Un costruttore in difficoltà

Scuola Secondaria di I grado "G. Galilei" – Busto Arsizio (VA)

Alunni delle classi: 3°A, 3°B, 3°C, 3°D e 3°E

Insegnanti di riferimento: Maria Ausilia Sora e Alessandra Zanzottera

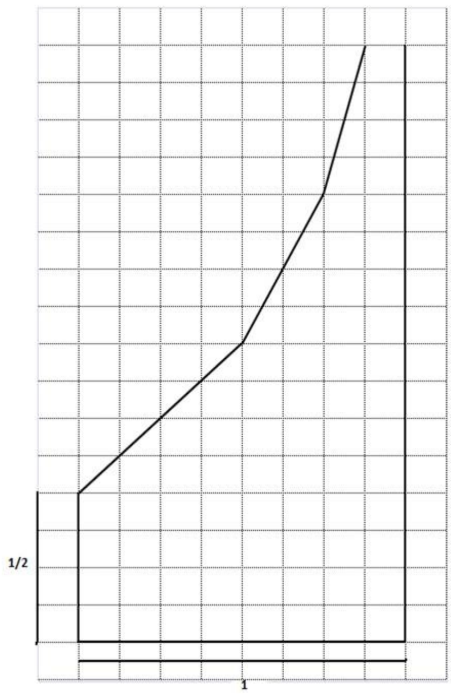
Ricercatore: Andrea Polini

Ragazzi partecipanti: Giacomo Caccia, Mara Castiglioni, Chiara Cibari, Alessia De Bernardi, Andrea De Bernardi, Filippo De Bernardi, Emanuele Galli, Matteo Gianferrari, Marco Mariani, Alessio Martino Turco, Andrea Napolitano, Alice Oldani, Simone Paparazzo, Daniele Pisanu, Martina Poto, Alessia Santarsiero

IL PROBLEMA

Un ingegnere decide di superare ogni record: vuole realizzare il palazzo più alto del mondo.
Per raggiungere il suo obiettivo capisce che l'unica possibilità è quella di progettare una cupola di altezza infinita!
Fornisce quindi a un costruttore locale le seguenti indicazioni.

La cupola si ottiene ruotando di 360° attorno al lato verticale la seguente "sezione". (Quello in figura è solo l'inizio della sezione, infatti bisogna immaginare che cresca all'infinito secondo la stessa legge..).



Il costruttore è perplesso: non ha mai realizzato strutture "infinite".
Per prima cosa decide di produrre un modellino in carta della sezione, utilizzando le indicazioni di scala fornite dall'ingegnere, ma si trova davanti ai primi quesiti: "Riuscirò mai a realizzarlo?
Se la sezione si estende secondo una certa legge all'infinito è possibile utilizzare una quantità di carta finita? In tal caso quanto vale l'area della sezione?"
Dopodiché, prima di procedere con i lavori, prova a realizzare un modellino 3D della cupola. Chiaramente i problemi relativi all'estensione infinita della sezione si ripercuotono anche in questo caso!
Quale sarà il volume del modellino? Sarà finito o infinito?

PRIME CONSIDERAZIONI

I dubbi

Quando ci è stato presentato il problema alcuni di noi hanno da subito ipotizzato che la struttura (la cupola) fosse finita, altri, invece, che fosse infinita.
Ecco alcune delle nostre riflessioni iniziali:

Finita perché:

- è fisicamente impossibile che essa non abbia una fine: per costruire una cupola infinita non basterebbero i materiali e il tempo;
- arrivati a una certa altezza la struttura diventerebbe troppo piccola e fragile e si potrebbe spezzare facilmente;
- la base cilindrica dovrebbe sorreggere un peso infinito quindi la struttura potrebbe crollare su se stessa.

Infinita perché:

- la base di ogni piano, in sezione è la metà di quella del piano precedente.

Si tratta però di un problema astratto, quindi abbiamo abbandonato le nostre iniziali perplessità riguardo alla possibilità di costruire la cupola nella realtà e ci siamo concentrati sugli aspetti matematici. Ci siamo quasi immediatamente scontrati con un altro problema.

