Il mondo matematico delle trecce

di Ester Dalvit

Tutti abbiamo a che fare con le trecce in qualche modo: le bambine che si fanno pettinare dalla mamma, i golosi che provano ogni forma di pane e di dolci, chi intreccia braccialetti, chi lavora a maglia, chi compra un cesto di vimini o una cintura in pelle o un gioiello particolare... Che cosa hanno a che fare questi oggetti decorativi con la matematica? Molto più di quanto si possa pensare!

Vi ricordate come si fa un braccialetto "Scoubidou"? Ecco l'esempio più semplice: prendiamo tre cordicelle, leghiamole insieme a un'estremità e cominciamo a intrecciare, ripetendo questi due movimenti:
passiamo il filo di destra sopra quello centrale,
passiamo il filo di sinistra sopra il filo centrale...
e ricominciamo con il primo passo. Otteniamo una treccia come quella in figura 1. Al termine, quando abbiamo raggiunto la lunghezza desiderata, fissiamo i fili all'altra estremità per evitare che la treccia si sciolga e per formare un braccialetto.

Figura 1. Come costruire la tipica treccia

Che cosa hanno a che fare le trecce con la matematica? La storia è lunga e comincia negli anni Venti del secolo scorso, quando il matematico austriaco Emil Artin (1898-1962) comincia a studiarle per trovare delle possibili applicazioni alla fabbricazione dei tessuti.

In breve tempo le trecce diventano un oggetto matematico importante: come vedremo nel seguito (e più in dettaglio nel prossimo numero di *XlaTangente*), qualche anno dopo la pubblicazione del primo articolo di Artin, viene spiegato lo stretto legame che esiste tra trecce e nodi; poi, con il passare degli anni, il loro studio matematico "sconfina" in diversi campi: dalla topologia all'algebra e in particolare alla teoria dei gruppi. Più recentemente, ci si è inoltrati nello studio degli algoritmi che le generano e se ne sono trovate applicazioni alla crittografia. Ormai, le situazioni in cui si ritrovano le trecce sono le più varie: dalla biologia (studio del DNA) alla robotica (movimento di punti nello spazio), alla fisica teorica (movimento di particelle), a...

Ma che cos'è una treccia per un matematico? Possiamo schematizzare una treccia come una collezione di curve (i fili) che collegano un numero fissato di punti scelti su due dischi paralleli, come in figura 2. Fissare i punti equivale ad annodare la treccia alle estremità, per evitare che la parte intrecciata possa "sfuggire". Richiediamo inoltre che i fili abbiano un "senso di marcia", cioè scorrano sempre dall'alto verso il basso, senza tornare indietro, e che non si intersechino mai, cioè non passino uno dentro l'altro (sebbene possano passare uno davanti o dietro all'altro).

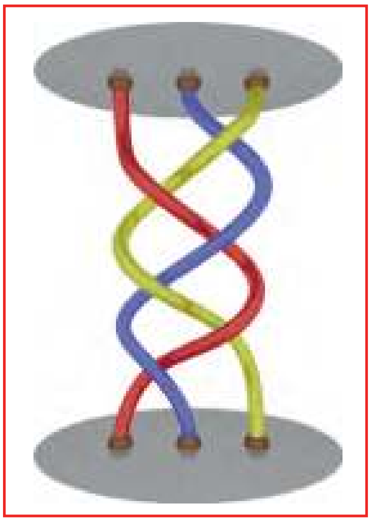


Figura 2. La treccia di figura1 dopo sei incroci

COME DESCRIVERE UNA TRECCIA?

Vorremmo ora codificare ogni treccia tramite una sequenza di simboli, in modo che, leggendo la sequenza, chiunque conosca il codice sia in grado di riprodurre la treccia descritta: come a un pianista basta leggere le note sul pentagramma per capire quali tasti deve premere e quanto a lungo, così a un "treccista" basterà leggere i nostri simboli per sapere quali fili intrecciare e come.

