

Restauri impossibili?

Istituto Rosetum – Besozzo (VA)

Classi: 3° e 4° Liceo Linguistico

Insegnante di riferimento: Paola Pedrini

Ricercatore: Federico Totaro

Ragazzi partecipanti: Giorgia Baldo, Laura Balzarini, Federica Bardelli, Giorgia Bertelli, Giorgia Cerati, Enrico Chiapella, Laura Coser, Martina Della Maddalena, Simone Del Motto, Andrea Faravelli, Alessia Pasqualini, Virginia Passuello, Vittoria Piani, Beatrice Salina, Gaia Tabacchi, Filippo Zurlo

1. PRESENTAZIONE DEL PROBLEMA

Il 7 novembre 2013 abbiamo incontrato per la prima volta Federico Totaro, il ricercatore che ci è stato assegnato dal Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano, per proporci un problema “difficile” nell'ambito del progetto “MATH.en.JEANS”.

La soluzione di questo problema avrebbe richiesto diversi mesi di lavoro e si poteva sviluppare in modi diversi.

Il problema assegnato è diviso in vari punti:

- ✧ Dato un mosaico, quali trasformazioni geometriche lo lasciano invariato, ossia lo trasformano in sé stesso?
- ✧ Applicando a una stessa immagine più trasformazioni geometriche, quanti diversi tipi di mosaico possiamo ottenere? In altre parole, quanti sono i possibili schemi di simmetria di un mosaico?
- ✧ È sempre possibile ricostruire un mosaico parzialmente distrutto? Quali strumenti matematici possono aiutare un restauratore?

2. MOSAICI E TRASFORMAZIONI

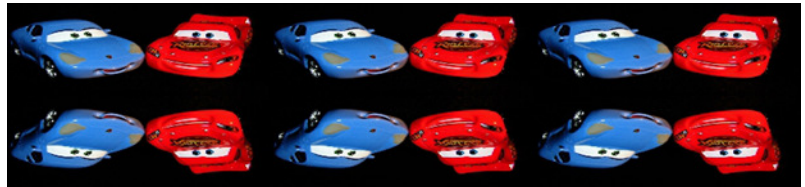
Prima di tutto è stato necessario capire che cosa si intende, in matematica, con la parola “mosaico”.

Alcune figure del piano presentano infatti una sorta di regolarità. Vengono chiamate con nomi diversi, a seconda di come si estendono nel piano.

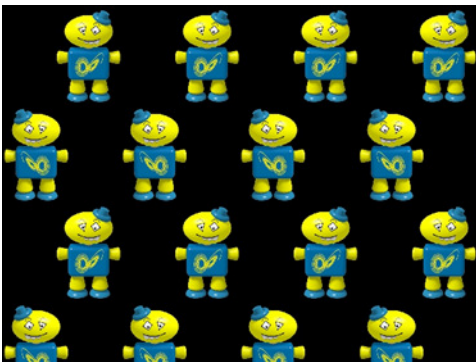
Vi sono figure che occupano solo una parte limitata di piano, che si chiamano **rosoni**.



Altre figure, che si estendono in un'unica direzione, sono dette **fregi**.



Un **mosaico** è invece una figura piana illimitata, che dobbiamo immaginare che si estenda in tutte le direzioni, anche se ovviamente possiamo visualizzarne solo una parte limitata.



*Esempio di mosaico generato con software GeCla.
Un particolare.*



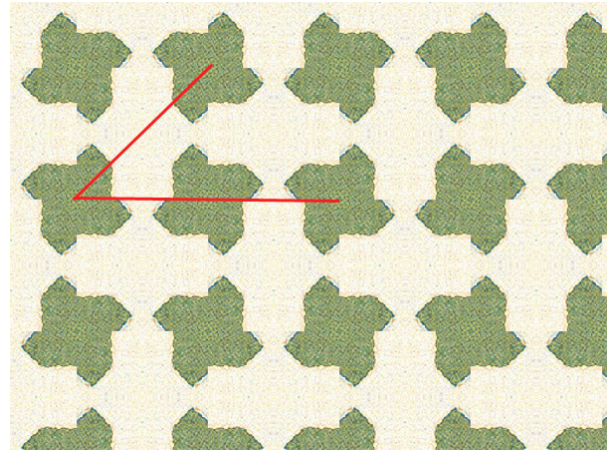
*Immagine di un mosaico dell'Alhambra.
Un particolare.*

Perché una trasformazione geometrica muti una figura in se stessa deve necessariamente lasciare invariate le distanze: trasformazioni piane con questa caratteristica si chiamano **isometrie**.

