

Xonline percorsi nella matematica **la tangente**

n. 1
ottobre 2014

Un anno di cristallografia

W i giochi olimpici!

Il sistema periodico

■ **Direzione**

Gilberto Bini direttore responsabile

Comitato scientifico

■ **Anna Asti**

Paolo Bellingeri
Silvia Benvenuti
Giorgio Bolondi
Enea Bongiorno
Marina Cazzola
Maria Dedò
Simonetta Di Sieno
Giovanni Naldi
Giusy Sessa
Carlo Toffalori

■ **Redazione**

Anna Betti
Giovanna Dimitolo
Paola Testi Saltini

■ **Editore**

© Università degli Studi di Milano - Centro “matematita”



■ **Grafica e impaginazione**

Giovanni Querques
info@querques.it

■ **Segreteria di redazione**

Dipartimento di Matematica “F. Enriques”
Università degli Studi di Milano
Via Saldini 50, Milano
E-mail: redazione@perlatangente.it
Fax: 02 50316090
www.xlatangente.it

Autorizzazione del Tribunale di Milano del 14 maggio 2014
Registro n. 166

■ **Hanno collaborato a questo numero**

Vincenzo Balbo
Alessia Cassetti
Iacopo Frattini
Renato De Leone
Massimo Moret
Linda Pagli
Silvia Rizzato
Roberta Sagripanti
Antonio Salmeri

Traduzioni a cura della Redazione

Illustrazione della rubrica punto fisso di Luca Usai

La rubrica La via delle immagini è a cura di Paola Gallo e Giovanni Querques

XlaTangente pubblica sia lavori su invito dei redattori sia materiale inviato alla redazione – che si riserva la decisione di pubblicarlo. La pubblicazione è subordinata a una revisione redazionale. La responsabilità del contenuto scientifico di ogni lavoro è esclusivamente degli autori. I lavori vanno inviati su cd-Rom alla segreteria di redazione, accompagnati da una versione cartacea e indicando nella prima pagina titolo, nome e cognome del/degli autore/i (per esteso), eventuale Istituto di appartenenza, indirizzo, numero di telefono, numero di fax e indirizzo e-mail a cui spedire le bozze ed eventuali comunicazioni.

La rivista può essere *scaricata* e *stampata* gratuitamente dal sito www.xlatangente.it.

Copie cartacee possono essere realizzate a richiesta. Per ulteriori informazioni scrivere all'indirizzo redazione@perlatangente.it.

Per quanto riguarda le fonti iconografiche e letterarie, l'editore è a disposizione degli aventi diritto che non è riuscito a contattare.

Questo numero è stato chiuso in redazione il 30 settembre.

1
 ottobre
 2014



Immagine di copertina
 di Giovanni Querques

sommario

- 5** [editoriale](#)
- 6** [punto fisso](#)
- 7** [NRICH enriching mathematics](#)
di Anna Asti
- 9** [Magia della casualità o magia della matematica?](#)
di Antonio Salmeri
- 11** [2014 Anno internazionale della Cristallografia](#)
 Un tour (virtuale) delle proposte
di Maurizio Giaffredo
- 13** [La tavola periodica](#)
di Alessia Cassetti
- 16** [La poesia di Mendeleev](#)
 La Chimica e il sistema periodico di Primo Levi
di Anna Betti
- 19** [Le reazioni di un chimico](#)
 Intervista a Vincenzo Balbo
di Anna Asti e Anna Betti
- 21** [Parola d'ordine: cristalli!](#)
 Intervista a Massimo Moret e Silvia Rizzato, crescitore
 di cristalli
di Anna Betti
- 25** [Dai cristalli ai cristalli pazzi: la strana storia chimica
 delle tassellazioni](#)
di Paolo Bellingeri
- 29** [Tutti pazzi per i cristalli](#)
di Gilberto Bini e Iacopo Frattini
- 32** [Dai cristalli alle simmetrie del cubo](#)
 Una proposta da sperimentare in classe
di Anna Asti
- 35** [Il mistero dei cristalli giganti](#)
di Antonella Testa
- 36** [Da George Orwell a Philip Dick](#)
di Linda Pagli
- 39** [La classifica finale dei giochi olimpici: una questione
 per matematici](#)
di Renato De Leone e Roberta Sagripanti
- 43** [la Via delle Immagini](#)



www.facebook.com/matematita?ref=hl

per seguirci sempre dove e quando vuoi...
per nuove amicizie con la tua stessa passione...
per tutti quelli che contano...

DON'T BE WAITING, BE SOCIAL!

twitter.com/XlaTangente_it



Pronti, partenza... via! Siamo in ritardo rispetto alle previsioni. Avremmo dovuto lanciare la nuova serie della rivista a giugno e invece siamo a ottobre! Nel frattempo, però, non siamo stati con le mani in mano ma abbiamo lavorato alla mostra "MaTeInItaly. Matematici alla scoperta del futuro" aperta fino al 23 novembre presso la Triennale di Milano (www.mateinitaly.it).