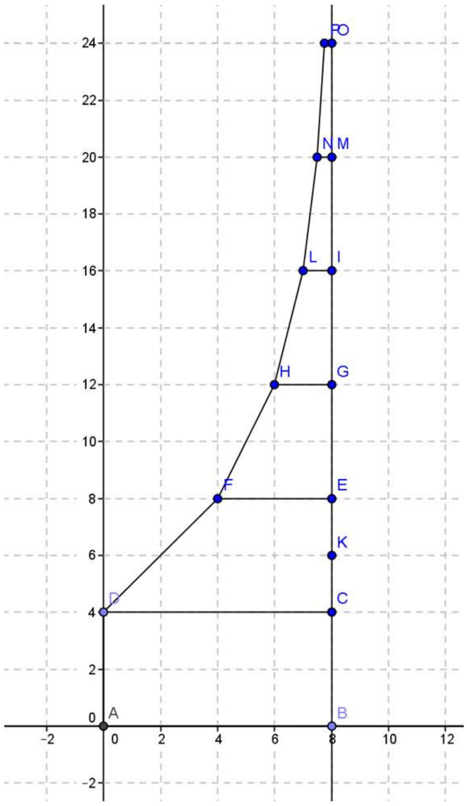
I limiti della calcolatrice

Nella sezione l'altezza di ogni piano rimane costante e, escludendo il primo piano (rettangolo), la base di ogni piano (che in sezione è un trapezio) dimezza rispetto alla base del piano inferiore.
Abbiamo quindi provato a calcolare la misura delle basi dei vari piani con la calcolatrice.
Assumendo la base del primo piano uguale ad 1, abbiamo cominciato a dividere ripetutamente per 2 i risultati ottenuti e, con nostra sorpresa, dopo 25 divisioni abbiamo ottenuto 0!
Ci siamo però accorti che con la calcolatrice scientifica di un compagno siamo arrivati a dividere 350 volte prima di ottenere 0…!

Ci siamo allora chiesti:
Continuando a dividere per 2 ad un certo punto si arriva VERAMENTE allo zero?
Perché le due calcolatrici si comportano in modo diverso???
Anche la calcolatrice SBAGLIA COME NOI???
Abbiamo capito che semplicemente la calcolatrice ha UN LIMITE: riesce a rappresentare solo un sottoinsieme FINITO dell'insieme dei numeri razionali.
I nostri dubbi non sono quindi stati risolti: tenendo conto che l'insieme dei numeri razionali è infinito, anche la figura può essere infinita? Nel senso che la base di ogni piano avrà sempre misura positiva (diversa da zero)?

LA SEZIONE

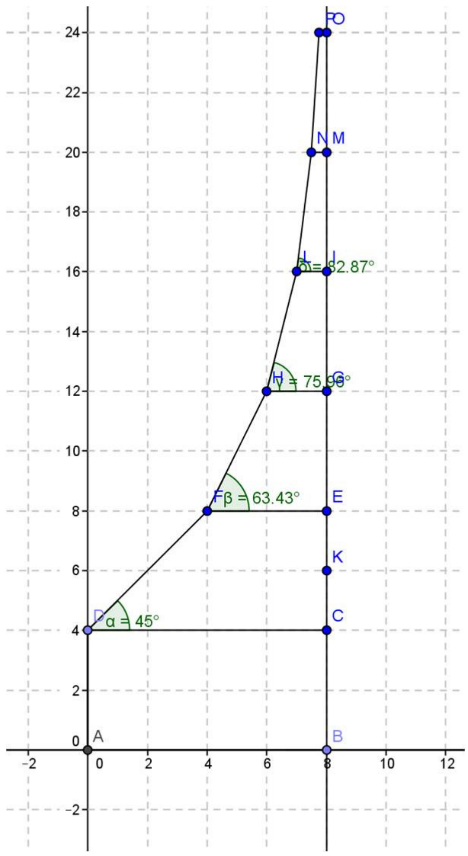
Abbiamo ricreato la figura in due dimensioni arrivando fino al sesto piano utilizzando il software *Geogebra*.



Considerazioni sugli angoli

Abbiamo considerato gli angoli complementari a quelli evidenziati nella figura qui a fianco.

Inizialmente pensavamo che tali angoli dimezzassero al passaggio da un piano della sezione a quello superiore ma con *Geogebra* abbiamo verificato che non è così: diminuiscono ma non dimezzano!



