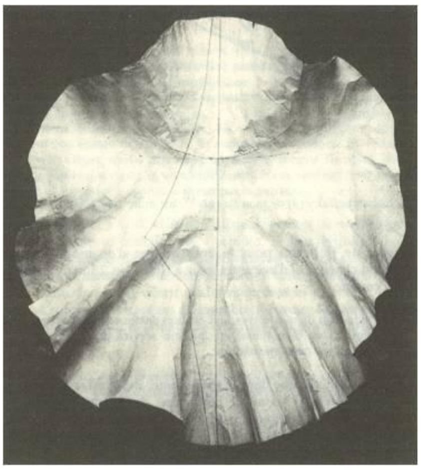
La *cuffia* di Eugenio Beltrami

La Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia conserva un vero gioiello matematico: il modello di Eugenio Beltrami (1835-1900) che molti conoscono come "pseudosfera" ma che altri chiamano, più confidenzialmente, visto il suo aspetto, la "cuffia" di Beltrami.
Detto in matematichese, si tratta di un modello locale del piano di Lobačevskij, ma, detto in modo più informale, si tratta di un modello che riguarda una porzione del piano che il matematico russo Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856) ha usato per mostrare come si potesse costruire/definire una geometria (quella iperbolica) diversa da quella euclidea, cioè diversa dalla geometria che ci sembra naturalmente collegata alla percezione dello spazio in cui viviamo.
La costruzione di questo modello "concreto" ha storicamente mostrato come la definizione della nuova geometria sia da ritenersi del tutto coerente dal punto di vista logico, se quella euclidea lo è. (Non dobbiamo più temere che essa contenga delle contraddizioni o, meglio, non lo dobbiamo temere più di quanto lo temiamo per la geometria di Euclide…)
E quindi ci ha permesso di accettare il fatto - un po' inquietante, riconosciamolo - che neppure di geometrie ce ne sia una sola…
Era nato come un episodio nella serie dei tentativi messi in campo dai matematici per dimostrare che il V postulato di Euclide (che possiamo raccontare così: nel piano, per un punto esterno a una retta data passa una e una sola retta che le è parallela) discende dai precedenti, ma diventa in questo modo una tappa nell'esplorazione di altri mondi possibili.

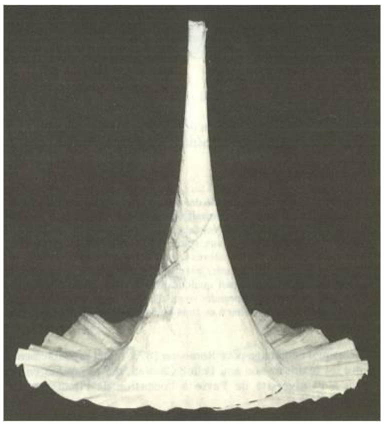
Chi è l'autore di questa impresa? Eugenio Beltrami, uno dei più grandi matematici italiani del

