

Le sale degli specchi

Scuola Secondaria di I grado "G. Mezzanotte" – Chieti (CH)

Classe: 2°B

Insegnante di riferimento: Diana Cipressi

Ricercatore: Sandra Germani

Ragazzi partecipanti: Umberto Bisignani, Giorgia Carozza, Diego Ciaschetti, Monica De Flammineis, Jacopo De Marco, Vanessa Di Cosola, Marialaura Di Iorio, Giada Di Muzio, Giulia Di Pietrantonio, Federico Di Ruscio, Marco D'Incecco, Francesca Faraone, Alessia Iacone, Prisca Iacovone, Sara Farahani, Elisabetta Mancini, Vittorio Mancini, Samuele Marrone, Lisa Massa, Mariachiara Nepa, Andrea Nonno, Simone Nonno, Francesco Odorisio, Stefano Paolini, Allegra Petaccia, Alessandro Pica, Federico Pizzi, Francesco Pozzi, Jacopo Sasso

Sandra, la nostra ricercatrice, ci ha posto questo problema.

Un architetto deve costruire un museo della scienza, di cui tre stanze sono dedicate alla matematica. Queste stanze hanno la forma di tre poligoni regolari, un triangolo equilatero, un quadrato e un esagono regolare. Le mattonelle del pavimento hanno la stessa forma e possono essere abbinata a piacere. Purtroppo le stanze sono piccole e per farle sembrare più grandi l'architetto ha pensato di coprire le pareti con degli specchi.

Se necessario, le mattonelle possono essere tagliate, purché le mattonelle combacino perfettamente tra di loro. Come faremo a dare l'illusione di una stanza più grande e spaziosa in modo che il pavimento sia continuo?

I nostri primi commenti sono stati abbastanza diversi tra loro:

- *Mi sento incuriosito nel trovare la soluzione del problema!* (Samuele)
- *È un problema diverso dagli altri, che non ha dati e neppure un risultato.* (Giada e Vanessa)
- *Mi sento smarrito.* (Umberto)
- *Sono sicura che insieme possiamo farcela.* (Marialaura)

COSTRUZIONE DI CAMERE DI SPECCHI E DI MATTONELLE

Per cominciare, i papà di Francesco e di Samuele hanno costruito gli strumenti per le nostre osservazioni: specchi piani per ogni gruppo di lavoro e due camere di specchi (Fig 1); dallo studio della camera quadrata e di quella triangolare abbiamo ricavato le informazioni necessarie a quella esagonale.

Ogni gruppo di lavoro ha disegnato e ritagliato su cartoncini colorati un po' di mattonelle della forma richiesta (Fig. 2).

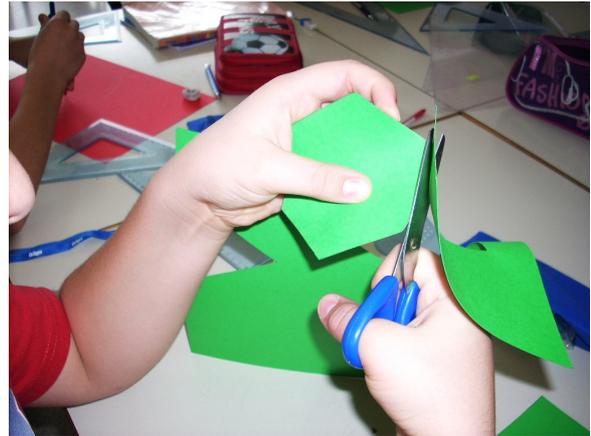
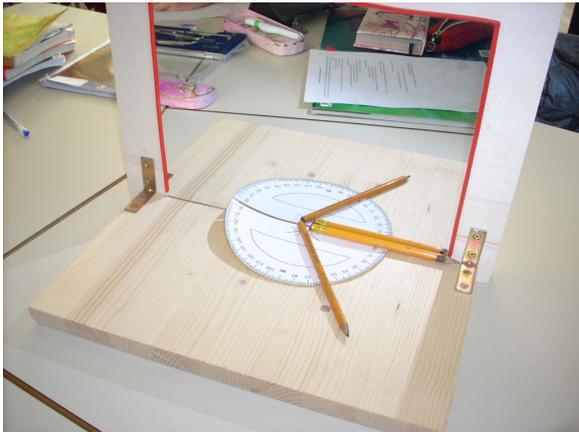