Studiando alcuni mosaici che ci ha proposto Federico, abbiamo analizzato i diversi tipi di isometrie.

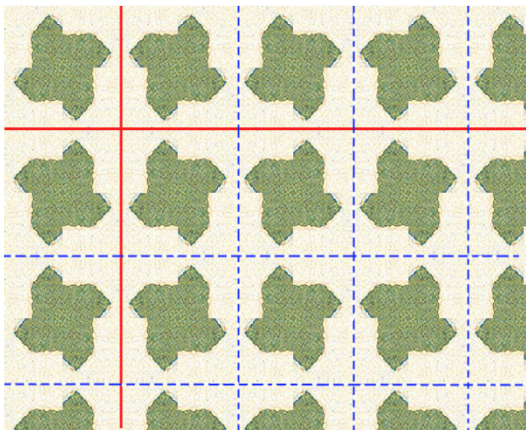
Le **traslazioni** sono isometrie definite mediante un vettore. Ciò che accomuna i mosaici dal punto di vista delle simmetrie, e li differenzia dalle altre figure, è che, fra le simmetrie, vi sono almeno due traslazioni in direzioni diverse. Ciò significa che la figura si ripete in modo regolare lungo quelle direzioni.

Per individuare le traslazioni che fissano un dato mosaico, abbiamo utilizzato carta per lucidi e pennarelli, abbiamo ricalcato la figura e abbiamo mosso il foglio, fino a che le due figure non si sovrapponevano di nuovo perfettamente.



Un'altra trasformazione che può lasciare invariato un mosaico è la **riflessione**. Le riflessioni sono definite dando una retta, detta asse di riflessione, lungo la quale si immagina di posizionare uno specchio: l'immagine riflessa e quella originale devono coincidere.

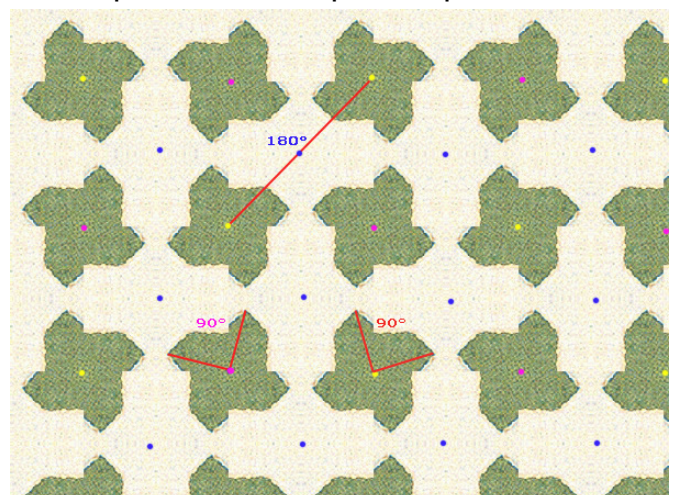
Vi possono essere riflessioni in qualunque direzione, ma non tutti i mosaici ammettono riflessioni.



Mosaico senza assi di riflessione.

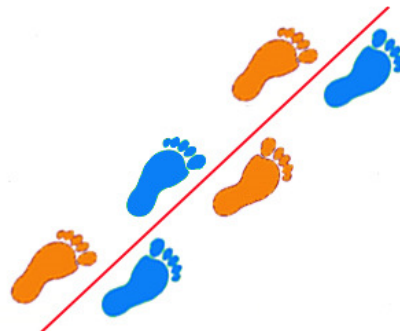
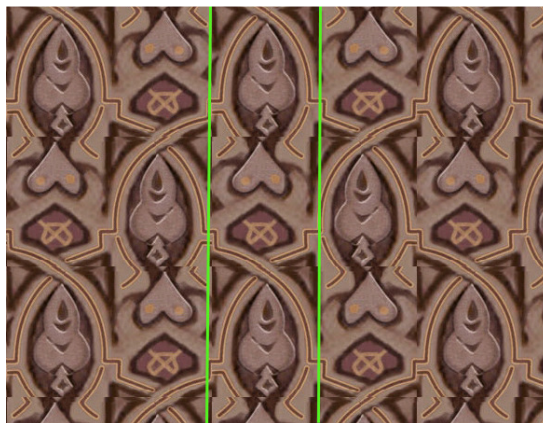
Fra le simmetrie che può ammettere un mosaico vi sono le **rotazioni**. Per definire una rotazione, occorre dare un centro e un angolo, detto ampiezza. Anche in questo caso abbiamo utilizzato la carta da lucido sui mosaici che Federico ci ha dato da analizzare e, aiutandoci con dei goniometri, ci siamo resi conto che si potevano trovare solo alcune ampiezze: le ampiezze possibili sono solo 180° , 120° , 90° e 60° .