diciannovesimo secolo e personaggio di grande rilievo anche sul piano internazionale, nasce a Cremona il 16 novembre 1835. Nel 1853 si iscrive alla Facoltà matematica dell'Università di Pavia, dove ha come insegnante Francesco Brioschi (1824-1897), e dove conosce Felice Casorati (1835-1890) e Luigi Cremona (1830-1903).
Nel novembre del 1856, le ristrettezze economiche in cui versa la famiglia dopo il passaggio del padre in Piemonte per sfuggire al dominio austriaco, lo costringono ad abbandonare gli studi senza laurearsi e ad accettare di lavorare come segretario del direttore delle ferrovie del Lombardo-Veneto, prima a Verona e poi a Milano.
Nel 1859 ritrova Luigi Cremona e riprende privatamente gli studi di matematica. Il 18 ottobre 1862, con l'appoggio forte anche di Cremona e di Francesco Brioschi, il futuro fondatore del Politecnico di Milano che in quegli anni era Segretario Generale dell'Istruzione Pubblica del Regno d'Italia, il Ministro Terenzio Mamiani lo nomina professore straordinario di Algebra complementare e Geometria analitica presso l'Università di Bologna. E comincia così la sua carriera accademica.
Poco tempo dopo, nel 1863, Enrico Betti (1823-1892) gli propone il posto di professore ordinario di Geodesia teorica (oggi diremmo, forse senza sbagliare troppo, di Geometria differenziale) presso l'Università di Pisa; Beltrami accetta e per prepararsi al nuovo insegnamento passa alcuni mesi di studio intenso presso l'Osservatorio Astronomico di Brera, diretto dall'astronomo Giovanni Virginio Schiapparelli (1835-1910).
A Pisa conosce e frequenta Bernhard Riemann, che vi si era trasferito per motivi di salute; poi, nel settembre 1866, ritorna a Bologna come ordinario di Meccanica razionale, disciplina che preferisce alla Geodesia.
Nell'ottobre del 1873 si trasferisce a Roma dove insegna Meccanica razionale e Analisi superiore e dove, peraltro, resta poco: non servono a trattenerlo gli appelli che gli arrivano dal Ministro e soprattutto da Cremona a resistere, per contribuire alla costruzione della "terza Roma", quella della Scienza, e così dall'ottobre 1876, per quindici anni, insegna a Pavia Fisica matematica e

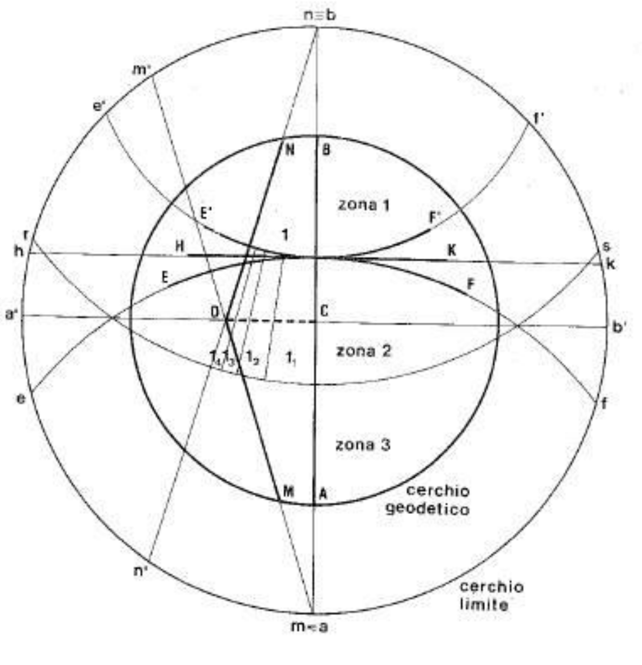
Meccanica. Nel 1891 tuttavia ritorna definitivamente a Roma ove rimane finché la morte lo coglie il 18 febbraio 1900.



Cerchiamo ora di descrivere il modello materiale da lui ideato.
Beltrami ha costruito vari modelli di pseudosfera tra il 1869 e il 1872, ma l'unico esemplare rimasto è quello del 1869 conservato appunto nel Dipartimento di matematica dell'Università di Pavia.
Esso si presenta come una superficie flessibile di forma circolare composta dal collage di 124 quadrilateri di carta.
Ogni frammento di carta approssima un pezzo di pseudosfera delimitato da due paralleli e due meridiani della pseudosfera stessa ed è munito di espansioni tali da permettere l'incollatura a quelli adiacenti.
La flessibilità di tale modello consente di avvolgerlo su se stesso in modo da ottenere due tipi di superfici pseudosferiche: quello iperbolico e quella di tipo parabolico a cui solitamente ci si riferisce parlando di pseudosfera, che sono mostrati nelle prime due figure seguenti.
Esiste anche un terzo tipo di superficie pseudosferica, il tipo ellittico, che però non può essere riprodotto con il modello di carta a meno di apportare tagli: è quello mostrato qui sotto attraverso un modello in gesso custodito nel Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano.



