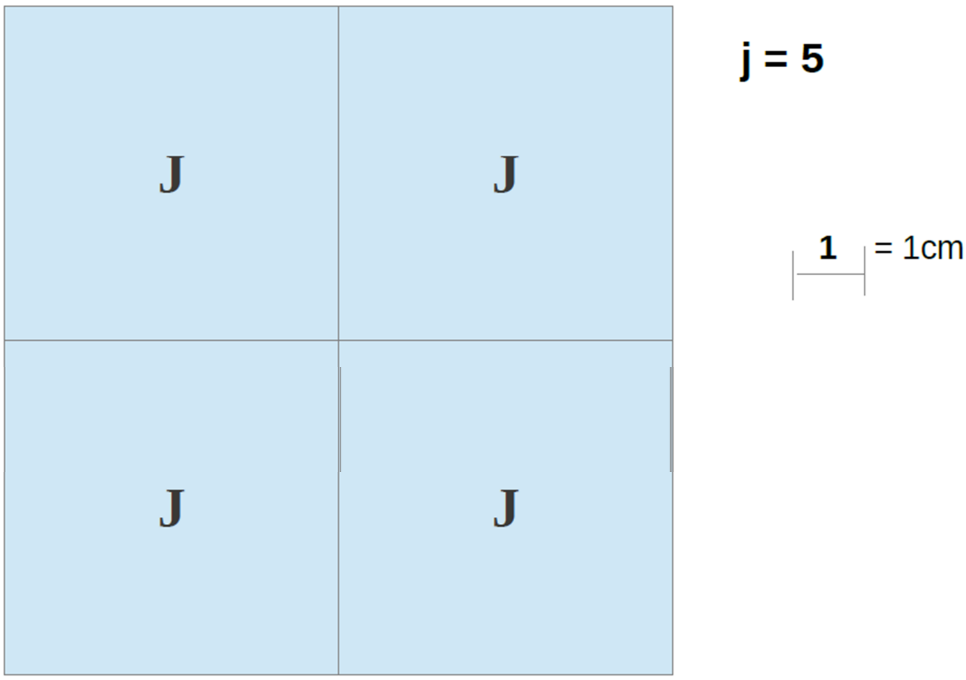


Dopo altre prove abbiamo anche capito che il quadrato J per stare esattamente dentro al quadrato N deve avere come lato j un divisore di n.

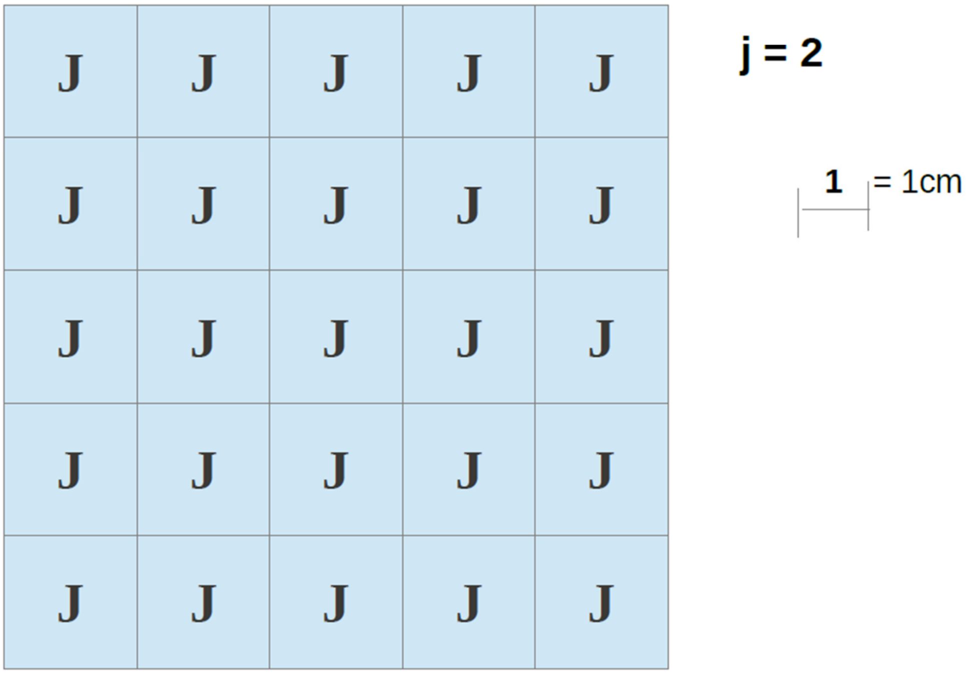
Esempio: **n=10** divisori **10 – 5 - 2 - 1**
quindi **j =10** o **j =5** o **j=2** o **j=1**



