Diamoci un taglio!

I.I.S.S. “Gandhi” Merano (BZ)

Classe: 2° Liceo Scientifico, opzione Scienze Applicate

Insegnante di riferimento: Giovanni Porcellato

Ricercatore: Silvia Chiapponi

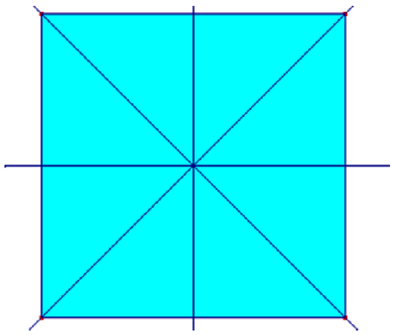
Ragazzi partecipanti: Federico Cacco, Fabio Calissi, Nina Desiato, Gianluca Guzzo, Marco Hueber, Endri Keci, Anton Kolyanovskyy, Kastriot Krasniqi, Emanuella Lleshaj, Simone Mantovani Fraschetti, Matteo Marinoni, Diego Rascele, Estelle Sanna, Manuel Sardu, Renato Savo, Munir Sejfullaj, Nicholas Gabriel Sessa, Filippo Tomanin

In un paese di campagna, due fratelli ricevono in eredità dal padre un campo. Per volontà del padre la divisione verrà fatta in questo modo: al fratello più grande spetta il compito di dividere il terreno, mentre il fratello minore ha il diritto di scegliere per primo quale parte tenere per sé. Come faranno ad accordarsi?
Dopo aver riflettuto sul problema, abbiamo deciso di lavorare nelle ipotesi:

- *che il fratello maggiore voglia dividere il campo in due parti della stessa area;*
- *che il campo abbia la forma di poligono;*
- *che il campo venga (generalmente) diviso con una linea retta.*

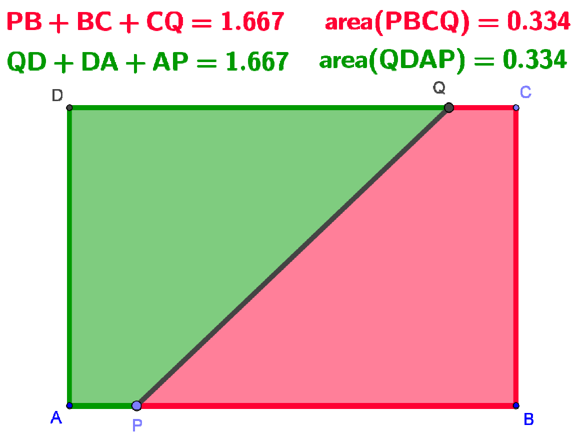
Il metodo della corda

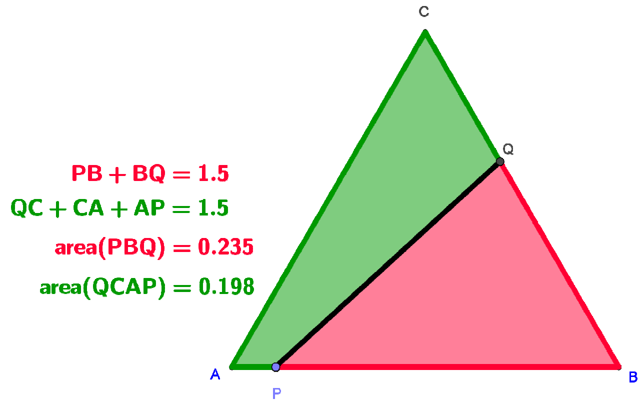
Il primo metodo che abbiamo deciso di utilizzare è stato il “metodo della corda”, che consiste nell’utilizzare una corda, lunga quanto il perimetro, per dividere una superficie a metà. Si trova la metà della corda e si fa un segno; successivamente si stende la corda lungo il perimetro e si congiunge il punto in cui si incontrano gli estremi della corda con il segno della metà. Abbiamo ipotizzato che la retta passante per tali punti divida la figura in due parti equiestese.
Ci siamo poi resi conto del fatto che il metodo della corda non funziona per qualsiasi figura, ma solo per quelle aventi una simmetria centrale, come ad esempio il quadrato. Tali figure possono essere divise in due parti uguali (isometriche) e quindi equiestese mediante una qualsiasi retta passante per il centro di simmetria.