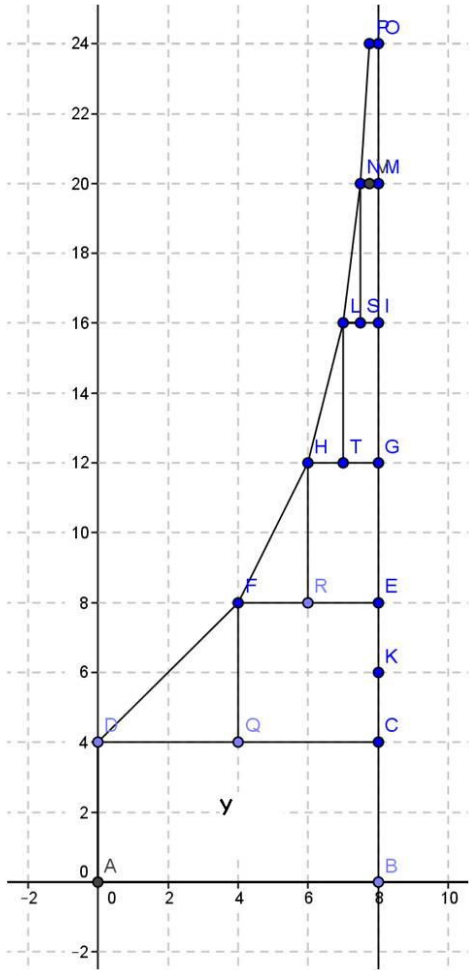
AREA DELLA SEZIONE

Le formule

Come già accennato, dividendo la sezione in tanti piani, il primo piano è l'unico di forma rettangolare e quindi l'unico che ha entrambe la basi uguali. Negli altri piani (trapezi) il rapporto fra base maggiore e base minore è B : b = 1 : 1/2.

Dopo aver suddiviso ciascun piano della sezione in un rettangolo e un triangolo rettangolo (che insieme formano un trapezio rettangolo), abbiamo notato che anche l'area dimezza passando da un piano all'altro: la terza è 1/2 della seconda, la quarta è 1/4 della seconda e 1/2 della terza e così via.

- Area rettangolo y = b x h
- Area piano 1 = 3/4 di y
- Area piano 2 = 3/8 di y e 1/2 di piano1
- Area piano 3 = 3/16 di y 1/2 di piano2 .



Considerazioni

Seguendo questo schema, si arriva alla conclusione che ogni piano avrà sempre un'area maggiore di 0. L'area di ogni piano si può infatti ottenere come somma delle aree di un rettangolo e di un triangolo rettangolo con lato obliquo che non raggiungerà mai un'angolatura pari a zero gradi rispetto alla verticale!

I calcoli

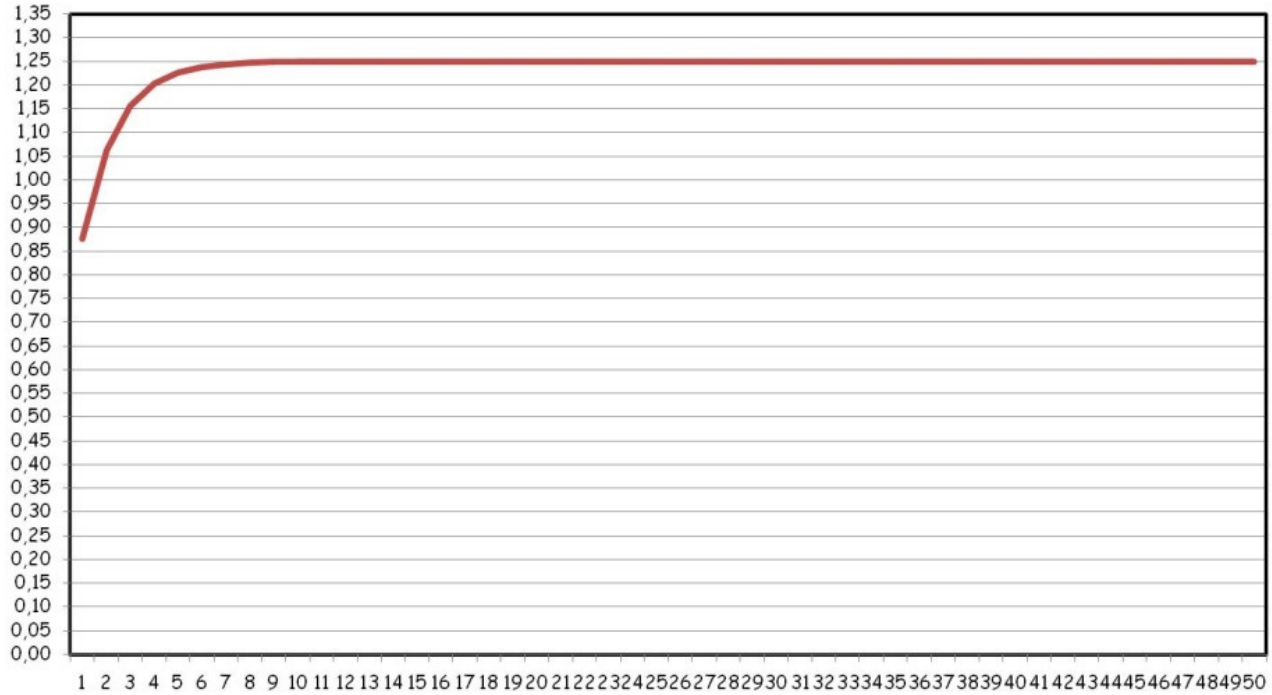
Assumendo come misura della base del rettangolo (piano 1) 1m e come altezza 0,5m, seguendo la formula trovata, abbiamo calcolato le aree di diversi piani:

1x0.5= 0.5 m² (base)
0.5 x 3/4 = 0.375 m²
0.375 : 2 = 0.1875 m²
0.1875 : 2 = 0.09375 m²
0.09375 : 2 = 0.046875 m²
………………………………………..
0.00000000017 : 2 = 0.00000000008 m²
0.00000000008 : 2 = 0.000000000004 m²
0.00000000004 : 2 = 0.000000000002 m²
0.00000000002 : 2 = 0.000000000001 m²
0.00000000001 : 2 = …….

Utilizzando *Excel* abbiamo calcolato anche le somme parziali:

somma delle aree dei primi 10 piani = 1,2492675781250000
somma delle aree dei primi 50 piani = 1,2499999999999900

Si nota che l'area della sezione è espressa da un numero decimale che tende a un valore finito: 1,25. Abbiamo poi provato a rappresentare i valori delle somme parziali su un piano cartesiano. Sull'asse x sono rappresentati i piani (n) e sull'asse y le somme parziali S(n) delle aree degli n piani.



L'area è finita!
Come si nota la linea che si ottiene congiungendo i punti del piano cartesiano non arriva mai a toccare la retta y = 1.25 parallela all'asse x.
Quindi l'area della figura non è infinita perché non supera mai la soglia di 1.25 u^2. Possiamo supporre che questo sia il valore dell'area della sezione, seppur approssimato.
Abbiamo cercato di dare una spiegazione.
La differenza tra l'area dei diversi piani si dimezza sempre.
All'area iniziale si aggiungerà sempre qualcosa di più piccolo che farà in modo che l'area cresca sempre ma senza superare mai la soglia.
Questo perché se ho 1 e devo arrivare a 2, dovrei aggiungere 1, però aggiungo 0.5; a questo punto, per arrivare a 2, dovrei aggiungere quanto aggiunto prima, cioè 0,5, invece aggiungo la metà, cioè 0.25; adesso per arrivare a 2 dovrei aggiungere quanto aggiunto prima, ovvero 0.25, però aggiungo la metà, 0.125; a questo punto, per arrivare a 2, dovrei aggiungere quanto aggiunto prima, cioè 0.125, invece aggiungo la metà, 0.0625 …… sapendo che un numero può essere diviso per 2 infinite volte, ci accorgiamo che, seppur aumentando sempre, l'area non arriverà mai ad essere 1.25, anche se si avvicinerà sempre di più!

La formula
Abbiamo provato a trovare una formula per l'area che avesse meno variabili possibili e che fosse valida per ogni piano.
Abbiamo analizzato le formule delle aree dei primi piani:

[(1+1/2)*1/2*1/2]=3/8
[(1/2+1/4)*1/2*1/2]=3/16

Dopo diversi tentativi abbiamo capito che l'area del primo trapezio si può trovare facendo $3*(1/2)^3$, del secondo facendo $3*(1/2)^4$ e che per ogni piano l'esponente aumenta di 1. Per trovare poi l'area della sezione bisogna fare la somma di tutti i piani.
Su suggerimento del nostro ricercatore abbiamo individuato un simbolo con cui esprimere una somma infinita di termini: la sommatoria.
Siamo così riusciti a scrivere questa formula:

$$\mathbf{1/2 + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times (1/2)^{n+2}}$$

Tra l'esponente e il piano c'è una relazione: l'esponente è di 2 unità più grande del numero del piano; ad esempio per trovare il PRIMO piano si deve fare 3*(1/2) alla TERZA (1+2=3) ed è così per ogni piano.
Applicando la nostra formula, ecco la somma dei primi 5 piani:

0=1/2
1=1/2 + 3/8 =7/8
2=7/8 + 3/16 =17/16
3=17/16 +3/32=37/32
4=37/32 + 3/64=77/64
5=77/64 + 3/128=157/128…

Osservazioni
Abbiamo notato che ogni numeratore finisce per 7. *COINCIDENZE?!*
No, perché dal piano 1 al piano 2 si aggiunge 10 al numeratore del risultato precedente e per passare dal 2 al 3 si aggiungerà 10 * 2, dal 3 al 4 aggiungeremo $10*2^2$ e ad ogni piano che saliamo l'esponente del due aumenterà di 1 e, siccome il numero di partenza è 7, il numeratore finirà sempre con 7.
Il denominatore invece diventerà sempre il doppio di quello precedente.
Quindi, conoscendo l'area del piano 1, l'area della figura si può anche ottenere con un'altra formula:

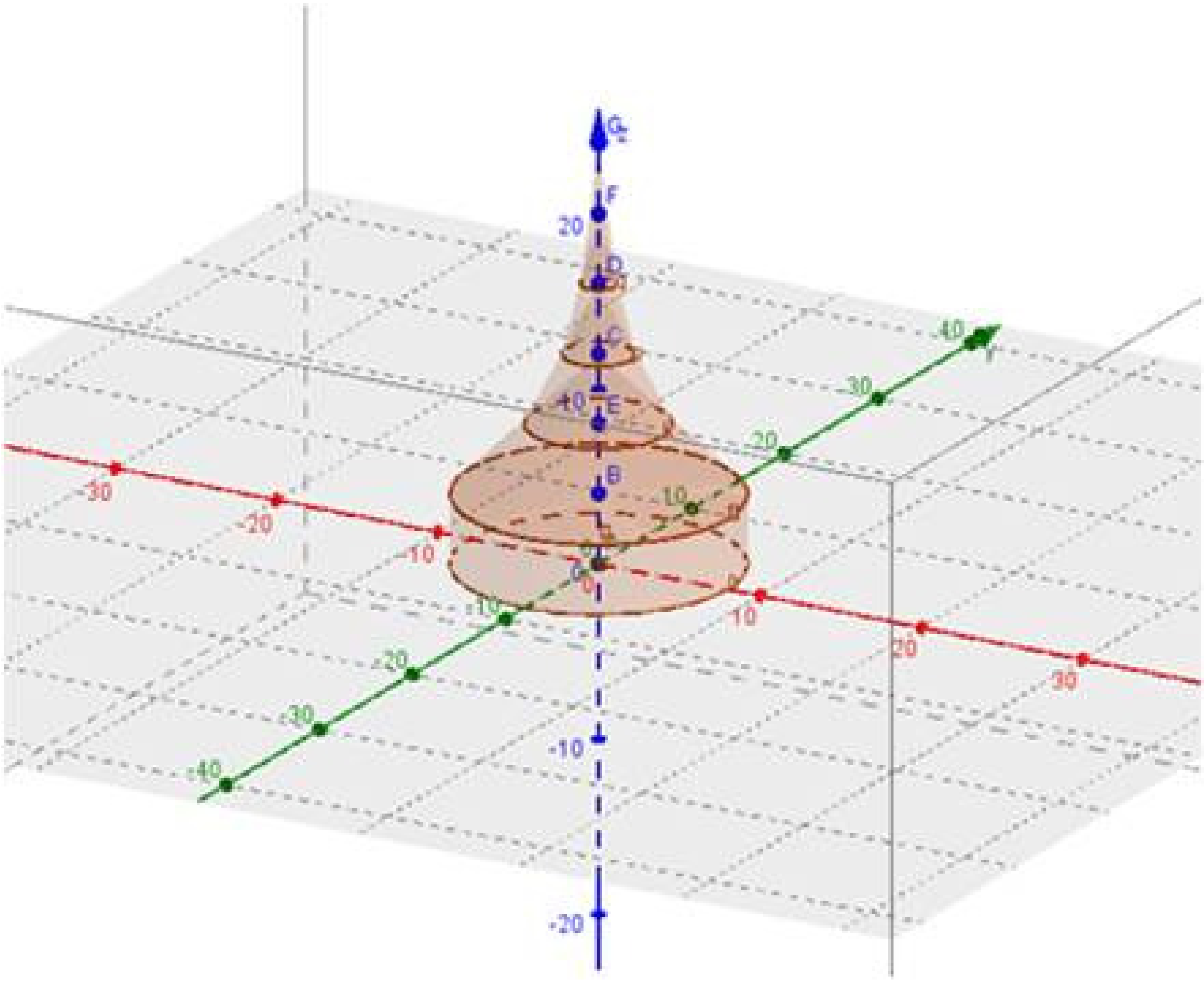
1=7/8
2=7+10/8*2=17/16
3=$17+10*2/8*2^2$=37/32
4=$37+10*2^2/8*2^3$=77/64
5=$77+10*2^3/8*2^4$=157/128

LA CUPOLA

Il modellino in 3D

Utilizzando del cartoncino abbiamo provato a realizzare un modellino tridimensionale della cupola ottenuta dalla rotazione della sezione di 360° attorno al lato verticale.
Si nota che alla base c'è un cilindro, tutti gli altri piani sono dei tronchi di cono.