Per meglio spiegare la conformazione, e allo stesso tempo il processo di costruzione, del modello, facciamo appello al piano ausiliare.



Esso rappresenta la proiezione sul piano della superficie del modello.
Il modello nel piano ausiliare è rappresentato tramite un cerchio interno, che raffigura il cerchio geodetico che racchiude la regione rappresentata nel modello, e un cerchio esterno, che è il cerchio limite, cioè l'insieme dei punti all'infinito.
Nella figura sono tracciati i diametri geodetici *ab*, ed *a'b'*, ortogonali tra loro nel centro *C* del cerchio, le corde geodetiche *nn'* e *mm'*, parallele al diametro *ab* (poiché si incontrano con esso solo sul cerchio limite, cioè all'infinito), la corda geodetica *hk*, gli oricicli *ef* con centro in *a* e *e'f'* con centro in *b* passanti per l'intersezione tra *ab* e *hk* e l'oriciclo *rs* con centro in *b* e raggio pari a quello di *ef*. Nominiamo con le stesse lettere

ma maiuscole i punti in cui ogni linea interseca il cerchio geodetico. Gli oricicli *e'f'* e *rs* dividono il cerchio geodetico in tre regioni, indicate nella figura con zona 1, zona 2 e zona 3, in modo che il diametro *AB* resti diviso in tre parti uguali.
Il modello è formato dal collage di "quadrilateri" di carta, questi "quadrilateri" vengono rappresentati nel piano ausiliare da quelli segnati con 1_1, 1_2, 1_3, 1_4 e 1, delimitati da due corde geodetiche concorrenti in *b* e da due oricicli con centro in *b*. A differenza dei "quadrilateri" del piano ausiliare, i "quadrilateri" di carta sono tutti uguali tra loro, i lati rettilinei misurano 0,343 m e quindi il diametro del cerchio geodetico risulta 1,029 m, il lato curvo più lungo misura 0,08 m e quello più corto 0,02 m; i pezzi più esterni sono tagliati in modo che nel complesso il modello abbia una forma circolare.
Il modello è perfettamente simmetrico relativamente al diametro *AB* e le tre zone in cui esso è diviso sono ottenute dal collage, lungo i lati rettilinei, di rispettivamente 14, 42 e 84 "quadrilateri" (in effetti nella zona 3 i 32 "quadrilateri" estremi sono stati sostituiti con 16 larghi il doppio. I quadrilateri" integri sono quindi 20 e tutti compresi nella zona 2). Le tre zone vengono poi incollate lungo i lati curvilinei: siccome l'arco più corto di ogni "quadrilatero" è un quarto di quello più lungo, risulta che ad ogni "quadrilatero" delle zone 1 e 2 vengono a legarsi 4 della zona successiva.
Infatti, nella zona 1 al settimo "quadrilatero", contato da *AB*, non se ne lega nessuno ed al sesto si lega un solo pezzo (questo da entrambi i lati del diametro), mentre nella zona 2 al settimo, contato da *AB*, si legano due "quadrilateri" normali e uno doppio, all'ottavo, al nono e al decimo se ne legano due doppi ed all'undicesimo se ne lega uno solo doppio (questo sempre da entrambi i lati del diametro).

Se questa spiegazione vi ha incuriosito o vi ha lasciato qualche dubbio sulla struttura del modello, non c'è niente di meglio che fare un salto a Pavia a "toccare con mano" il modello e farvi proiettare nel fantastico mondo della geometria iperbolica!

Clara Lorusso

Per leggere ancora:

- Carl. B. Boyer, *Storia della matematica*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano 1990, cap. 24.
- Antonio C. Capelo e Mario Ferrari, *La «cuffia» di Beltrami: storia e descrizione*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, Vol. II (1982) fasc. 2.
- Corradino Mineo, *Conferenze sulla geometria non euclidea*, S. F. Flaccovio Editore, Palermo 1960.