Fig. 1 - Fig. 2: Specchi e mattonelle

RIFLESSIONI CON UNO SPECCHIO

Dopo aver osservato alcuni oggetti riflessi in uno specchio o dentro una camera, abbiamo iniziato a studiare in dettaglio le proprietà della simmetria.

1) Il simmetrico di un punto

Ogni gruppo ha proposto una definizione, ricavata dall'osservazione attraverso uno specchio (Fig. 3) e poi abbiamo concluso: *si traccia dal punto P la retta perpendicolare all'asse di simmetria (specchio); si indica con H il punto di intersezione tra le due rette e sulla retta PH si prende il punto P' tale che $PH=HP'$.*

2) Le proprietà della simmetria

Dalla riflessione di bastoncini e cartoncini abbiamo scoperto che la simmetria conserva: la misura delle *lunghezze* dei segmenti, l'*ampiezza* degli angoli, il *parallelismo* di rette.

3) Le proprietà dei poligoni simmetrici

Abbiamo disegnato alcuni poligoni e li abbiamo osservati attraverso lo specchio scoprendo che: *Due figure simmetriche sono inversamente congruenti.*

Infatti i quadrati ABCD e A'B'C'D' sono uguali ma se i vertici del quadrato reale sono in senso orario quelli del quadrato riflesso sono in senso antiorario (Fig. 4)

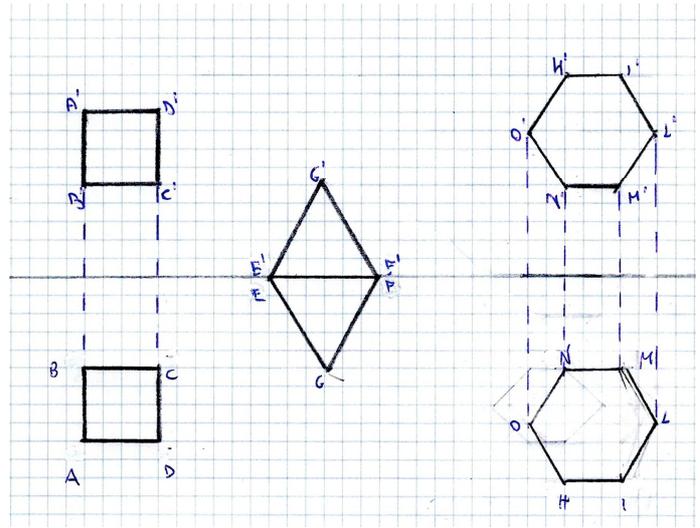
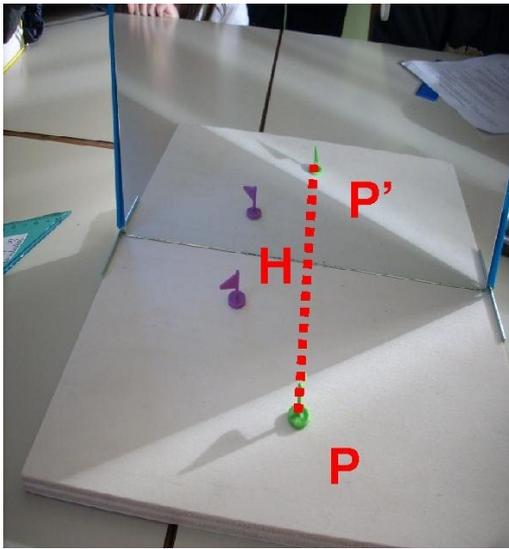