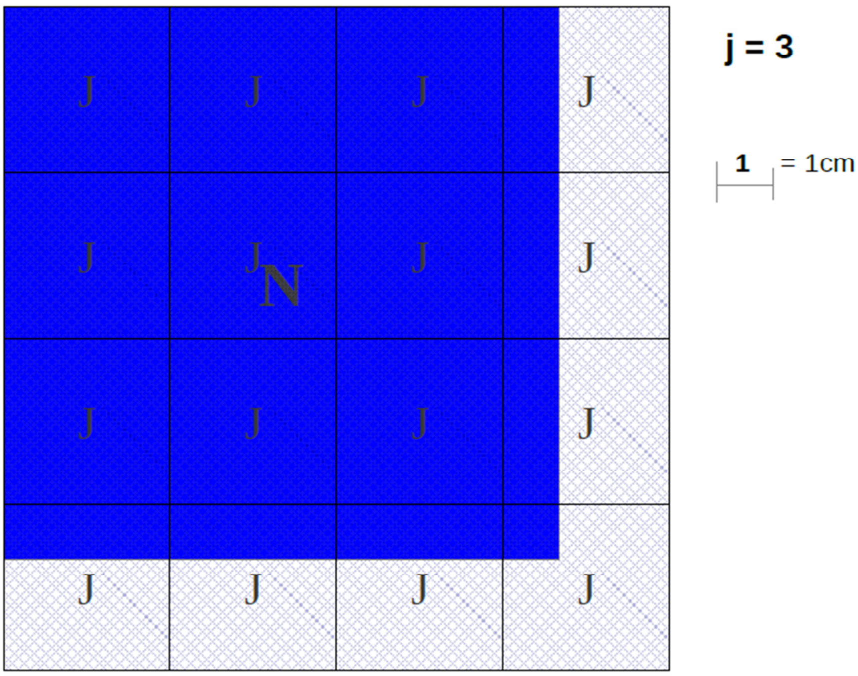
Esempio **j= 5**



Esempio **j= 2**



Esempio di errore:

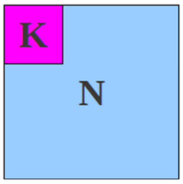


Per scoprire quanti quadratini J stanno in N la ricercatrice ci ha fatto diverse domande, finché qualcuno non ha parlato di area. Per arrivare alla soluzione, infatti, occorre conoscere l’area di N e di J e poi calcolarne il rapporto.
La formula è quindi:

$$\frac{n \times n}{j \times j} \quad \text{oppure} \quad \frac{n^2}{j^2} .$$

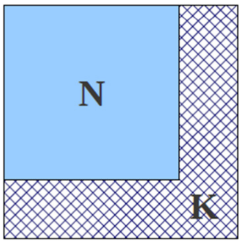
A questo problema è stato poi aggiunto un altro elemento ovvero: un quadrato K di lato k detto "quadrato di fastidio", che proprio come dice il nome è posizionato in un angolo del quadrato N e non deve essere ricoperto con quadratini J. Il quadrato K deve essere più piccolo di N e non uguale a J.