Inoltre, ogni volta che abbiamo individuato un centro di rotazione, a partire da questo ne abbiamo trovati infiniti altri, che abbiamo chiamato "gemelli", ottenuti applicando al centro le traslazioni che fissano il mosaico.



Come nel caso delle riflessioni, può accadere che un mosaico non abbia fra le sue simmetrie rotazioni, che non siano quella di 360° .

Le **glissoriflessioni** ci sono sembrate le isometrie più difficili da individuare: si ottengono applicando successivamente una traslazione e una riflessione che ha come asse una retta la cui direzione è quella del vettore di traslazione. L'effetto che si ottiene con una glissoriflessione è quello delle impronte delle scarpe, in una camminata regolare.

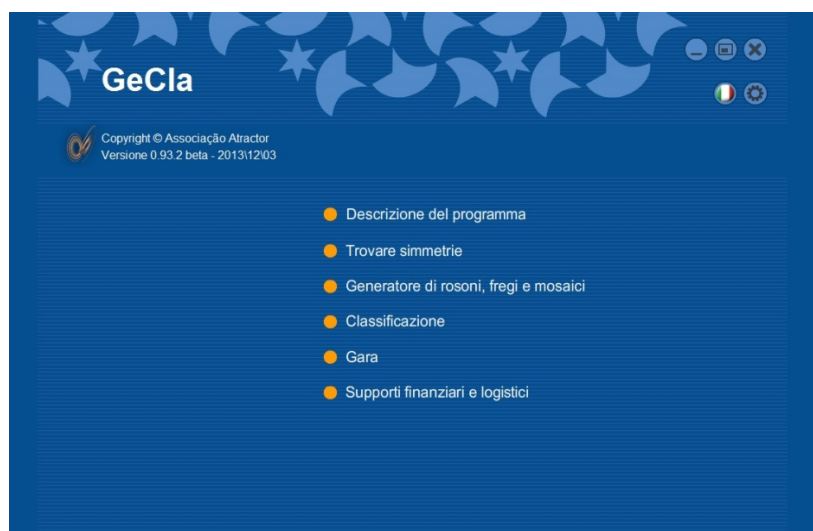


Classificare un mosaico significa individuare quali, fra queste isometrie, lo trasformano in se stesso: esse costituiscono la famiglia delle sue simmetrie.

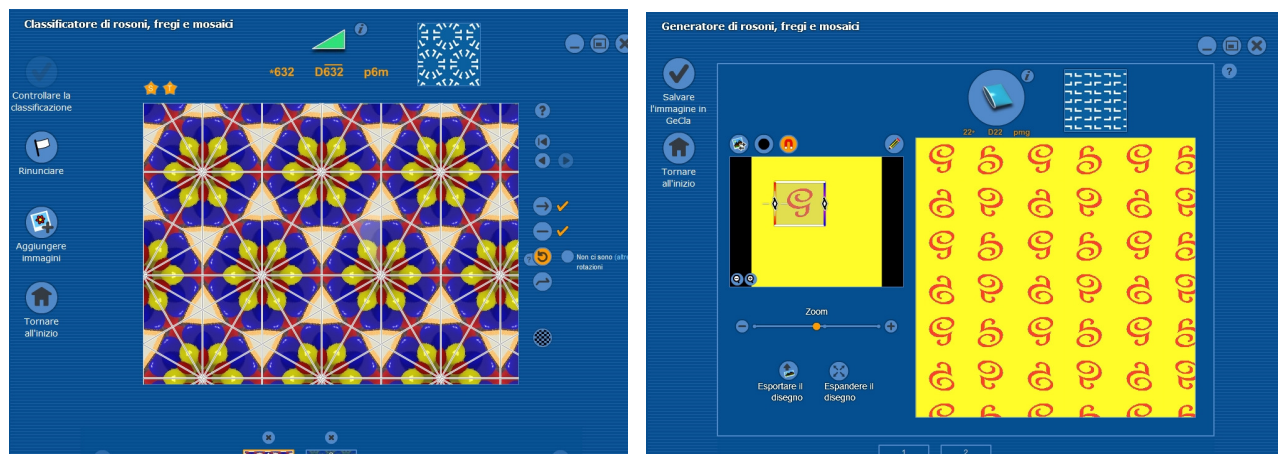
3. IL SOFTWARE GeCla

In un secondo tempo abbiamo deciso di affiancare agli strumenti che avevamo già usato un software specifico per generare e classificare le figure, che avevamo già utilizzato durante il precedente anno scolastico: si tratta dell'applicazione GeCla, dal dvd "simetria" dell'associazione portoghese Atractor.