Fig. 3 - Fig. 4: Definizioni e proprietà

GLI ASSI DI SIMMETRIA

Per trovare gli assi di simmetria, abbiamo piegato la figura disegnata sul foglio, in modo che una parte combaciasse esattamente con l'altra (Fig. 5 e Fig. 6)

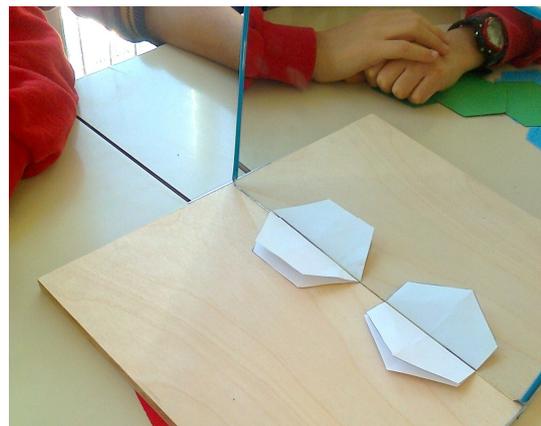
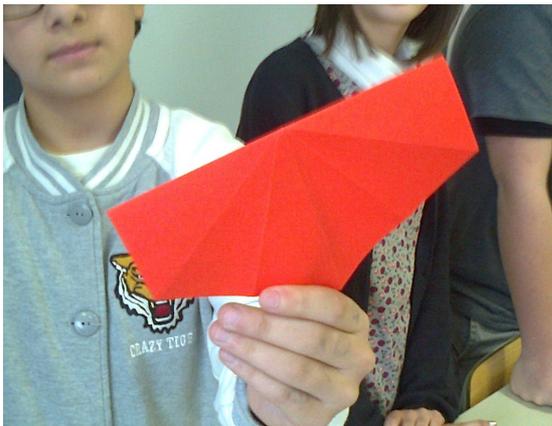
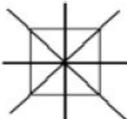


Fig. 5 - Fig. 6: Assi di simmetria dell'esagono

Abbiamo riassunto in una tabella:

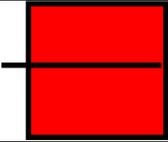
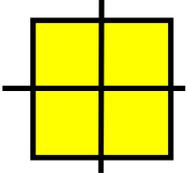
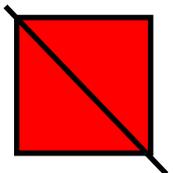
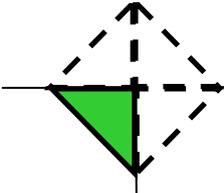
Poligoni regolari	N° assi di simmetria	Natura degli assi di simmetria	Disegni
Triangolo equilatero	3	3 mediane	
Quadrato	4	2 diagonali e 2 mediane	
Esagono regolare	6	3 diagonali e 3 mediane	

Abbiamo concluso che

- il numero n dei lati del poligono è uguale al numero di assi di simmetria;
- gli assi di simmetria sono mediane e diagonali se n è pari, sono mediane se n è dispari.

LA CAMERA QUADRATA

Abbiamo scoperto come tagliare le mattonelle quadrate, come e dove posizzarle:

	$\frac{1}{2}$ di mattonella quadrata tagliata lungo la mediana.	Si ottiene un rettangolo che può essere messo sui lati o nell'angolo della stanza, appoggiandolo lungo il lato più lungo.
	$\frac{1}{4}$ di mattonella quadrata tagliata lungo le due mediane.	Si forma un quadratino che può essere messo nell'angolo della camera; la parte reale con le tre riflesses forma una mattonella intera.
	$\frac{1}{2}$ di mattonella tagliata secondo la diagonale.	Si forma un triangolo rettangolo isoscele la cui l'ipotenusa va appoggiata lungo i lati della camera. Nell'angolo della camera si mettono due triangoli.
	$\frac{1}{4}$ di mattonella tagliata secondo le diagonali.	Si ottiene un triangolo rettangolo isoscele, che può essere messo solo nell'angolo della camera. Le tre immagini e la mattonella reale riformano una mattonella quadrata.