Spero che siate ugualmente contenti di inaugurare con noi la rivista *XlaTangente online*, un fascicolo telematico che può essere consultato gratuitamente sul nostro sito (www.xlatangente.it) senza abbonarsi! Per coloro che desiderano averne anche una copia cartacea, possiamo stamparla a richiesta e spedirvela: tutte le informazioni necessarie si trovano in seconda di copertina.

Il nuovo periodico sarà trimestrale con uscita a fine gennaio, aprile, luglio e ottobre. Potrete prendere parte alla sua realizzazione, perché, a mano a mano che saranno pronti, alcuni articoli verranno caricati sul sito alla sezione "In preparazione" già prima dell'uscita del fascicolo telematico che li raccoglie, il quale conterrà però, ogni volta, altri pezzi nuovi.

Per noi della Redazione è una gioia continuare a proporvi fatti curiosi della matematica e delle sue contaminazioni con altre scienze. Per questo motivo e per moltiplicare i festeggiamenti, il numero, che vi apprestate a leggere, è dedicato alla cristallografia, visto che nel 2014 ricorre il centesimo anno dalla nascita di questa disciplina.

Nell'articolo "2014, Anno internazionale della Cristallografia", Maurizio Giaffredo racconta un *tour* virtuale di alcune proposte delle iniziative organizzate in tutto il mondo per le celebrazioni dei cristalli. Numerosi sono i legami fra le strutture cristalline e la matematica: se ne accenna nell'articolo "Tutti pazzi per i cristalli" di Gilberto Bini e Iacopo Frattini. E dai cristalli il passaggio ai quasi-cristalli è immediato: ce ne parla un esperto e una nostra vecchia conoscenza: Paolo Bellingeri.

Si può pensare di spiegare alcuni di questi legami a scuola? Ci prova Anna Asti, nostra collaboratrice da anni e prof a tutti gli effetti, con l'articolo "Dai cristalli alle simmetrie del cubo: una proposta da sperimentare in classe", in cui si parla del gruppo delle simmetrie del cubo, sulla base di alcune attività sperimentate con le classi durante il progetto PLS (Progetto Lauree Scientifiche) e nei laboratori del Centro "matematita".

Parlando di cristallografia, viene naturale richiamare alcune nozioni di chimica, come una breve storia della tavola periodica degli elementi – un bell'esempio di classificazione – che si può vedere dal vivo al Planetario di Milano "Ulrico Hoepli". Ce lo racconta Alessia Cassetti nell'articolo "La tavola periodica". I nomi degli elementi chimici riportano alla mente il libro "Il sistema periodico" di Primo Levi, che viene presentato ai lettori (o riproposto a chi già lo conosce) da Anna Betti. Infine, parlando di chimica, non potevano mancare le reazioni... nell'intervista a Vincenzo Balbo, in cui si parla ancora dell'importanza della matematica nella professione del chimico.

E se a qualche lettore non piace la cristallografia? Lo accontentiamo senz'altro con l'articolo di Linda Pagli e con quello di Renato De Leone e Roberta Sagripanti: il primo sulla sicurezza dei dati e il secondo sui Giochi Olimpici. E poi altro ancora, come l'articolo del professor Antonio Salmeri e la descrizione del sito NRICH, la recensione del film "Il mistero dei cristalli" a cura di Antonella Testa e, anche in questa nuova serie, la Via delle Immagini!

Come vedete, anzi come leggerete, ce n'è per tutti i gusti!

Buona lettura,
Gilberto Bini

Punto fisso



a cura di LUCA USAI



CARA,
ECCO IL REGALO
PER IL NOSTRO
ANNIVERSARIO!

MA, TESORO,
QUESTO NON È IL DIAMANTE
CHE TI AVEVO CHIESTO!
È SOLO UN PEZZO
DI CARBONE!?!

SUVVIA, È
PRATICAMENTE LA STESSA COSA!
DEVI SOLO DISPORRE GLI ATOMI IN
MANIERA GEOMETRICAMENTE
REGOLARE E IL GIOCO È FATTO.
NON POSSO MICA FARE
TUTTO IO...

