da **NUMERIA**

di **SERGIO FABRIS**

3. Diofanto: il padre dell'Algebra?

Non conosciamo molto della vita di Diofanto di Alessandria, matematico greco del terzo secolo dopo Cristo. Non siamo nemmeno sicuri se egli sia vissuto intorno al 250 d. C. oppure un secolo prima o dopo. I suoi studi rappresentano un caso isolato, l'ultimo episodio matematico importante in un periodo in cui la potenza creativa dei Greci sembrava essersi ormai esaurita.
Gli si attribuiscono alcuni trattati: uno sui numeri poligonali, un altro, dal titolo "Moriastica", sulle frazioni, e forse un libro intitolato "Porismi" di corollari a teoremi geometrici. La sua opera principale, "Arithmetica", è un trattato in tredici volumi di cui ci sono pervenuti solo i primi sei. In essa Diofanto risolve centocinquanta problemi espressi in termini numerici, esemplificativi di problemi più generali. I problemi trattati sono sia determinati (vale a dire, con un'unica soluzione) sia (e questi ultimi sono la maggior parte) indeterminati, nel senso che ammettono più di una soluzione. Tuttavia Diofanto si preoccupa di trovare soltanto le soluzioni intere o razionali, non quelle di altro tipo.

Diofanto di Alessandria

Anche se Diofanto è spesso soprannominato il "padre dell'algebra", occorre intendersi su questo appellativo. È vero infatti che egli non fa uso di soluzioni puramente geometriche - come avevano fatto Euclide e i suoi predecessori, per i quali i numeri avevano significato solo in quanto rappresentavano quantità geometriche, ma è altrettanto vero che non dà soluzioni generali a categorie di problemi e che si esprime solo parzialmente in termini di calcolo letterale come facciamo noi oggi.

A Diofanto si deve un famoso problema, che egli stesso volle venisse scritto sulla propria tomba sotto forma di epitaffio e una traduzione del quale è la seguente:

> *Questa tomba rinchiude Diofanto e, meraviglia! dice matematicamente quanto egli ha vissuto. Un sesto della sua vita fu l'infanzia, aggiunse un dodicesimo perché le sue guance si coprissero della peluria dell'adolescenza. Inoltre per un settimo ebbe moglie, e dopo cinque anni di matrimonio ebbe un figlio. L'infelice morì improvvisamente quando raggiunse la metà dell'età paterna. Il genitore sopravvissuto fu in lutto per quattro anni e raggiunse infine il termine della propria vita.*

La soluzione dell'enigma, indicando con x l'età di Diofanto, è la seguente:

$$x/6 + x/12 + x/7 + x/2 + 5 + 4 = x,$$

[1] L'immagine di apertura: *Pitagora*, particolare da "La Scuola di Atene" di Raffaello (Stanza della Segnatura - Musei Vaticani).

che porta a dire che egli morì a 84 anni.

Le equazioni diofantee

Consideriamo un'equazione in n incognite. Generalmente, essa ha infinite soluzioni, come accade già per l'equazione di primo grado in due incognite

$$x + y = 9$$

per la quale tutte le coppie (0,9), (1,8), …, ($\sqrt{5}$, 9-$\sqrt{5}$), …, (x, 9-x) sono soluzioni, pur di decidere dove far variare x: per esempio fra i numeri reali, ma anche soltanto fra i numeri razionali o addirittura fra gli interi relativi.

Bene, cercare la risposta alla domanda "Esistono e quante sono le soluzioni INTERE dell'equazione data?" è un problema che è noto come "cercare di risolvere l'equazione diofantea $x + y = 9$", visto che per equazioni diofanteee si intendono proprio equazioni (non necessariamente di primo grado) a coefficienti interi per le quali si cerchino come soluzioni soltanto numeri interi. (Diofanto, in realtà, si accontentava di trovare soluzioni razionali, non necessariamente intere, ma il nome delle equazioni è proprio il suo, visto che è stato il primo a studiarle in modo sistematico.)

Non è difficile dimostrare che l'equazione diofantea

$$ax + by = c \qquad \text{con } a, b \text{ e } c \text{ numeri interi}$$

ammette un numero soluzioni intere se e solo se il coefficiente c è un multiplo del Massimo Comun Divisore di a e b.

La prima parte di questa affermazione (il "solo se") si verifica facilmente: se l'equazione ha una soluzione intera (x,y) allora ax è un multiplo di a e quindi anche di ogni divisore di a, in particolare del MCD d fra a e b; ma anche by è un multiplo di b e quindi anche di ogni divisore di b, in particolare di d=MCD(a,b); quindi $c = ax + by$ deve necessariamente essere un multiplo di d.

Per esempio, l'equazione

$$2x + 6y = 13$$

non ha alcuna soluzione fra i numeri interi, perché se x e y sono numeri interi, il numero $2x + 6y$ deve essere pari, mentre 13 non lo è.