Le soluzioni che abbiamo trovato sono:

a) mattonella intera (forma di un quadrato intero): appoggiata lungo i lati della camera (Fig. 7 e Fig.8).

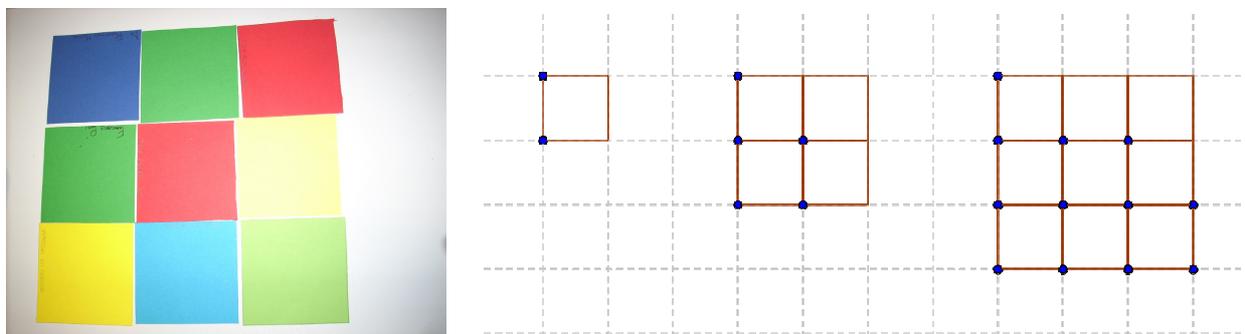


Fig. 7 - Fig. 8: Esempio di pavimentazione. Pavimentazioni in ordine crescente.

b) 1/2 mattonella (forma di un rettangolo): appoggiata lungo i lati della camera (Fig. 9 e Fig.10).

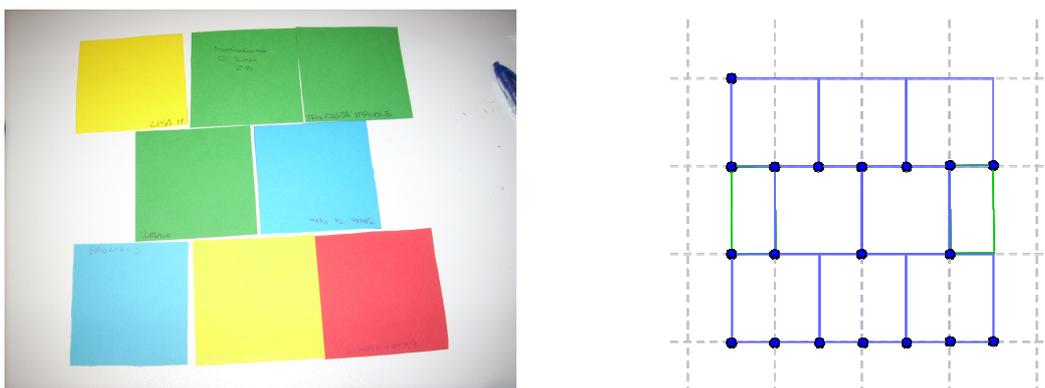


Fig. 9 - Fig. 10: Esempio di pavimentazione. Rappresentazione con *Geogebra*.

c) 1/4 mattonella (forma di un quadrato piccolo): inserita nell'angolo della camera (Fig. 11 e Fig.12).

