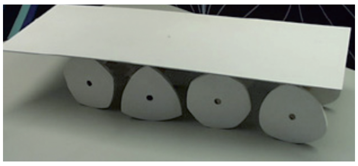
fuoribordo

Con un giro di ruota

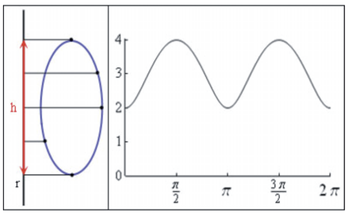
di ANA CRISTINA OLIVEIRA



In un veicolo con quattro ruote circolari, ogni coppia di ruote è collegata tramite un asse che passa per il loro centro. Dal momento che la forma della ruota garantisce che ogni punto del suo bordo sia alla stessa distanza dal suo centro, l'asse si muove senza oscillazioni. Ma, se vogliamo trasportare un oggetto pesante, il sistema di ruote unite da un asse può non essere sufficientemente robusto e quindi spesso si utilizzano rotolamenti: gli oggetti vengono trasportati su di una piattaforma che rotola sopra cilindri di uguale sezione. Anche in questo modo il trasporto si svolge senza oscillazioni, ma questa volta la proprietà responsabile del movimento senza scosse è il fatto che la circonferenza ha *ampiezza costante*.

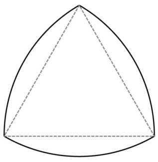
Che cosa significa *ampiezza costante*? Data una curva piana e chiusa *C*, l'*ampiezza di* C *in una direzione fissata* r è la lunghezza del segmento che si ottiene proiettando *C* su *r*, perpendicolarmente alla retta stessa. Si dice che l'ampiezza di una curva è *costante* se la lunghezza del segmento è la stessa per tutte le direzioni del piano.

Per esempio, una circonferenza di dia-



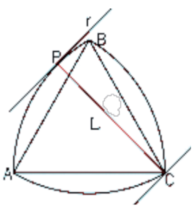
A sinistra è rappresentata l'ampiezza *h* della curva nella direzione *r*. Il grafico a destra mostra la relazione tra l'inclinazione della retta (la direzione) e l'ampiezza della curva.

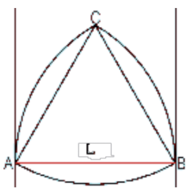
metro *d* ha ampiezza costante *d*. Ma questa non è una proprietà che la caratterizza poiché esistono infinite altre curve che la soddisfano. La più semplice, dopo la circonferenza, è il *triangolo di Reuleaux*, che si ottiene, a partire da un triangolo equilatero di lato *L*, disegnando tre archi di circonferenza di raggio *L* e centro nei tre vertici del triangolo. Verifichiamo che la curva così ottenuta ha ampiezza costante *L*.



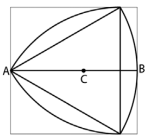
Per farlo abbiamo bisogno di ricordare che cos'è una *retta di supporto* per una curva. Essa è una linea retta che ha almeno un punto di intersezione con la curva e tale che quest'ultima giaccia interamente in uno dei due semipiani individuati dalla retta. Notiamo che una retta di supporto non è, in generale, una retta tangente, così come una retta tangente non è, in generale, una retta di supporto; e che una curva chiusa ha esattamente due rette di supporto in ogni direzione: esse possono essere trovate collocando la curva tra due rette parallele a una direzione fissata e facendole scivolare, mantenendo il parallelismo, fino a toccare la curva.

Torniamo al triangolo di Reuleaux. Consideriamo una direzione e la coppia di rette di supporto del triangolo in questa direzione. Se una di queste rette è tangente a un punto interno a uno degli archi di circonferenza tracciato con centro in un vertice, allora l'altra retta di supporto passa per questo vertice e la distanza tra di esse è il raggio della circonferenza, *L*. Se entrambe le rette di supporto intersecano la curva nei vertici, allora sono tangenti agli estremi di archi di circonferenza diversi e l'ampiezza della curva nella direzione perpendicolare alle rette di supporto è la lunghezza *L* del lato del triangolo che dà origine al triangolo di Reuleaux.





Se ora consideriamo due direzioni perpendicolari, le rette di supporto in una direzione, sono perpendicolari alle rette di supporto nell'altra: tutte e quattro formano un quadrato dove il triangolo di Reuleaux può essere ruotato senza perdere contatto con il bordo del quadrato. (La stessa affermazione è valida per una qualsiasi curva di ampiezza costante e, viceversa, se questa proprietà è soddisfatta, allora la curva ha ampiezza costante.) Ma, a differenza della circonferenza, durante questo movimento il centro geometrico del triangolo di Reuleaux non si mantiene fisso perché non è a uguale distanza dalle coppie di rette di supporto parallele.

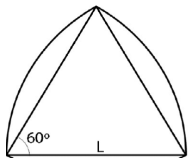


$$|AC| = \frac{\sqrt{3}}{3}L$$

$$|BC| = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)L$$

Le curve di ampiezza costante condividono varie proprietà con la circonferenza, come ad esempio:

- tutte le curve di ampiezza costante *L* sono convesse e hanno uguale perimetro (quello della circonferenza di diametro *L*, ovvero πL). Per qualche direzione, ognuna delle due rette di supporto le interseca in un solo punto, essendo il segmento che unisce questi due punti di contatto perpendicolare alle rette di supporto
- tra tutte le curve di ampiezza costante che hanno lo stesso perimetro, quella che occupa

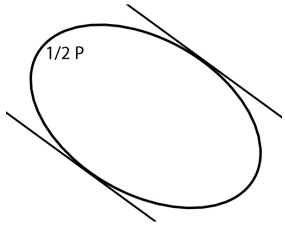


$$\text{Perimetro} = 3\left(\frac{\pi}{3}\right)L = \pi L$$

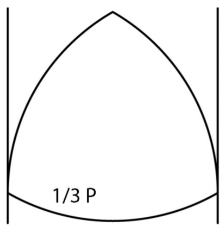
$$\text{Area} = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)L^2$$

l'area maggiore è la circonferenza; quella che delimita l'area minore è il triangolo di Reuleaux.