GEOGEBRA per rappresentare la cupola
Utilizzando *Geogebra 3D* abbiamo ottenuto un modellino tridimensionale sovrapponendo a un cilindro, di raggio 8 u e di altezza 4 u, coni con altezza doppia rispetto a quella del cilindro (perché con *Geogebra* non si possono rappresentare direttamente dei tronchi di cono), dimezzando via via il raggio rispetto al cono inferiore.

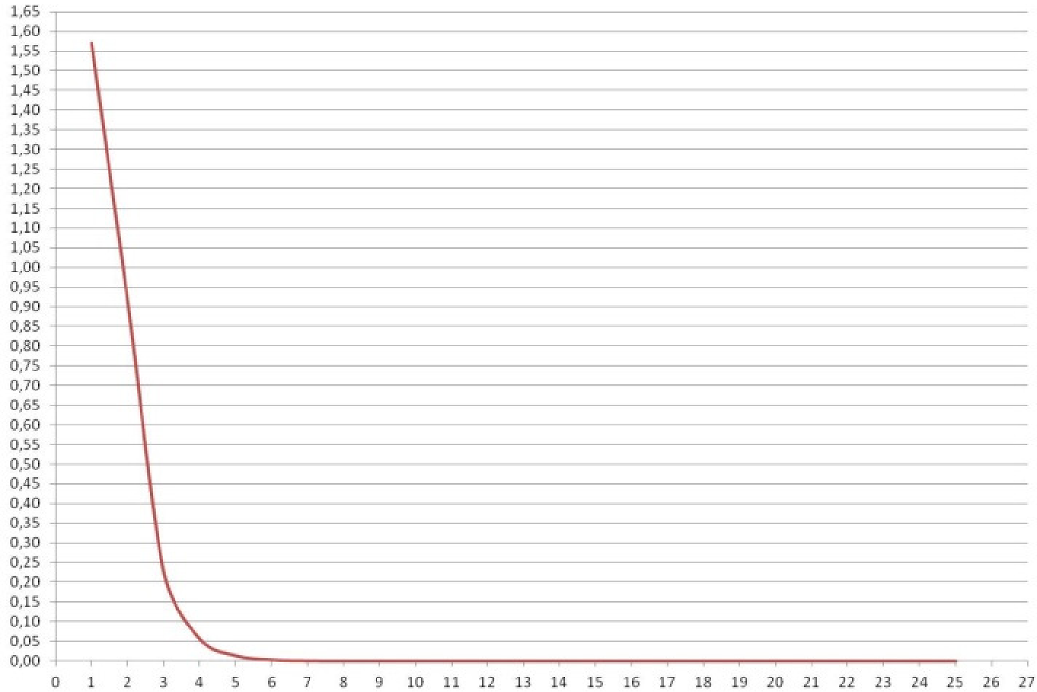


IL VOLUME DELLA CUPOLA

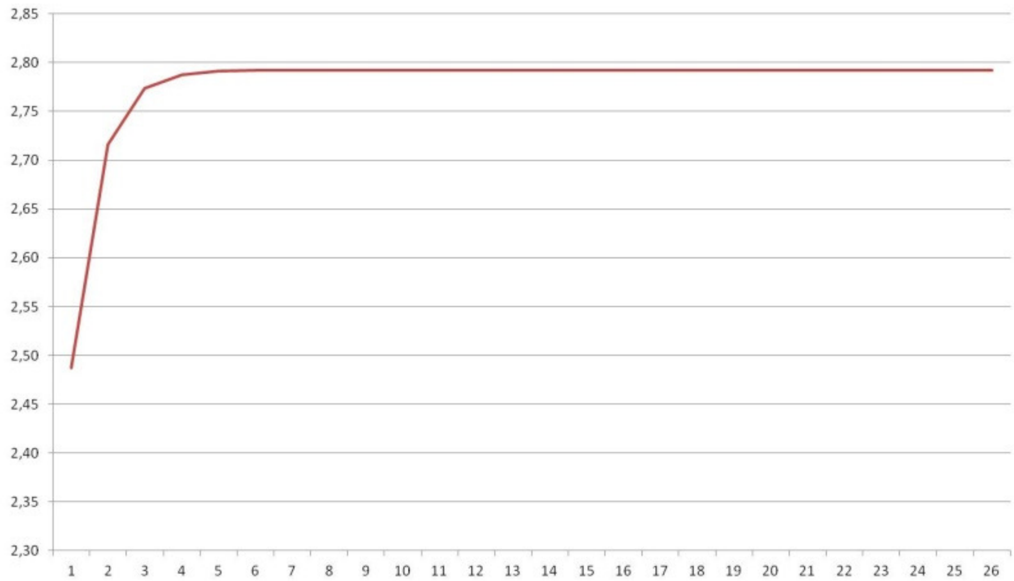
Calcoli
Abbiamo cercato di calcolare anche il volume della cupola.
Prima di tutto abbiamo diviso la figura in parti e abbiamo determinato il volume del cilindro di base utilizzando la formula: **$r^2\pi h$**
Poi abbiamo calcolato il volume di tutti i tronchi di cono successivi con la formula:
$1/3\ \pi h\ (R^2 + R\ r + r^2)$ *dove R rappresenta il raggio maggiore, r il raggio minore e h l'altezza di ogni piano(costante e pari a 1/2)*.
Abbiamo notato che per ottenere il volume del tronco di cono successivo ad un altro basta dividere per 4,
es. il primo tronco di cono è $(1)^2 + (1/2)^2 + (1 * 1/2) = 1+1/4+1/2=7/4$
il secondo è $(1/2)^2+(1/4)^2+(1/2 * 1/4)=1/4+1/16+1/8=7/16$
il terzo è $(1/4)^2+(1/8)^2+(1/4 * 1/8)= 1/16+1/64+1/32= 7/64$
….