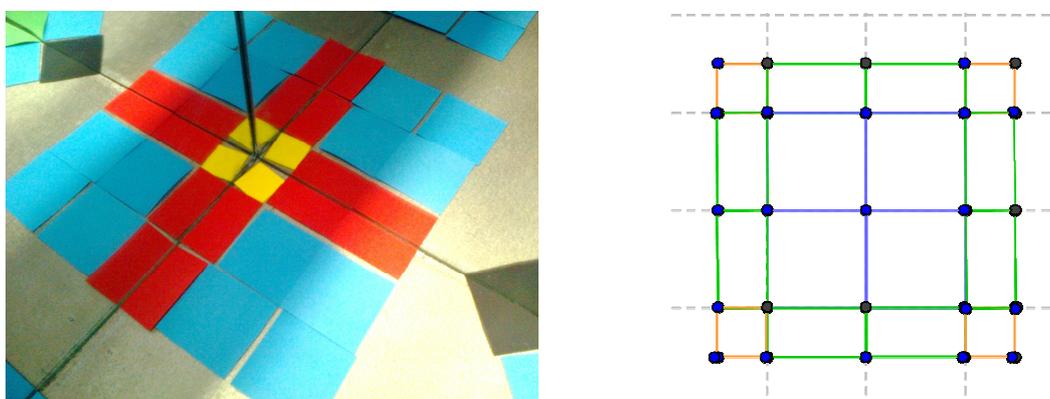


Fig. 11 - Fig. 12: Esempio di pavimentazione. Rappresentazione con *Geogebra*.

d) 1/2 mattonella (forma di un triangolo rettangolo isoscele): inserita nell'angolo e lungo i lati della camera (Fig. 13 e Fig.14).

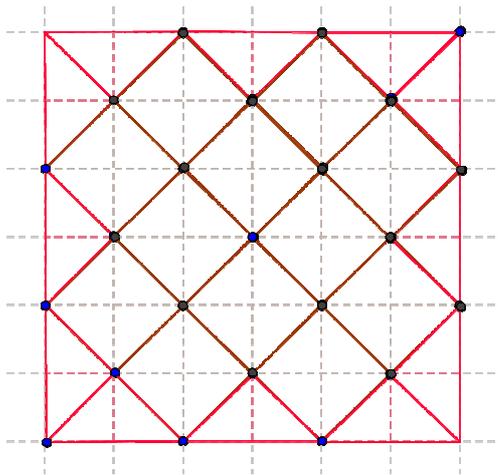


Fig. 13 - Fig. 14: Rappresentazione grafica. Esempio di pavimento reale.

e) 1/4 mattonella (forma di un triangolo rettangolo isoscele piccolo): messa nell'angolo della camera (Fig. 15 e Fig.16).

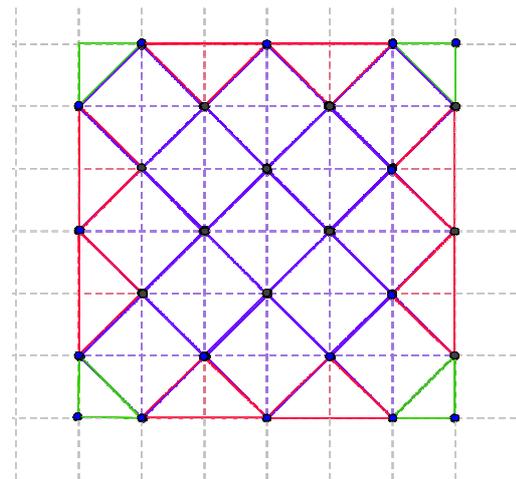


Fig. 15 - Fig. 16: Esempio di pavimento reale. Rappresentazione grafica.

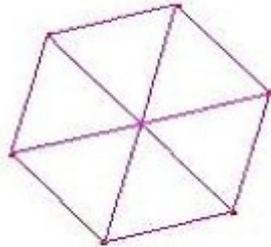
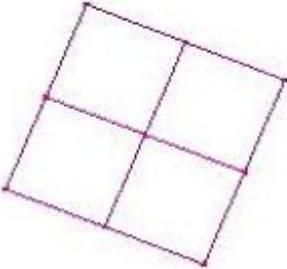
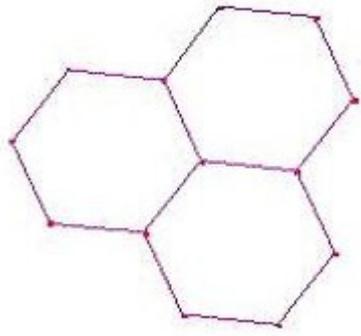
DIFFICOLTÀ DA SUPERARE!