Esempio corretto K < N => k = 1 e n = 3



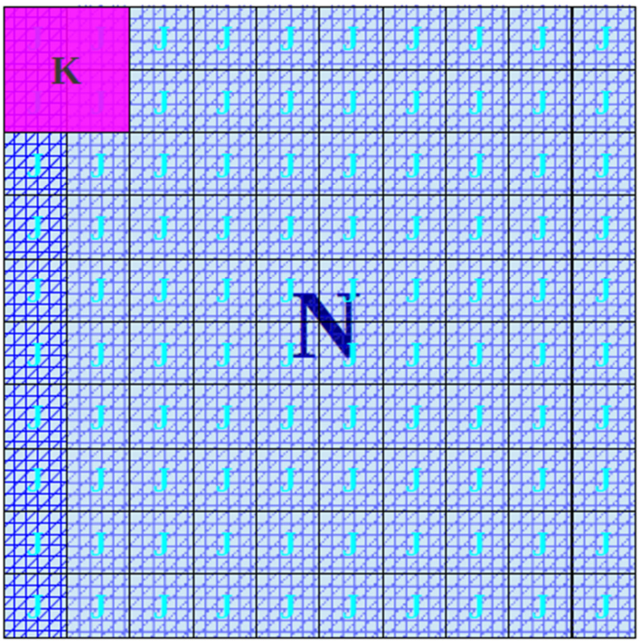
1 = 1cm

Esempio errato K > N => k = 4 e n = 3



1 = 1cm

Abbiamo scoperto che J deve essere contenuto un numero esatto di volte anche in K oltre che in N. Quindi j deve essere un divisore di n e anche di k, perché se non ci fosse K, il suo spazio dovrebbe essere ricoperto anch'esso con quadrati di tipo J.

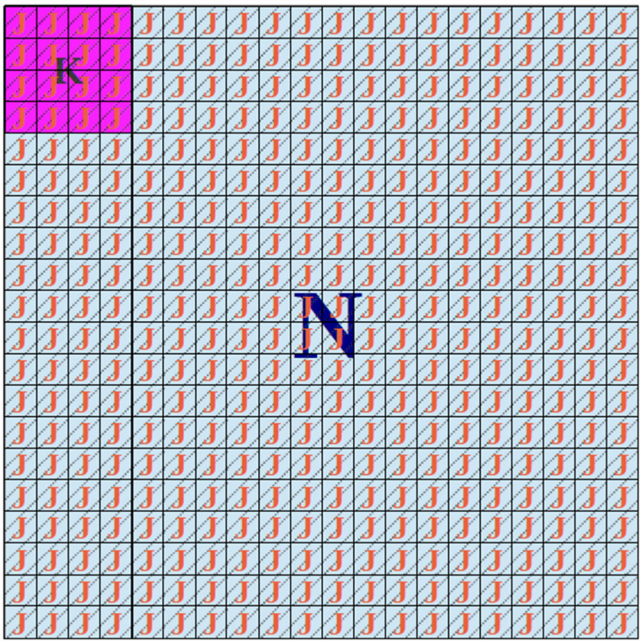


n=20

k= 4

j=2

1 = 2 cm



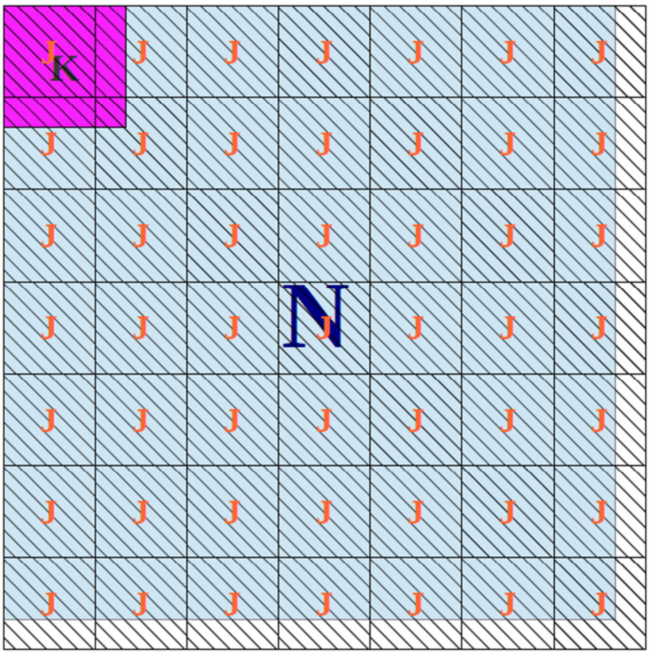
n=20

k= 4

j=1

1 = 2 cm

Esempio errato



n=20

k= 4

j=3

1 = 2 cm

Ricordando la formula trovata precedentemente, in questo caso si ha:

$$\frac{n \times n - k \times k}{j \times j} \quad \text{oppure} \quad \frac{n^2 - k^2}{j^2}\ .$$