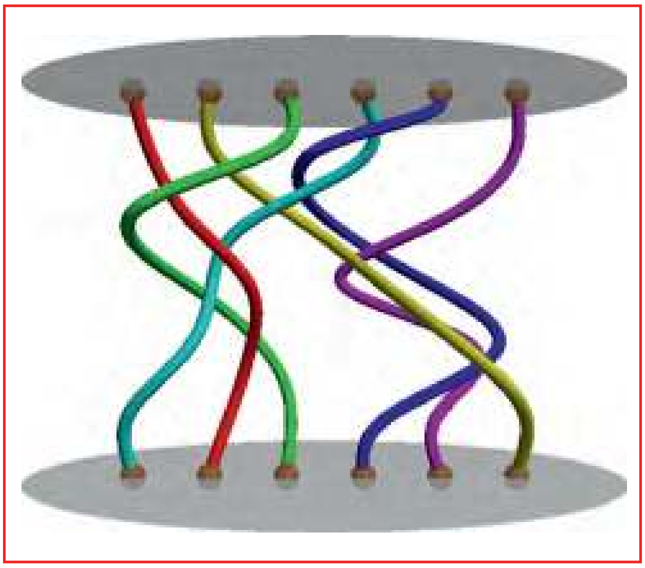


Figura 3. Una treccia disordinata: ha degli incroci alla stessa altezza e un incrocio tra tre fili

Nel nostro esempio la treccia è composta da tre fili. Per descriverla, come abbiamo fatto sopra, è sufficiente tener conto del modo in cui i fili passano uno sopra l'altro: prima il filo a destra, il terzo, passa sopra al filo al centro, il secondo. Quindi il filo a sinistra, il primo, passa sopra al filo che sta ora al centro.
La treccia in figura 2 è costruita in questo modo: gli incroci avvengono in modo ordinato, dall'alto in basso, ogni incrocio coinvolge due fili adiacenti ed è ben distinto dagli altri. In realtà in tutte le trecce, anche in quelle più disordinate, come quella in figura 3, possiamo "muovere un po'" i fili per portare la treccia nella forma descritta in figura 2 anche se un paio di prove sono già abbastanza convincenti. Questo fatto si può dimostrare in modo rigoroso, anche se...

Possiamo quindi associare un simbolo a ogni tipo di incrocio, in modo da descrivere ogni treccia tramite la sequenza di simboli che rappresenta i suoi incroci o, come si dice, tramite la *parola* che la rappresenta. Chiamiamo σ_1 l'incrocio in cui il primo filo passa dietro al secondo e σ_2 quello in cui il secondo filo passa dietro al terzo. La numerazione dipende dalla posizione occupata dai due fili al momento dell'incrocio. Questi incroci, in cui un filo passa dietro a quello immediatamente alla sua destra, sono detti positivi.

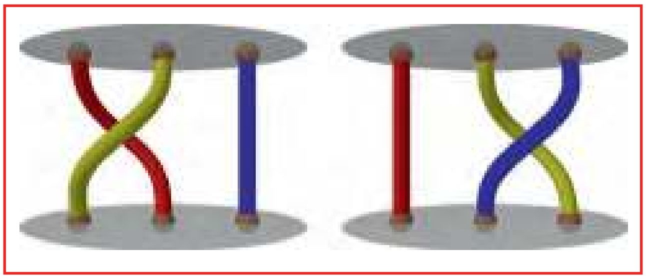


Figura 4. Gli incroci positivi σ_1 e σ_2

C'è un altro tipo di incrocio, chiamato negativo: quando il primo filo passa davanti al secondo, scriveremo σ_1^{-1}, mentre σ_2^{-1} descriverà la situazione in cui il secondo filo passa davanti al terzo.

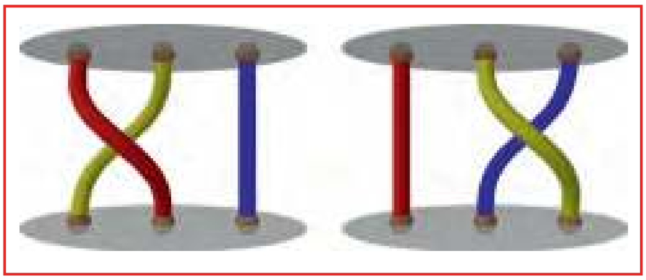


Figura 5. Gli incroci negativi σ_1^{-1} e σ_2^{-1}

Se la treccia ha più di tre fili, possiamo continuare nello stesso modo: per ogni i, σ_i sarà l'incrocio in cui l'i-esimo filo passa dietro all'(i + 1)-esimo, mentre σ_i^{-1} quello in cui l'i-esimo filo passa davanti all'(i + 1)-esimo. Nelle trecce con n fili possiamo trovare $n - 1$ tipi di incroci positivi e altri $n - 1$ tipi di incroci negativi.