Il problema sembra difficile:

- perché per risolverlo c'è bisogno di impegno e non si risolve in un giorno. (Vittorio)
- non riesco subito a mettere le mattonelle in modo corretto. (Francesco)
- abbiamo difficoltà con il triangolo e l'esagono, perché non si riescono ad incastrare. (Monica e Sara)

Allora per capire che cosa succedeva negli angoli delle camere di specchi abbiamo approfondito lo studio dei poligoni regolari, in particolare degli angoli interni.

Nella tabella abbiamo trascritto i calcoli e le osservazioni; abbiamo notato che il rapporto tra l'angolo giro (la parte di piano che deve essere ricoperta dalle mattonelle, intorno ad un angolo della camera) e un angolo interno della mattonella non sempre era un numero intero. Abbiamo dedotto che il piano può essere pavimentato con triangoli equilateri, quadrati ed esagoni regolari ma non con pentagoni regolari.

N° di lati del poligono regolare	Somma degli angoli interni α	Ampiezza di α	Rapporto $360^\circ / \alpha$	Disegno	N° di poligoni in un vertice della camera
3	180°	60°	$360/60 = 6$		1+5
4	360°	90°	$360/90 = 4$		1+3
5	540°	108°	$360/108 = 3,33..$	/	/
6	720°	120°	$360/120 = 3$		1+2

LA CAMERA TRIANGOLARE

Poiché Sara ha osservato che *la camera triangolare è più difficile di quella quadrata!* abbiamo cercato di individuare i procedimenti risolutivi della camera quadrata utilizzabili anche in quella triangolare; l'idea è stata quella di usare prima le mattonelle intere e poi quelle tagliate lungo l'asse di simmetria.

- a) **mattonella intera:** appoggiata in un angolo della camera produce 5 immagini mentre sul lato della camera produce 1 immagine (Fig. 17 e Fig.18).

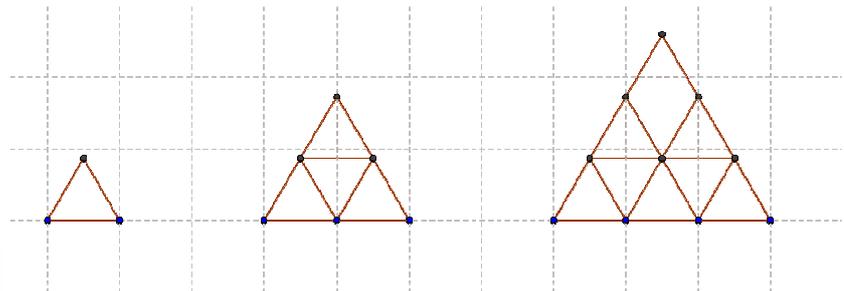


Fig. 17 - Fig. 18: La camera triangolare. Pavimentazioni in ordine crescente.

- b) **1/2 mattonella.** Il triangolo equilatero, tagliato lungo la mediana, forma due triangoli particolari con gli angoli di 30° , 60° , 90° ; bisogna appoggiare il cateto maggiore di una mattonella lungo il bordo dello specchio e due mezza mattonelle nell'angolo della stanza. Il centro della stanza invece va riempito con mattonelle intere.

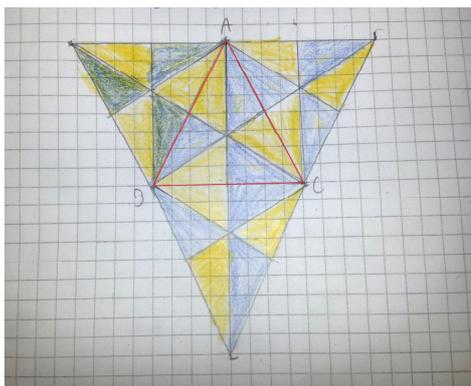
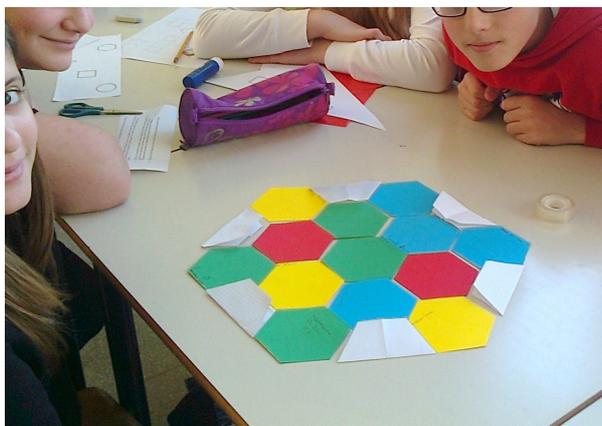