<http://www.atractor.pt/mat/GeCla/index-en.html>



Con GeCla, a partire da un'immagine da noi scelta, è possibile determinare tutte le sue simmetrie, cioè classificarla. Ma si può anche fare l'operazione inversa, ossia generare una figura con determinate simmetrie, partendo da un'immagine qualunque.



4. DALLE RIFLESSIONI ALLE ISOMETRIE

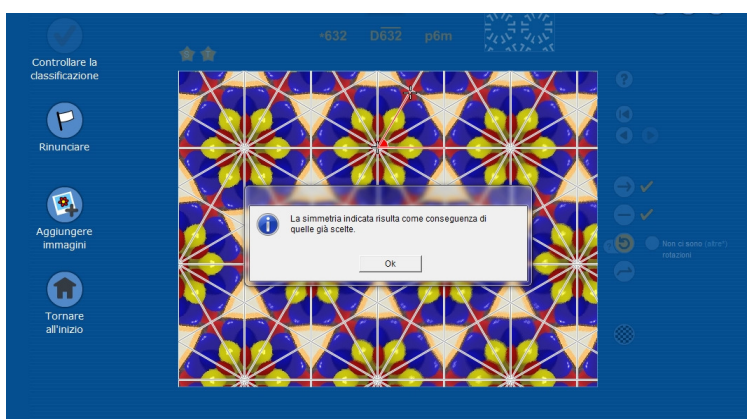
Durante la classificazione di una data figura con GeCla, il programma chiede di individuare, dopo le traslazioni, nell'ordine: riflessioni, rotazioni e glissoriflessioni

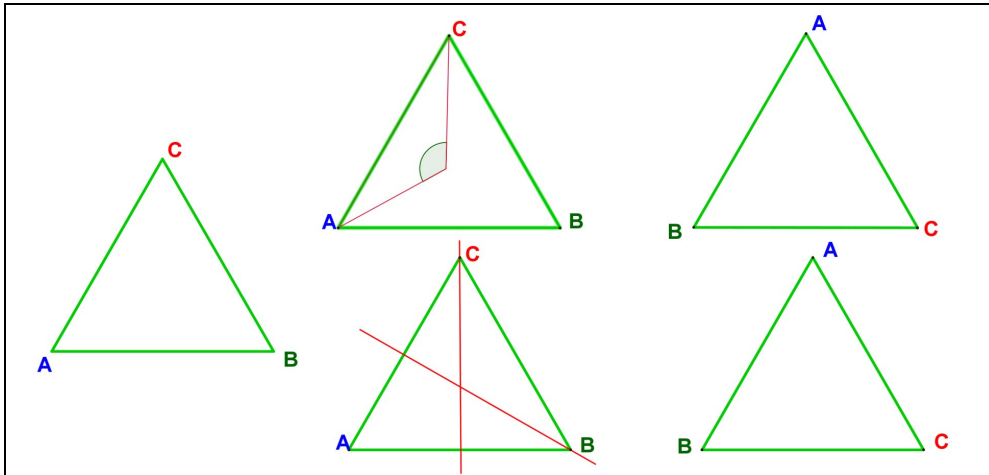
A volte, cercando un certo tipo di isometria, compare un messaggio che ci informa che l'isometria che abbiamo

individuato è conseguenza di quelle trovate in precedenza.

Ci siamo chiesti che cosa significa questo messaggio. Federico ci ha aiutato a capire il significato di questa affermazione. Utilizzando infatti alcuni specchi e dei poligoni regolari, in particolare il triangolo equilatero e il quadrato, abbiamo scoperto che una rotazione si può ottenere applicando due riflessioni, con assi incidenti.