Emil Artin

Nato a Vienna, fino a 16 anni non mostra particolare interesse per la matematica: gli piace la chimica e ama soprattutto la musica. Poi come spesso accade, alcuni buoni incontri a scuola gli fanno cambiare idea e il suo interesse si sposta verso la "regina delle scienze". Così, nel 1916, in piena Prima guerra mondiale, incomincia a studiare matematica all'Università di Vienna. Poco dopo però viene arruolato nell'esercito del suo Paese e resterà soldato sino alla fine della guerra.

Nel gennaio 1919 riprende a studiare, a Lipsia, nel 1920-21 passa a Gottinga e nel 1922 approda ad Amburgo dove resta fino al 1938, quando l'aver sposato una sua studentessa ebrea gli costa l'allontanamento dalla cattedra universitaria (Nel 1937 la discriminazione razziale contro gli Ebrei è stata estesa ai coniugi di Ebrei).

Ha però fatto a tempo a diventare uno dei protagonisti – insieme a Emmy Noether e Alexander Ostrowski – di "uno dei grandi periodi dell'algebra", come lo chiamerà un altro grande algebrista, Bartel Leendert van der Waerden (1903- 1996), un periodo in cui viene costruita un'algebra nuova, molto più generale di quella nota fino a quel momento, un'algebra che analizza strutture astratte invece che numeri e oggetti concreti. E in realtà, anche se in queste pagine di *XlaTangente* Artin è ricordato come colui che ha sviluppato la teoria della trecce, qualunque studente universitario di matematica lo conosce soprattutto come algebrista: dagli anelli artiniani (gli anelli che soddisfano la condizione di minimo sugli ideali) ai gruppi semplici finiti, alla teoria di Galois, alla teoria dei campi , sono tanti gli snodi in cui si coglie la sua presenza.

Nel 1958 ritorna in Germania dopo l'esilio negli Stati Uniti (dal 1946 al 1958 ha insegnato a Princeton) e nel 1962 muore ad Amburgo.

Emil Artin (1898-1962)

Se intrecciamo un incrocio positivo σ_i e immediatamente dopo il suo corrispondente incrocio negativo σ_i^{-1}, possiamo deformare questa parte di treccia trasformandola in un tratto senza incroci. Anche eseguire prima σ_i^{-1} e poi σ_i è come non aver eseguito alcun intreccio. Ed è proprio questo il motivo per cui abbiamo scelto il simbolo σ_i^{-1} e abbiamo chiamato questo incrocio l'*inverso* di σ_i.

Ora possiamo descrivere la treccia di figura 1: essa sarà $\sigma_2\ \sigma_1^{-1}\ \sigma_2\ \sigma_1^{-1}\ \sigma_2$ ... In questo caso, stiamo alternando incroci positivi e negativi. Fermandoci dopo sei incroci, la treccia che otteniamo è quella in figura 2, descritta dalla parola $\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$, che possiamo riscrivere in modo più breve come $(\sigma_2\sigma_1^{-1})^3$.

In realtà, questa treccia tradizionale è molto particolare! La usiamo come guida per raccontare qualche curiosità sulle trecce.

Le trecce pure

Se per intrecciare la treccia $(\sigma_2\sigma_1^{-1})^3$ usiamo cordicelle di tre colori diversi, vediamo che, arrivati in fondo, ogni cordicella è tornata al proprio posto, come in figura 2: nel nostro disegno la cordicella rossa parte a sinistra e arriva a sinistra, quella blu parte e arriva al centro, mentre quella gialla parte e arriva a destra.

Una treccia di questo tipo si chiama *treccia pura*. Naturalmente non tutte le trecce sono pure! Ad esempio, se intrecciando la stessa treccia ci fermiamo prima di aver eseguito sei incroci, evidentemente la treccia ottenuta non è pura.