LUCA USAI 2014

Luca Usai è illustratore e vignettista.
Collabora con le case editrici Disney Italia e Piemme

NRICH

enriching mathematics

di ANNA ASTI

Con una media di 15000 accessi al mese nell'ultimo anno, NRICH si attesta come uno dei siti più visitati che forniscono agli insegnanti risorse per l'aggiornamento e la formazione, nonché come una ricca miniera di attività interessanti per tutti. Provate a farvene un'idea andando su <http://nrich.maths.org/frontpage>

NRICH è un progetto con quartier generale nel centro di Scienze Matematiche dell'Università di Cambridge. Fa parte del progetto più ampio *Millenium Mathematics Project* (<http://mmp.maths.org/>) e il suo scopo è quello di rendere ricca e stimolante l'esperienza matematica di tutti coloro che la vivono quotidianamente, siano essi studenti o insegnanti.

La serietà e l'accuratezza dei materiali offerti sono garantiti da Lynne McClure, direttore del progetto dal 2010, e dal suo *team*, costituito da esperti disciplinari specializzati nell'insegnamento nei diversi ordini di scuola.

(basta scegliere il livello scolastico e la tematica desiderata e poi inviare le soluzioni ai *Live Problems*), formulando domande e discutendo (*AskNRICH forum*). La guida per gli insegnanti precisa da subito che il *problem solving* è la strategia privilegiata, per cui non vengono proposti problemi banali, ma quelli che stimolano e provocano il "pensiero matematico".

Dalle guide si passa poi alle "case" di studenti e insegnanti... ebbene sì, su NRICH ci si sente a casa! La struttura è semplice: in alto a sinistra le attività più recenti e in basso l'ultima attività proposta, mentre sul lato destro si



La home page del Millenium Mathematics Project

Appena ci si collega al sito si trovano due guide con stili e destinatari diversi: quella per gli studenti incoraggia a immergersi nel percorso esplorando e cercando soluzioni



La home page di NRICH

trovano le collezioni (con i riferimenti al curriculum oppure ad attività interattive) e più sotto le attività che fanno tendenza.

Chi ama il “fai-da-te” e preferisce una ricerca autonoma può utilizzare il “Maths finder”, una ricerca per argomento nel ricco database.

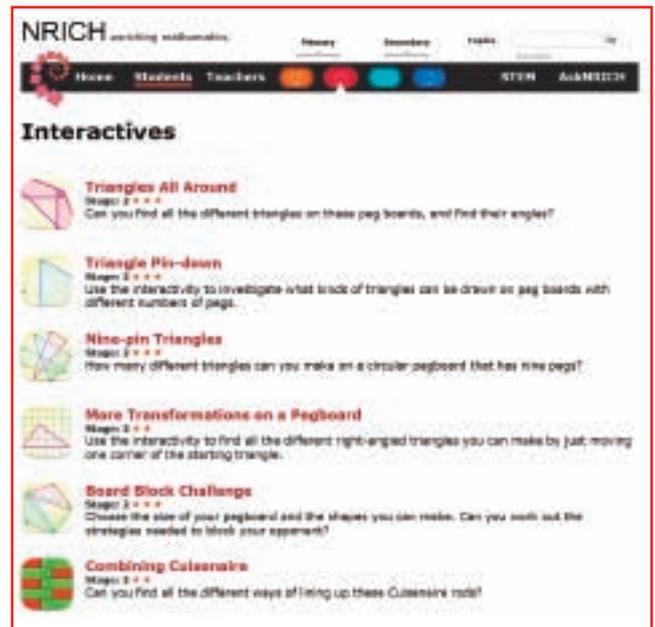
Gli articoli che sono riportati sul sito sono molto diversi tra di loro. Ve ne citiamo un paio che ci sembrano interessanti. In quello intitolato “L’uso della matematica nei giochi a computer” le varie tipologie di gioco (FPS, simulazione e strategia) vengono presentate con l’intento di mettere in evidenza le basi matematiche, cioè la geometria con vettori e traslazioni, la grafica 3D e la teoria dei grafi. Nella sezione di storia ci ha incuriosito invece “Il teorema dei quattro colori”, una lettura interessante che pone anche la questione sul fatto che siano o meno legittime le dimostrazioni effettuate con l’aiuto del computer.

Sono inoltre utili, anche se semplici, alcune animazioni interattive relative soprattutto a questioni geometriche, che vanno dall’introduzione delle geometrie non euclidee (“Quando la somma degli angoli interni di un triangolo non fa 180°”) alle rotazioni dei triangoli (“Il triangolo che rotola”). Sempre in tema di interattività, vi segnaliamo i giochi: da quelli di carte, ai bilanciamenti o a quelli di numeri.

Riteniamo che valga la pena segnalarvi anche l’attività “Discuti e scegli”, in cui si tratta di scegliere alcuni valori numerici per completare degli asserti, dopo essersi confrontati con altri, aver discusso e argomentato.

Chi preferisce, invece, le attività manuali potrebbe trovare interessante la proposta “Poliedri con gli origami intrecciati”, in cui vengono spiegati dettagliatamente (con testi, immagini e video) tutti i passaggi necessari per costruire poliedri a partire da semplici moduli base.