Utilizzando *Excel* abbiamo calcolato

VOLUME DEI SINGOLI PIANI



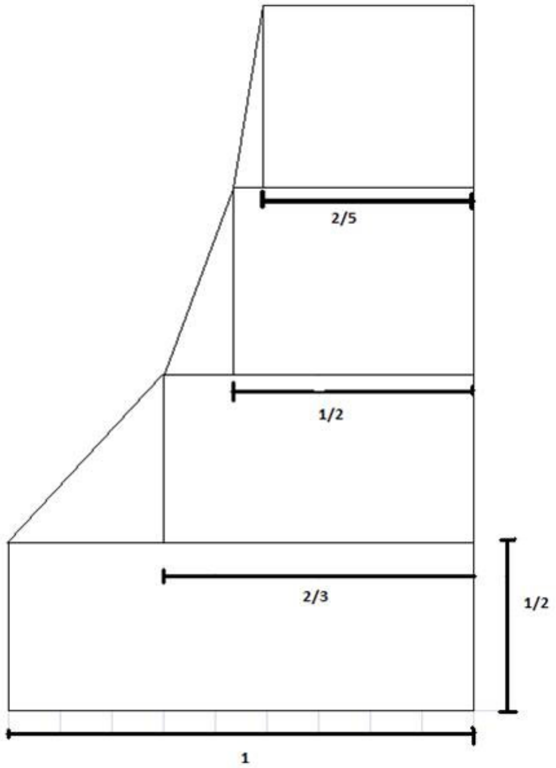
SOMME PARZIALI VOLUMI



*Come per l'area della sezione deduciamo che anche **<u>il volume della cupola converge a un valore finito</u>**.*

IL PROBLEMA: SECONDA PARTE

Provate ora ad analizzare questa situazione (molto simile alla precedente). Notate qualche differenza nell'area della sezione? (Convergerà a un valore finito o divergerà?)



AREA SECONDA SEZIONE

Anche in questo caso ci siamo posti la domanda: *l'area di questa sezione sarà finita o infinita?*

Per calcolare l'area dei singoli piani della sezione abbiamo scomposto ogni piano in due poligoni: un rettangolo di altezza 1/2 e di base 2/3, 2/4, 2/5 ecc e un triangolo rettangolo. Abbiamo capito che, dimostrando che la somma delle aree dei rettangoli è infinita, diventa inutile calcolare anche l'area dei triangoli (la sezione ha necessariamente area infinita), diversamente se la somma delle aree dei rettangoli risulta finita occorre calcolare anche l'area dei triangoli.

Con l'aiuto di *Excel*, abbiamo calcolato le aree dei rettangoli fino al piano 99990 e abbiamo ottenuto questi risultati:

somma delle aree dei primi 100 rettangoli: 4,177

somma delle aree dei primi 1000 rettangoli: 6,485471

somma delle aree dei primi 10000 rettangoli: 8,787606

somma delle aree dei primi 50000 rettangoli: 10,397

somma delle aree dei primi 99990 rettangoli: 11,090042

Notando che i valori continuano a crescere, potremmo ipotizzare che l'area sia infinita, ma per esserne più sicuri abbiamo utilizzato un metodo basato sulle frazioni.

Le aree dei rettangoli di ogni piano equivalgono a 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 ecc..

AREA = 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 ….

Proposizione: La somma delle aree dei rettangoli diverge.