Come possiamo descrivere la proprietà che caratterizza le trecce pure? In generale, prendiamo una treccia a n fili. Guardiamo i fili in alto e numeriamoli con i numeri da 1 a n, partendo da quello in alto a sinistra e spostandoci verso destra. Seguiamo ogni filo fino in fondo alla treccia e scriviamo il suo numero all'estremità inferiore. Leggendo questi numeri da sinistra a destra otteniamo una sequenza formata ancora dai numeri da 1 a n, ma non necessariamente nel loro ordine iniziale: una permutazione che codifica la posizione di arrivo di ogni filo. Ad esempio, come si può vedere dalla figura 6, la treccia $\sigma_2\sigma_1^{-1}$, che è solo la prima parte della nostra treccia, induce la permutazione (3,1,2).

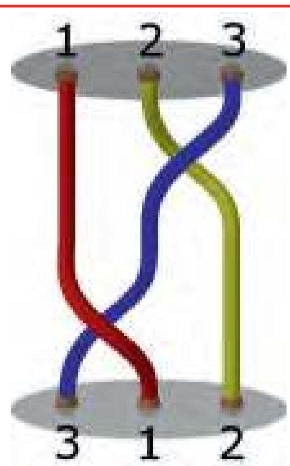


Figura 6: Alla treccia $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ si associa la permutazione (3,1,2)

Ad ogni treccia viene associata un'unica permutazione, ma il viceversa è falso: ci sono trecce diverse che danno origine alla stessa permutazione. Ad esempio, sia $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ che $\sigma_2\sigma_1$ (con entrambi gli incroci positivi) danno la stessa permutazione, benché si tratti di trecce differenti. Ciò accade perché nella permutazione non è contenuta tutta l'informazione su come è fatta una treccia: non dice quale filo passa sopra e quale sotto, ma solo quali fili si scambiano tra loro.

Nel caso delle trecce pure la sequenza finale di numeri è uguale a quella iniziale o, detto altrimenti, la permutazione associata alla treccia è la permutazione banale, quella che non muove alcun numero. Questa condizione è per i matematici la definizione di treccia pura.

Gli anelli borromei

Un modo per passare da una treccia a un nodo è la chiusura, che consiste nel collegare il capo superiore di ogni filo con il capo inferiore del filo nella posizione corrispondente, usando delle nuove cordicelle che non si intrecciano (disegnate in grigio nella figura 7). Otteniamo così un nodo, magari a più componenti. Ad esempio, chiudendo la treccia di due fili rappresentata da σ_1^3 otteniamo un nodo trifoglio: se i disegni non vi sembrano abbastanza convincenti, provate a fare un tentativo con una vera cordicella e vi convincerete.

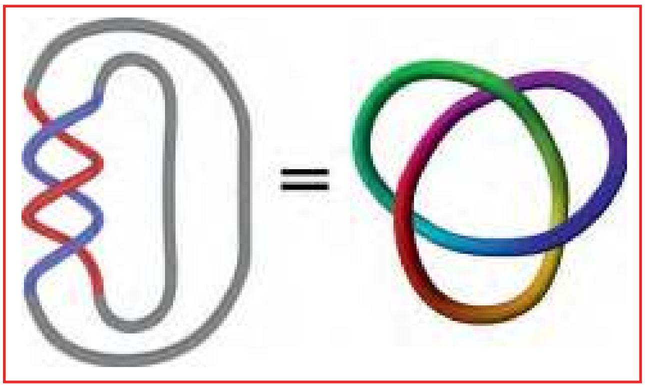


Figura 7. Chiudendo la treccia σ_1^3 otteniamo un nodo trifoglio

D'altro canto anche con la treccia di tre fili $\sigma_1^3\sigma_2$ otteniamo lo stesso nodo. Provare per credere! Eppure le due trecce sono sicuramente diverse tra loro, dato che hanno un diverso numero di fili. Invece chiudendo σ_1^2, che sembra più semplice della precedente, otteniamo un nodo più complesso, in un certo senso, perché ha due componenti allacciate tra loro, invece di una sola. Questo nodo, disegnato in figura 8, è chiamato *link di Hopf*.