Del resto, la circonferenza è l'unica curva piana, semplice, chiusa e rettificabile che abbia ampiezza costante e tale che, per ogni punto P della curva, e ogni retta di supporto r per P, il punto della curva che dista metà del perimetro da P stia sulla retta di supporto parallela a r.



In un'ellisse, ogni coppia di rette di supporto divide il perimetro in due parti uguali, ma questa curva non ha ampiezza costante.



Il triangolo di Reuleaux ha ampiezza costante, ma le due rette di supporto in figura non dividono il perimetro in due parti uguali.

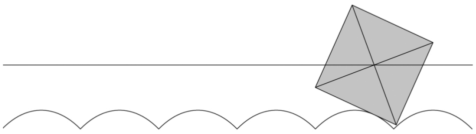
Più in generale, se fissiamo un'applicazione continua f senza punti fissi e tale che $f \bullet f = f$, definita su una curva C piana, semplice e chiusa, e se con $s(C)$ indichiamo il minimo delle distanze (nel piano) da $f(P)$ a P, dove P è un punto qualsiasi della curva C, allora il perimetro della curva è maggiore o uguale a $\pi s(C)$; e vale l'uguaglianza se e solo se C è una curva di ampiezza costante e, per tutti i punti P della curva e una qualsiasi retta di supporto r per P, il punto $f(P)$ appartiene alla retta di supporto parallela a r.

Adesso ci si può chiedere quale sia la forma della strada adeguata a una ruota il cui bordo sia una curva di ampiezza costante data. Durante il movimento occorre che la ruota e la strada si mantengano in contatto, che la lunghezza percorsa dal bordo della ruota sia uguale a quella tracciata sulla strada e, inoltre, che il centro geometrico della ruota si muova orizzontalmente senza oscillazioni.

Se per esempio le ruote fossero qua-

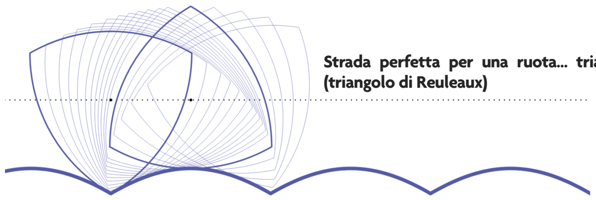
Per saperne di più

Hall, Wagon – *Roads and Wheels*, Mathematics Magazine, vol. 65, nº 5, 283-301 (1992)
Rademacher, Toeplitz – *The enjoyment of Mathematics*, Princeton University Press (1970)
Honsberger – *Ingenuity in Mathematics*, MAA, (1970)
Niven – *Maxima and minima without calculus*, MAA, Dolciani Mathematical Expositions 6 (1981)
Bonnesen, Fenchel – *Theory of convex bodies*, BCS Associates (1987)
Herda – *A characterization of circles and other closed curves*, Amer. Math. Monthly, 143-149 (1974)
Chakerian – *A characterization of curves of constant width*, Amer. Math. Monthly, 153-155 (1974)

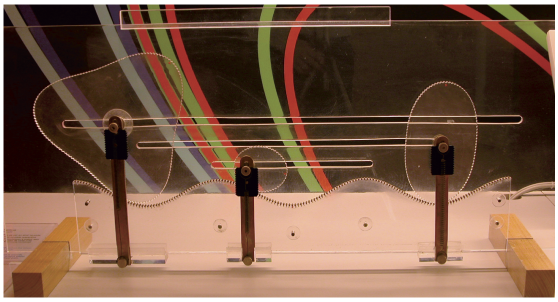


drate come nel disegno qui sopra, come dovrà essere la strada affinché chiunque si muova su un carrello appoggiato su un asse che collega due ruote disposte in fase, abbia un movimento orizzontale (senza oscillare su e giù)? Si può provare che una tale strada è composta da archi di catenaria invertiti.

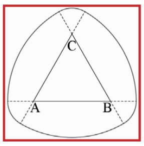
Nella mostra *Matematica Viva* vi è anche un *exhibit* in cui ruote di tre forme diverse scorrono su una stessa strada, perfetta per le tre ruote in ogni sua parte.



Strada perfetta per una ruota... triangolare! (triangolo di Reuleaux)



Ana Cristina Oliveira (amolivei@fc.up.pt)
Laureata in Matematica, collabora con l'associazione portoghese *Atractor - Matemática Interactiva* dal 1999.



Una costruzione analoga a quella del triangolo permette di disegnare poligoni di Reuleaux con un numero dispari di lati che siano archi di circonferenza. Se invece si vogliono ottenere poligoni con un numero pari di lati, occorre usare archi di raggi diversi.

Nell'immagine vi sono due monete il cui bordo è costituito da curve di ampiezza costante con angoli arrontondati. Per ottenere questo arrotondamento, dopo aver disegnato un triangolo equilatero *ABC*, di lato *L*, si prolungano i lati e si tracciano tre archi di circonferenza di raggio *r* (arbitrario) centrati nei vertici, in modo tale che gli archi siano compresi tra i prolungamenti dei lati del triangolo. In seguito, si tracciano archi di raggio *L+r* con centro nei vertici in modo tale da unire i piccoli archi prima ottenuti.