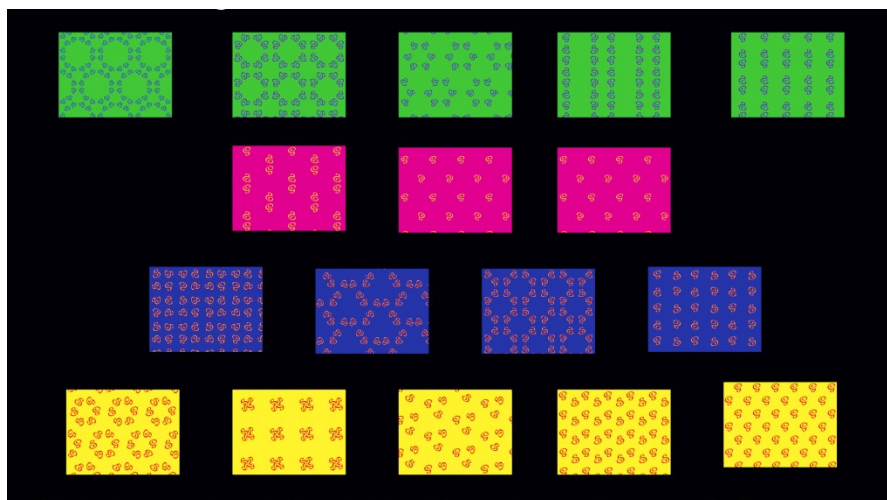
Questo fatto non è esclusivo delle rotazioni: **tutte le isometrie si possono ottenere componendo due o tre riflessioni, con gli assi incidenti o paralleli.**





5. CATALOGO DELLE SIMMETRIE

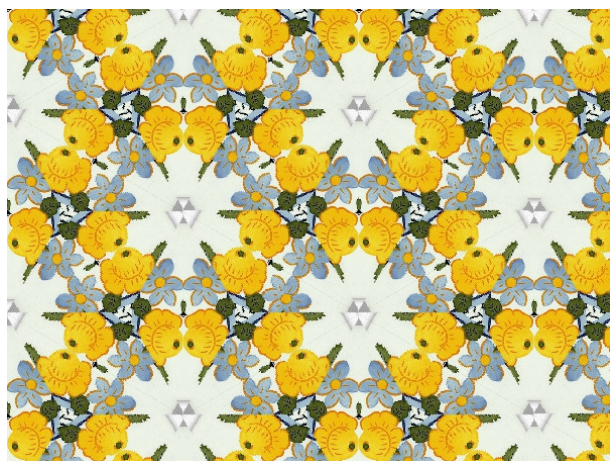
Classificando i mosaici in base alle loro simmetrie, abbiamo verificato che le possibili famiglie delle loro simmetrie possono essere solo di **diciassette** tipi



Una volta che abbiamo scoperto tutte le simmetrie di un mosaico, lo schema di simmetria si può descrivere e sintetizzare con una stringa di caratteri che può comprendere:

- Il simbolo $\circ$, che indica che la figura presenta, come unico tipo di simmetria, le traslazioni;
- numeri (che indicano di che frazione dell'angolo giro sono le ampiezze delle rotazioni). Ad esempio, una rotazione di 90° sarà indicata con il numero 4;
- simbolo $*$, per indicare la presenza di riflessioni. Quando $*$ precede un numero significa che i centri di rotazione descritti da quel numero si trovano sull'asse di riflessione;
- $\times$ per segnalare la presenza di glissoriflessioni.

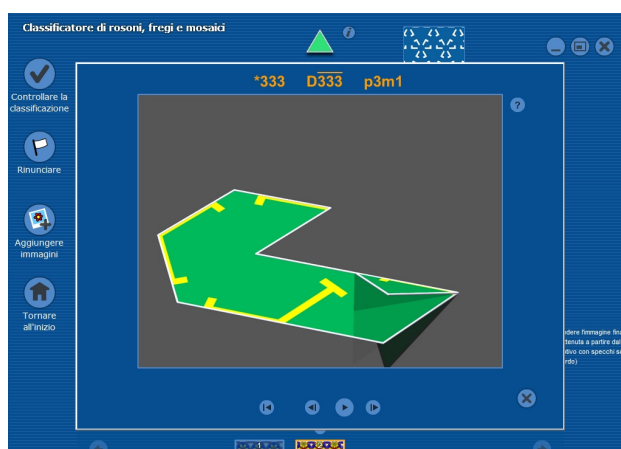
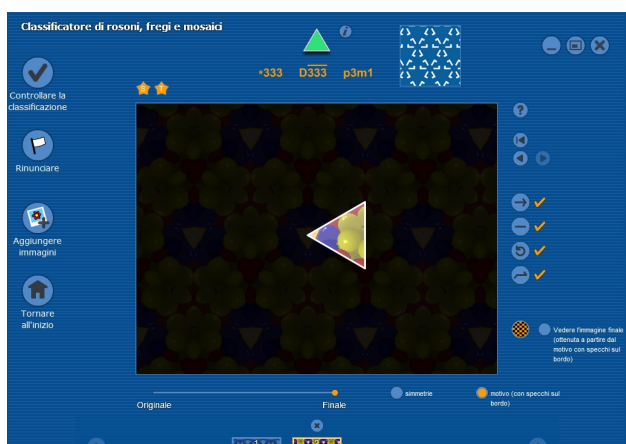
Ad esempio la stringa ***632** indica che la figura ammette, oltre alle traslazioni, riflessioni e rotazioni di 60° , 120° e 180° , i cui centri si trovano sugli assi di riflessione.