Il quadrato è una figura simmetrica centralmente

Una simmetria centrale è una trasformazione, caratterizzata da un punto O detto centro di simmetria, che associa ad ogni punto P del piano un punto P' che sta sulla retta OP dalla parte opposta di P rispetto a O e alla stessa distanza da O.





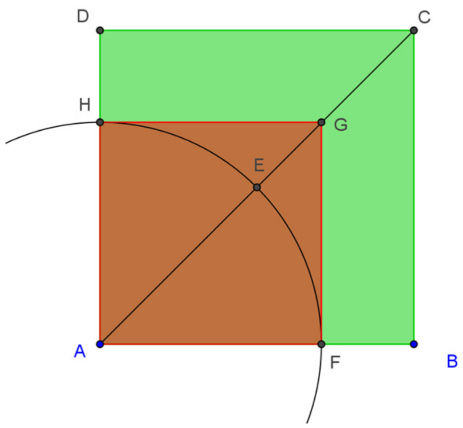
<u>Il metodo dell'omotetia</u>

Il secondo metodo da noi adoperato per dividere una figura in due parti equiestese è stato quello di utilizzare un'omotetia. Un'omotetia è una trasformazione geometrica che conserva l'ampiezza degli angoli, le direzioni e il parallelismo tra rette corrispondenti. Essa è caratterizzata da un centro e da un rapporto di omotetia. Variando il rapporto di omotetia cambiano le dimensioni e la posizione della figura rispetto al centro. Quando il valore assoluto del rapporto è compreso tra 0 e 1, la figura trasformata è più piccola di quella di partenza, mentre se il valore assoluto del rapporto è maggiore di 1, la figura sarà più grande. Se il rapporto è positivo, la figura si troverà dalla stessa parte di quella di partenza rispetto al centro di omotetia, mentre se il rapporto è negativo si troverà dalla parte opposta. Per questo motivo l'omotetia che ci interessava doveva avere rapporto positivo e compreso tra 0 e 1.

In un'omotetia, dimezzando le dimensioni lineari di una figura, si ottiene una figura di area ¼. Quindi se il rapporto tra le aree deve essere ½ allora il rapporto di omotetia *k* tra i lati corrispondenti deve essere:

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

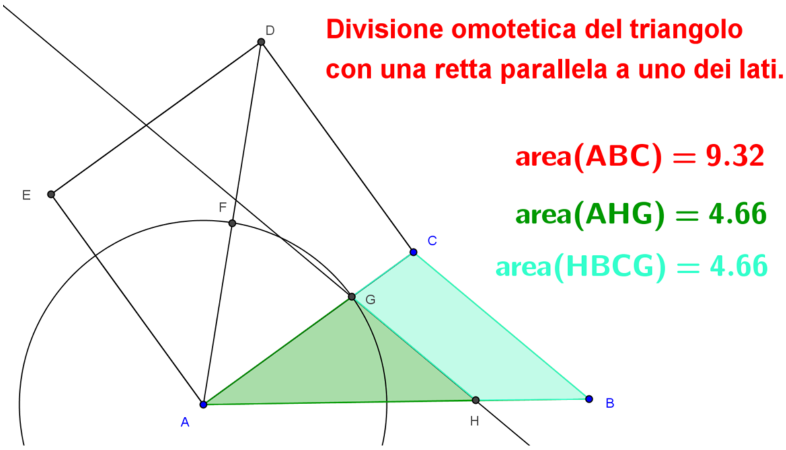
Sapendo che la diagonale di un quadrato è lunga $\sqrt{2}$ volte il lato, abbiamo intuito che il quadrato avente per lato un segmento lungo la metà della diagonale, avrà area uguale alla metà del quadrato di partenza.



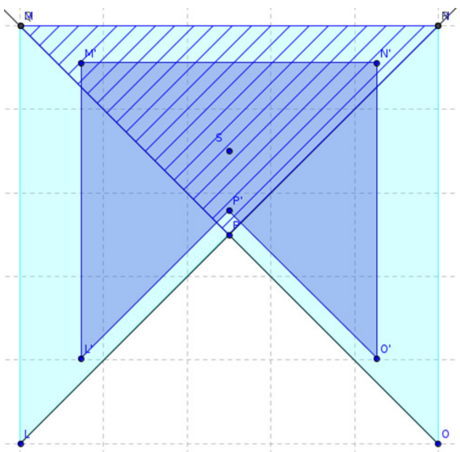
Il quadrato di lato AF è equiesteso alla metà del quadrato ABCD.