Dimostrazione
Abbiamo trasformato i denominatori nella potenza di due immediatamente successiva al numero (es. 3 diventa 4; 5,6,7 diventano 8...)
1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 ….
Scritto in un'altra forma otteniamo
1/2 + 2 x 1/4 + 4 x 1/8 ….
Da cui si ottiene una sequenza infinita di
1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 …
Le nostre aree (1/2, 1/3, 1/4 , 1/5..) sono maggiori di quelle aventi come denominatore una potenza di 2, e dato che la somma delle seconde è infinita (perché sommiamo infinite volte 1/2) la nostra, che è maggiore, è a maggior ragione infinita.
Con nostra grande sorpresa abbiamo dimostrato che **<u>l'area di questa seconda sezione tende all'infinito!</u>**

VOLUME DELLA CUPOLA OTTENUTA DALLA SECONDA SEZIONE
Ci chiediamo allora cosa succederà al volume...
Per calcolare il volume ci siamo riferiti dapprima solo al cilindro e non al volume del tronco di cono, perché se il volume dei cilindri fosse infinito lo sarebbe, di conseguenza, anche quello dell'intera figura. In questa fase abbiamo supposto che ogni piano della cupola fosse un cilindro avente come raggio il lato del rettangolo nella sezione.
Per procedere abbiamo trovato il raggio del cilindro interno al tronco di cono, che nei vari piani ha un valore di:
base: 1
piano 1: 2/3
piano 2: 1/2
piano 3: 2/5
piano 4: 1/3
piano 5: 2/7…
Essendo diventati *esperti* di *Excel*, abbiamo inserito la formula del calcolo del volume del cilindro che ci ha permesso di calcolare i volumi dei singoli piani e le somme parziali fino al piano 50000.
Questi sono i risultati nella somma dei primi 50000 cilindri:

somma delle aree dei cilindri dei primi 100 piani: 3,990377
somma delle aree dei cilindri dei primi 1000 piani: 4,045966
somma delle aree dei cilindri dei primi 10000 piani: 4,051612
somma delle aree dei cilindri dei primi 50000 piani: 4,052115

il volume dei cilindri quindi continua a crescere ma si stabilizza a circa 4,05. Questo è il valore della somma dei cilindri.
I tronchi di cono hanno volume maggiore dei cilindri e quindi possiamo ipotizzare che il volume totale sia maggiore. <u>Ma sarà finito o infinito?</u>

Ancora con *Excel* abbiamo provato a verificare questa ipotesi. Ecco i nostri calcoli:

costante	numeratore	denominatore	R	R^2	R*r	$R^2 + r^2 + R*r$	volume	vol tot			1,570796327	
0,523599	2	2	1	1	0,666667	2,111111111	1,105375	3,1628818444			4,7336781712	100piani
0,523599	2	3	0,666666667	0,444444444	0,333333	1,027777778	0,538143					
0,523599	2	4	0,5	0,25	0,2	0,61	0,319395	3,1938325632			4,7646288900	200piani
0,523599	2	5	0,4	0,16	0,133333	0,404444444	0,211767					
0,523599	2	6	0,333333333	0,111111111	0,095238	0,287981859	0,150787	3,2188153685			4,7896116952	1000piani
0,523599	2	7	0,285714286	0,081632653	0,071429	0,215561224	0,112868					
0,523599	2	8	0,25	0,0625	0,055556	0,167438272	0,08767	3,2244640218			4,7952603486	10000piani
0,523599	2	9	0,222222222	0,049382716	0,044444	0,13382716	0,070072					
0,523599	2	10	0,2	0,04	0,036364	0,109421488	0,057293	3,224966616			4,795762943	50000piani
0,523599	2	11	0,181818182	0,033057851	0,030303	0,091138659	0,04772					
0,523599	2	12	0,166666667	0,027777778	0,025641	0,077087442	0,040363					

Costante = 1/3 π * 1/2

Come si nota dai risultati ottenuti il **volume tende ad un valore finito!**

Curiosando in *Internet* abbiamo scoperto...

UN CASO ANALOGO: TORRICELLI E LA TROMBA DI GABRIELE

Torricelli grande matematico e fisico (Roma, 15 ottobre 1608-Firenze, 25 ottobre 1647) è famoso anche per la scoperta del solido di rotazione infinitamente lungo chiamato *Tromba di Gabriele*, in riferimento all'Arcangelo Gabriele, l'angelo che, secondo tradizione, soffierà nel corno per annunciare l'apocalisse, associando il divino (e quindi l'infinito) al finito.

La tromba di Gabriele **ha l'area della superficie infinita, ma il volume finito.**

Questo fu considerato per molto tempo un paradosso "incredibile" da molti, incluso lo stesso Torricelli, che cercò diverse spiegazioni alternative, anche perché l'idea di un secchio che è possibile riempire di vernice, ma impossibile da pitturare è senz'altro singolare.