È un po' più complicato (ma non molto) far vedere che vale anche il viceversa, cioè che se c è un multiplo di d = MCD(a,b), allora è possibile trovare delle soluzioni intere. Di più, si può dimostrare che in questo caso le soluzioni sono infinite e si possono ottenere in questo modo:

- si trova una particolare soluzione (x_0,y_0), cioè una coppia di interi tali che $ax_0 + by_0 = c$;
- si considerano le infinite coppie di interi del tipo ($b't$, $-a't$), dove t è un numero intero, che costituiscono le infinite soluzioni dell'equazione $ax + by = 0$; i numeri a' e b' si ottengono dividendo a e b rispettivamente per il loro MCD; in particolare si ha $a'=a$ e $b'=b$ nel caso in cui a e b non abbiano fattori in comune;
- a questo punto si può concludere che una coppia di interi (x,y) è una soluzione dell'equazione $ax + by = c$ se e solo se esiste un numero intero t per cui $x = x_0+b't$ e $y=y_0-a't$.

Per fare un paio di esempi, dalla soluzione particolare $x = 1$ e $y = 8$ dell'equazione $x + y = 9$ possiamo ricavare che TUTTE le possibili soluzioni intere della stessa equazione sono del tipo $x = 1+t$ e $y = 8-t$, con t che varia fra i numeri interi.

Allo stesso modo, dalla soluzione particolare $x = 4$ e $y = 1$ dell'equazione $2x + 6y = 14$ possiamo ricavare che TUTTE le possibili soluzioni intere della stessa equazione sono del tipo x=4+3t e y=1-t, con t che varia fra i numeri interi.

Nel secondo libro della "Arithmetica" Diofanto propone l'equazione di secondo grado

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{con } x, y, z \text{ interi}$$

e dà come soluzioni intere le cosiddette "terne pitagoriche".
L'equazione diofantea

$$x^n + y^n = z^n \text{ con } x, y, z, n \text{ interi e } n > 2$$

avrebbe poi dato il mal di testa per secoli a miriadi di matematici; si tratta infatti del cosiddetto "ultimo teorema di Fermat".

L'invenzione delle notazioni algebriche

La fama di Diofanto è legata anche a un altro fatto: egli infatti fu il primo a usare un simbolismo matematico che non era non basato solo sul linguaggio naturale, ma che usava in modo sistematico le lettere per abbreviare le incognite. È un vero peccato che egli stesso non sia stato consapevole della portata della sua innovazione: con ogni probabilità, infatti, ritenne di aver trovato semplicemente un sistema che consentiva di ridurre la scrittura, e non un sistema simbolico automatico (l'algebra, appunto) di estrema efficacia e precisione.
Il sintetico simbolismo matematico oggi in uso (ad esempio, il simbolo + per l'addizione o √ per l'estrazione di radice, l'uso delle parentesi ecc.) è una conquista di non più quattro secoli fa e dunque è relativamente recente rispetto ai millenni precedenti in cui la matematica è stata prevalentemente descrittiva, basata cioè sull'uso della parola.
Gli storici della matematica sono d'accordo nel ritenere che il simbolismo matematico abbia attraversato tre fasi: quella fase retorica (sino a Diofanto) in cui si usa esclusivamente il linguaggio naturale, senza ricorrere ad alcun segno: per impostare dei calcoli, si ricorreva a lunghi discorsi fatti per esteso. (Così, l'espressione $3x + 7 = 4x$ veniva enunciata (e scritta) press'a poco in questo modo: tre quantità incognite addizionate a sette unità sono eguali a quattro quantità incognite), quella "sincopata" (sino alla fine del sedicesimo secolo) in cui si introducono alcuni simboli per rappresentare gli operatori aritmetici più comuni (quali +, -, = ecc.) e quella simbolica (sino ai giorni nostri) in cui si usano simboli per rappresentare gli operatori, e un linguaggio simbolico non solo per risolvere equazioni ma anche per provare regole generali.

Le date di questo racconto sono puramente indicative in quanto il processo che ha portato al simbolismo matematico attualmente usato fu lungo, contrastato e difficile: ad esempio, i segni "più" e "meno" erano già in uso presso i Germani prima che Viète li utilizzasse, il simbolo di eguaglianza = fu adottato per la prima volta da Robert Recorde (1510 - 1558), il segno √ della radice quadrata fu inventato da Christoph Rudolff (1500 circa - 1545 circa), mentre bisogna aspettare il diciottesimo secolo e Eulero per aver l'introduzione di π per rappresentare il rapporto fra la circonferenza e il diametro di un cerchio, di Σ per la somma, di $f(x)$ per indicare l'immagine di x nella funzione f, $\ln x$ per indicare il logaritmo naturale di x, i per l'unità immaginaria, ecc.