Infatti: $AF = AE = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}AB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

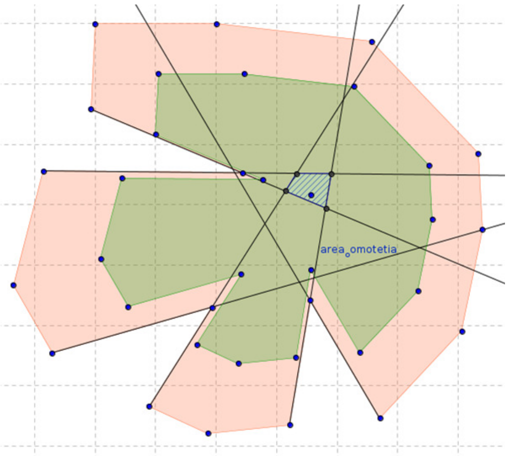
Questo metodo può essere applicato anche in situazioni più complesse.
Nella seguente figura è rappresentata un'omotetia di centro A applicata ad un triangolo ABC. Il segmento AG viene costruito costruendo sul lato AC del triangolo un segmento di lunghezza $\frac{\sqrt{2}}{2}AC$. La retta passante per G e parallela al lato BC, divide ABC in due poligoni equiestesi.



Ci siamo poi concentrati sulla posizione in cui collocare il centro di omotetia. Nel caso in cui la figura non abbia angoli concavi, per centro di omotetia va bene un qualsiasi punto interno alla figura.
Se la figura ha un angolo concavo, affinché la figura trasformata sia interna alla figura di partenza, è sufficiente che il centro di omotetia si trovi nella superficie intersezione tra la figura e l'angolo convesso che ha come lati i prolungamenti dei lati dell'angolo concavo (parte tratteggiata in figura).



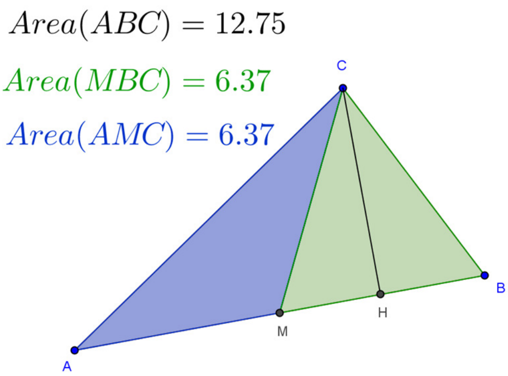
Se la figura ha più di un angolo concavo il centro di omotetia deve essere posizionato nella parte di piano intersezione di tutti gli angoli convessi associati agli angoli concavi (parte tratteggiata).



<u>Divisione a partire da un punto del perimetro</u>

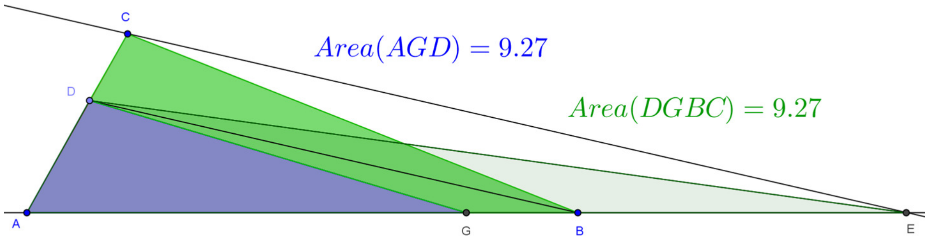
Supponendo che al campo, ancora di forma triangolare, si arrivi da una strada che termina su un punto del suo perimetro, per non sprecare terreno sarebbe opportuno dividerlo con una retta partendo da tale punto.

Se il punto appartenente al perimetro è un vertice o il punto medio di un lato la suddivisione si effettua tracciando la mediana. Infatti in questo modo si ottengono due triangoli aventi basi della stessa lunghezza e altezze uguali.



Questo metodo può essere applicato anche per risolvere problemi più complessi. Ad esempio, se il punto da cui far partire la divisione è un punto arbitrario del perimetro, è opportuno costruire un triangolo AED equiesteso a quello ABC di partenza, avente il punto come vertice, e tracciarne poi la mediana.