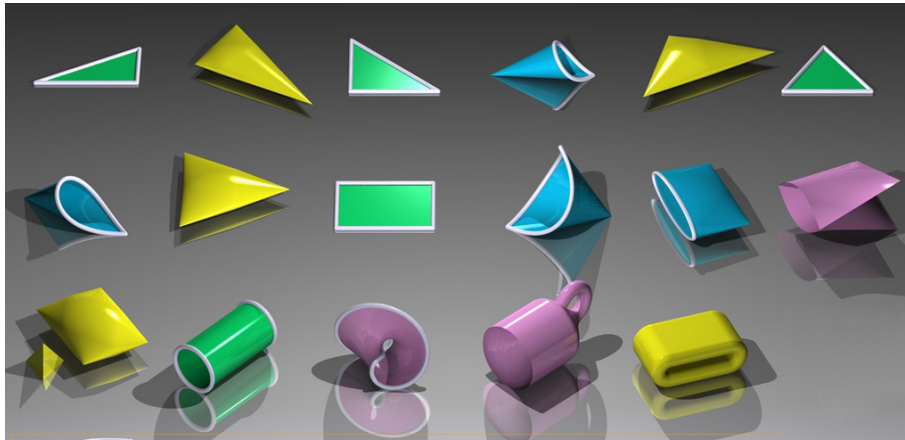
La stringa **3*3** indica che vi sono rotazioni di 120° , riflessioni, e ancora rotazioni di 120° i cui centri però si trovano sugli assi di riflessione.

6. QUOZIENTI E TIMBRI

Al termine della classificazione di una figura con GeCla, il programma individua la porzione di mosaico più piccola contenente tutte le informazioni sulle sue simmetrie. Questa "zona" si chiama quoziente e a partire da essa, conoscendo la famiglia delle simmetrie, si può costruire un timbro che permette di ricostruire completamente il mosaico



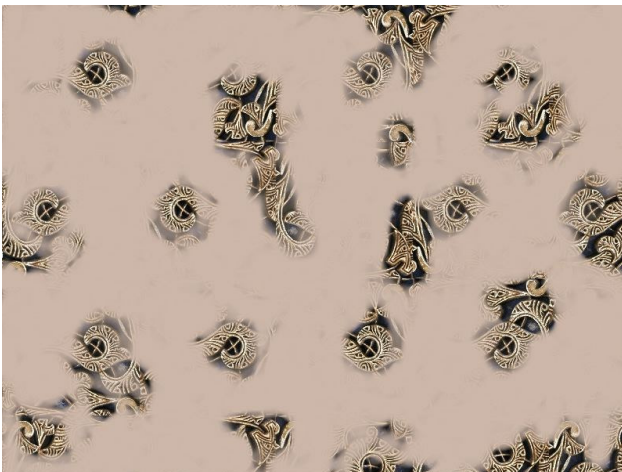
Proprio come i possibili schemi di simmetria, anche i diversi timbri che si possono costruire sono **diciassette**.