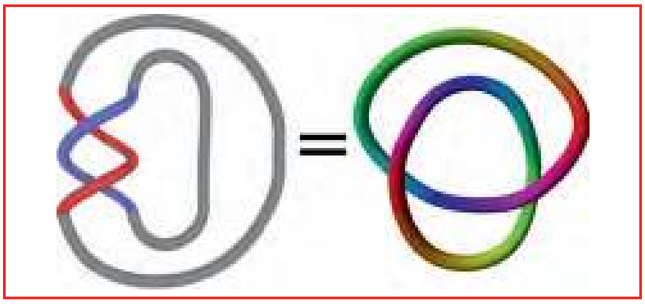


Figura 8. Chiudendo la treccia σ_1^3 otteniamo un *link di Hopf*

Dunque è abbastanza facile ottenere un nodo da una treccia, ma non è scontato prevedere quale nodo provenga da una data treccia o capire se due trecce diano origine allo stesso nodo. Questo problema è stato risolto per la prima volta a metà del secolo scorso; il risultato è oggi noto con il nome di teorema di Markov, e ne riparleremo nel prossimo numero di *XlaTangente*.

Proviamo ora a chiudere la nostra treccia tradizionale $(\sigma_2\sigma_1^{-1})^3$. Dato che è una treccia pura, in cui ogni filo parte e arriva nella stessa posizione, ogni filo verrà richiuso con se stesso e darà origine a una componente distinta. Avremo quindi un nodo a tre componenti, che è conosciuto con il nome di "anelli borromei" (figura 9), perché è presente nello stemma della casa nobiliare lombarda.

Questo è un nodo molto particolare: proviamo a scegliere una componente qualsiasi e a cancellarla. Le due componenti rimanenti sono slacciate! E ciò succede qualunque sia la componente che decidiamo di cancellare. Un nodo con questa proprietà viene chiamato *brunniano*. Analogamente, dalla nostra treccia possiamo cancellare un filo a scelta: allora la treccia che otteniamo è sciolta, cioè possiamo muovere i suoi fili, senza che si attraversino l'un l'altro, mantenendo gli estremi fissati, in modo da semplificare tutti gli incroci! Una treccia di questo tipo viene chiamata *treccia brunniana*.

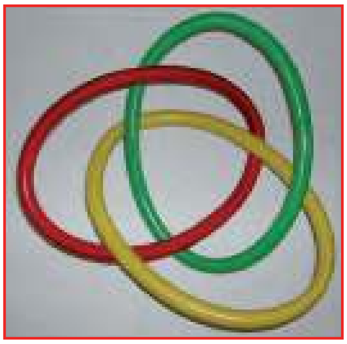
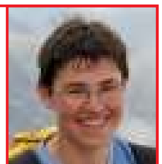


Figura 9: Chiudendo la treccia pura $(\sigma_2\sigma_1^{-1})^3$ otteniamo gli anelli borromei

Fin qui, abbiamo visto che ogni treccia si può decomporre in movimenti "elementari" e come da una treccia si può passare a un nodo, ora sorge spontanea una domanda: perché le trecce sono così importanti in matematica? E in particolare, come è possibile fare dei "calcoli" con le trecce? Lo scopriremo nel prossimo numero di *XlaTangente*!

Ester Dalvit
Laureata in Matematica presso l'Università degli Studi di Trento e quella di Tuebingen in Germania, con un progetto di doppia laurea. Nel 2011, ha conseguito il titolo di dottore di ricerca Matematica con indirizzo in Comunicazione e Didattica, e attualmente lavora presso il Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica dell'Università degli Studi di Trento.
dalvit@science.unitn.it



Cinture e braccialetti

La treccia $(\sigma_2\sigma_1^{-1})^3$ può essere costruita anche in un modo particolare. Prendiamo un rettangolo di pelle o di stoffa (o anche di carta, ma serve un po' più di delicatezza per evitare di romperlo) con un lato molto più lungo dell'altro e al cui interno abbiamo praticato due tagli paralleli al lato lungo. Abbiamo così tre strisce, fissate tra loro alle estremità: detto con altre parole, abbiamo la treccia cosiddetta banale, quella che non contiene alcun incrocio.
Muovendo una delle estremità e spostandola attraverso i due tagli paralleli è possibile ottenere la nostra treccia-modello! Questo procedimento è ben noto agli artigiani del cuoio, che lo usano per intrecciare cinture o braccialetti di pelle come quello in figura 10.

Non è semplicissimo realizzare la treccia in questo modo: provare per credere!
Anche se è ottenuta a partire dalla treccia banale muovendo i fili, la nostra treccia è diversa da essa, perché i movimenti necessari per realizzarla possono cambiare il tipo di treccia.

Figura 10: Questa treccia si può ottenere da un rettangolo di pelle in cui siano stati praticati due tagli paralleli