Per trovare il triangolo equiesteso, si traccia un segmento che colleghi il punto da cui partirà la divisione con il vertice opposto. Si deve poi tracciare la retta parallela al segmento, passante per un vertice (in questo modo si avranno la stessa base ed altezze di ugual lunghezza). L'intersezione della retta, con il prolungamento di uno dei lati, sarà il terzo vertice del triangolo. Dopodiché, utilizzando la divisione tramite la mediana, si divide il triangolo appena trovato. La mediana dividerà anche il triangolo di partenza in un triangolo e un quadrilatero equiestesi tra loro.



Il triangolo AED è equiesteso al triangolo ABC, perché ABD è parte comune e i triangoli DBC e DBE sono equiestesi, perché hanno la stessa base DB e altezze uguali essendo DB e CE parallele per costruzione. Ora il quadrilatero DGBC è equiesteso al triangolo GED perché DGB è parte comune e i triangoli DBC e DBE sono equiestesi.
Quindi AGD e DGBC hanno la stessa area.

<u>Metodo analitico per dividere un triangolo con una retta di data inclinazione</u>

Abbiamo anche lavorato su un altro metodo per dividere un poligono in due parti con la stessa area. Abbiamo preso in considerazione un triangolo ABC inserito in un riferimento cartesiano. Abbiamo scelto le rette di coefficiente angolare 1/2 e abbiamo cercato quella che tra esse divideva il triangolo in due parti equiestese. Spostando la retta s del fascio ci siamo accorti che essa divideva a metà il triangolo ABC quando l'intercetta q era circa uguale a uno. Abbiamo poi cercato il valore esatto di q.
Se consideriamo per il triangolo CDE la base CD e l'altezza EH la sua area è data dalla formula

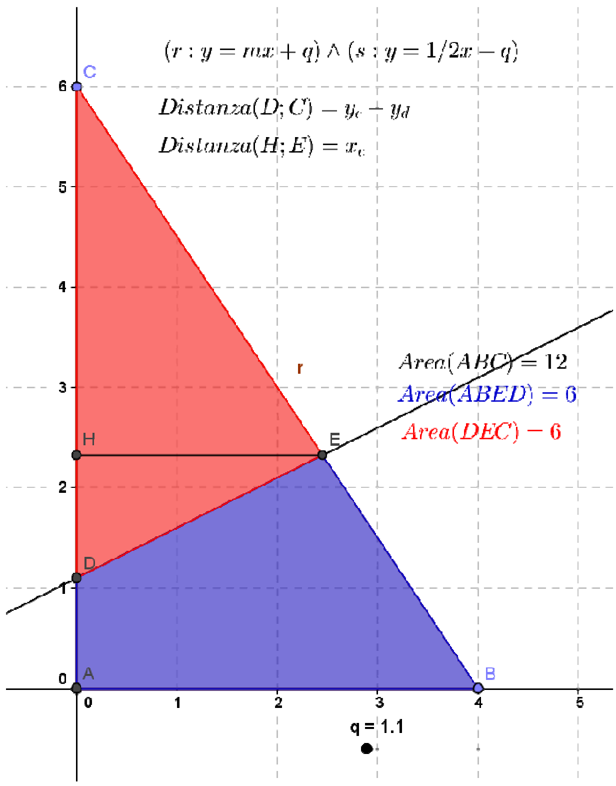
$$Area(CDE) = \frac{CD \cdot EH}{2}$$

Per trovare la distanza EH ci serve l'ascissa del punto E. Poniamo a sistema le equazioni della retta s e della retta r passante per B e C.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + q \\ y = -\frac{3}{2}x + 6 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema si trova

$$x_E = 3 - \frac{1}{2}q$$



Quindi: $Area(CDE) = \frac{CD \cdot EH}{2} = \frac{(6-q)\cdot\left(3-\frac{1}{2}q\right)}{2}$

Se l'area del triangolo CDE deve essere la metà dell'area del triangolo ABC deve valere la relazione

$$\frac{(6-q)\cdot\left(3-\frac{1}{2}q\right)}{2} = 6$$

La soluzione compresa tra 0 e 6 è: $q = 6 - 2\sqrt{6} \approx 1.1$

Il metodo che abbiamo utilizzato in questo esempio è generale e si può estendere anche ad altri casi.
Se ad esempio il campo ha un pozzo al suo interno e si vuole che la linea di divisione passi per il pozzo si possono considerare tutte le rette che passano per quel punto e si cerca quella che divide il campo a metà.