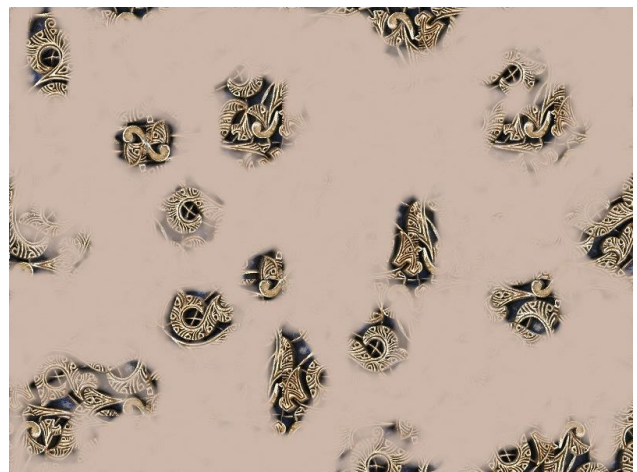
7. RESTAURARE UN MOSAICO

La terza parte del problema assegnato riguarda la possibilità di ricostruire un mosaico parzialmente distrutto riconoscendone preventivamente le simmetrie.

Federico ci ha proposto le immagini di uno stesso mosaico, in cui però gli elementi visibili sono diversi.



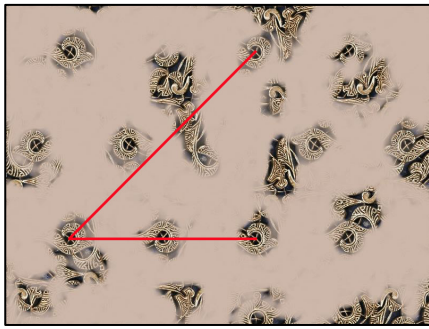
VERSIONE A



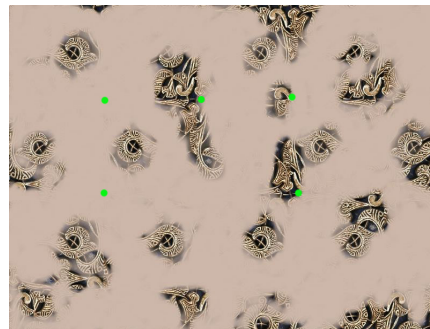
VERSIONE B

Abbiamo dapprima lavorato sulla **versione A**, iniziando ad analizzare le informazioni che si potevano ricavare dalle parti visibili

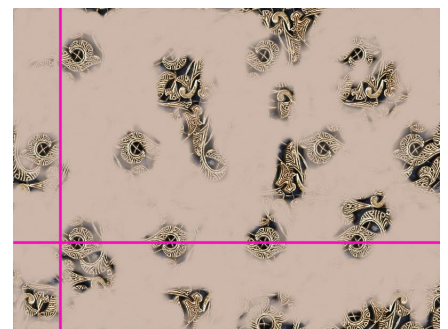
traslazioni



rotazioni



glissoriflessioni



Il passo successivo è stato quello di provare a ridisegnare il mosaico sulla carta da lucido e verificare la correttezza delle informazioni trovate.

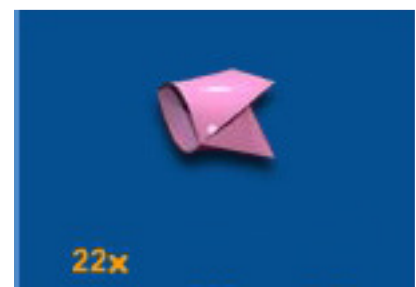
Abbiamo poi utilizzato il classificatore di GeCl_a, ripetendo i passaggi che abbiamo fatto "a mano".

È importante osservare che GeCl_a, in questa situazione, non può in alcun modo verificare la correttezza della classificazione che stiamo facendo, perché l'immagine, oltre ad essere parziale, non è contenuta nel suo database.



Al termine della classificazione, GeCl_a individua un timbro che "potrebbe" generare il mosaico. Infatti non si può avere la certezza assoluta che il mosaico sia di quella tipologia, perché nell'immagine originale mancano delle parti.

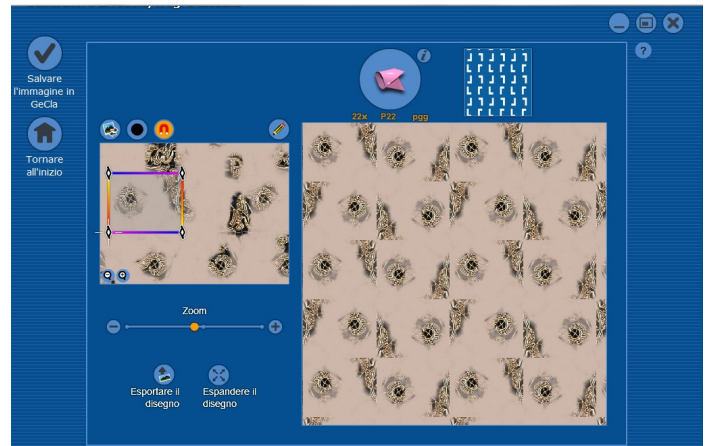
Quella che viene suggerita è solo una possibile ricostruzione.