Fig. 19 - Fig. 20: Una camera piccola ABC. Una pavimentazione un po' più grande.

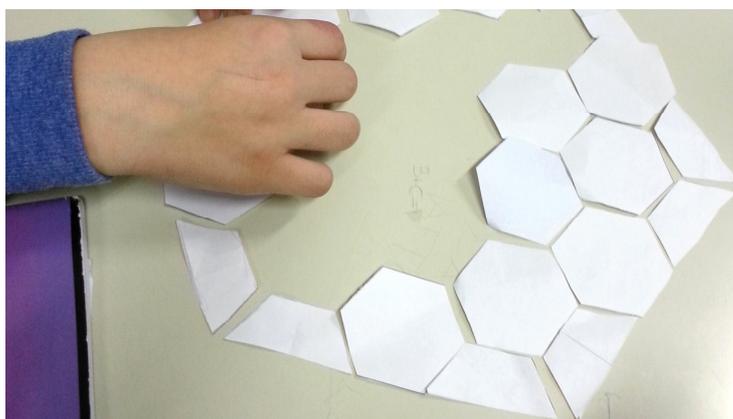
LA CAMERA ESAGONALE

Abbiamo subito notato che non si può riempire una stanza esagonale con sole mattonelle intere e che quindi era necessario riempire la camera con pezzi di mattonelle. Abbiamo utilizzato il trapezio isoscele (tagliando un esagono lungo un'asse di simmetria) e il triangolo equilatero (tagliando lungo i 3 assi di simmetria).

a) Un esagono regolare. Dopo aver posizionato gli esagoni al centro del banco, abbiamo riempito gli spazietti che restavano vuoti intorno alla figura con alcuni trapezi isosceli metà di un esagono. Negli angoli della camera ci sono solo mattonelle esagonali.



b) Due trapezi isosceli. In ogni angolo della camera abbiamo messo due trapezi isosceli, perché gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano 60° e l'angolo interno dell'esagono misura 120° .



c) Due triangoli equilateri. Un'altra possibilità è stata quella di mettere gli esagoni al centro e aggiungere coppie di triangoli equilateri ai vertici della stanza. Con un po' di

pazienza abbiamo scoperto che per una stanza più piccola, con questa struttura, il numero di esagoni è 3.



IL CONVEGNO

Giorgia ha osservato che *abbiamo fatto un lavoro di squadra* e Umberto che *con l'impegno e la fantasia tutto si è semplificato*.

Vanessa aveva ragione quando, pensando al convegno, immaginava una sala con molti studenti e docenti, tutti attenti a quello che dicevamo, un'occasione per confrontarsi con gli altri.



Pensavamo a un po' di tutto: un'esperienza fantastica, il successo, il divertimento, la paura di sbagliare, il nervosismo. È stato proprio così, ma siamo tornati a Chieti soddisfatti e orgogliosi del nostro lavoro.

I VIDEO

1) Il problema: La sala degli specchi 1 - <https://www.youtube.com/watch?v=e9194RVhz0w>

2) Le fasi del lavoro: La sala degli specchi 2 -

<https://www.youtube.com/watch?v=jf9Dcdz5GiE>

3) Convegno Presso l'Università degli Studi di Milano: La sala degli specchi 3 -

<https://www.youtube.com/watch?v=n0UoTJFT8co>