I passaggi successivi, che dovrebbero portare alla ricostruzione della figura, sono ancora in via di sperimentazione.

Abbiamo provato a utilizzare il generatore di GeClà, partendo dall'immagine da ricostruire e scegliendo il timbro individuato in precedenza.

Ma occorre prestare molta attenzione al modo in cui si posiziona il timbro sulla figura.

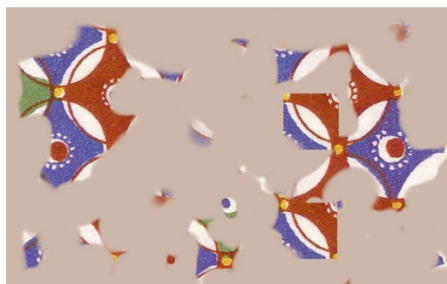
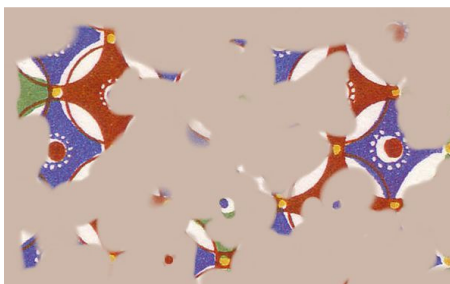


Può infatti accadere che vengano riprodotte delle parti vuote, e quindi la figura finale contiene meno elementi di quella da cui siamo partiti.

Oppure, scegliendo male la posizione del timbro, la figura che si ottiene non è compatibile con quella iniziale

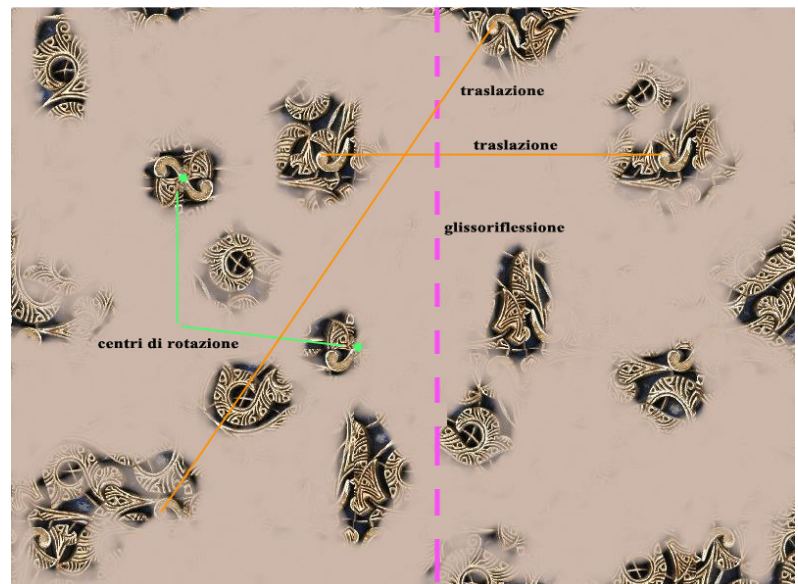


Un aiuto può venire dall'utilizzo di programmi di elaborazione di immagine, che permettono di aggiungere alla figura elementi ottenuti sulla base delle sue simmetrie, come nell'esempio seguente



La versione B del mosaico ci ha fatto riflettere sulla qualità delle informazioni fornite dai frammenti. In apparenza, questa seconda figura sembra più povera di informazioni.

Ma un'attenta analisi mette in evidenza come questi dettagli permettano, anche per la versione B, di individuare (o ipotizzare) le stesse simmetrie già rilevate nella versione A.



8. LA CASSETTA DEGLI ATTREZZI DEL RESTAURATORE

In quest'ultima immagine abbiamo riportato tutti gli strumenti che possono aiutare un restauratore di mosaici, che voglia avvalersi anche di un supporto... matematico!



FONTI DELLE IMMAGINI:

- Alcune immagini sono state generate a partire da materiale presente nel data base di GeCla. Info: <http://www.atractor.pt/mat/GeCla/index-en.html>

Immagine del restauro: Mirari Erodiza, Alhambra