C’è anche una sezione piuttosto insolita nei siti web che si occupano di matematica, ed è quella dedicata alle STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics). Qui i problemi sono presentati sotto diversi punti di vista. Un esempio? “Contiamo i delfini”: si tratta di sti-



Navigando nel sito NRICH

mare quanti delfini ci sono in un oceano e per far questo ci sono riferimenti alla statistica e all’accuratezza delle stime, alla biologia marina, nonché approfondimenti e spunti per ulteriori esplorazioni. Per gli insaziabili c’è anche la sezione “Advanced STEM”, dove si possono scegliere attività che richiedono strumenti matematici leggermente più complessi. Un esempio è “Reazioni chimiche”: in chimica le velocità di reazioni complicate sono spesso approssimate usando polinomi. L’attività consiste nello studio qualitativo di queste approssimazioni per capire le caratteristiche delle reazioni (Come si avviano? Accelerano? La velocità si riduce?..).

Ma non pensiate di poter apprezzare NRICH solo con una visita veloce; il suggerimento è quello di tornarci di tanto in tanto per lasciarvi “arricchire” dalle esperienze matematiche che si rinnovano con frequenza e, se avete paura di dimenticarvene, basta che vi iscriviate alla *mailing list* o li seguiate sui principali *social network*!

Su NRICH si possono trovare decine di poster da scaricare e stampare. Ciascuno propone un indovinello matematico o una sfida. Gli insegnanti possono scaricarli e stamparli per l’utilizzo in classe. Ogni poster è collegato a un problema che contiene le indicazioni per gli insegnanti.

You Never Get A Six Poster

Stages 2 +

This poster is based on the problem [You Never Get A Six](#).

The poster is available as a [pdf](#).



The poster should automatically open in your browser.

This poster is also available as a .png image file by [clicking here](#).

Magia della casualità o magia della matematica?



di ANTONIO SALMERI

Sono sicuro che anche voi troviate sorprendente il fatto che una progressione di numeri interi consecutivi elevati al quadrato come $36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$ possa scomporsi in due parti nelle quali la somma dei primi termini è uguale alla somma dei secondi

Se poi si scopre che questo non è l'unico caso in cui ciò succede e che, per esempio, vale anche la relazione $55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$, è lecito chiedersi se si tratti di casualità, oppure se esista una legge che genera queste magiche progressioni. Ne esistono altre? Come si costruiscono? Il numero dei termini del primo membro deve sempre superare di uno i termini del secondo membro?

Per rispondere, cominciamo a fare qualche osservazione. Visto che i termini della progressione di cui si parla sono quadrati di numeri interi consecutivi, i due membri dell'uguaglianza non possono essere costituiti dallo stesso numero di termini e il numero dei termini del secondo membro non può essere maggiore del numero dei termini del primo membro.

Iniziamo dunque a esaminare il caso in cui il numero dei termini del primo membro superi di uno i termini del secondo membro: $n + 1$ addendi a sinistra, n addendi a destra, in totale $2n + 1$ addendi.

Per $n = 1$, ci sono in tutto 3 termini e, provando direttamente a fare le somme dei quadrati, si ottiene:

$$\begin{aligned}(5) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 (= 9) \\(13) &= 2^2 + 3^2 + 4^2 (= 16) \\(25) &= 3^2 + 4^2 + 5^2 (= 25) \\(41) &= 4^2 + 5^2 + 6^2 (= 36) \\(61) &= 5^2 + 6^2 + 7^2 (= 49).\end{aligned}$$

Si ha l'uguaglianza fra i due membri quando il primo termine della progressione è 3.

Per $n = 2$, si ha l'uguaglianza quando il primo termine è 10:
(365) $= 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 (= 365)$

Possiamo andare avanti per tentativi, ma ovviamente questo procedimento non dimostra l'esistenza o meno di infinite progressioni che soddisfano l'uguaglianza richiesta e,

Antonio Salmeri

Autore di numerose pubblicazioni nel campo dell'Ingegneria e della Matematica, Antonio Salmeri è dall'aprile 2011 il fondatore e uno dei curatori della rivista *online* "Euclide. Giornale di matematica per i Giovani".
salmeriantonio@tiscali.it



comunque, diventa estremamente laborioso nel caso in cui si voglia conoscere quale sia la progressione con, ad esempio, 35 termini!

Per risolvere il problema in generale, osserviamo che basta trovare per quali valori di n l'equazione

$$x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+n)^2 = (x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \dots + (x+2n)^2 \quad (1)$$

ammette radici intere e positive. Sviluppando i quadrati, si ottiene l'equazione di secondo grado a coefficienti interi

$$x^2 - 2n^2x - n^2(2n+1) = 0,$$

che ammette le due radici intere $x = n(2n+1)$ e $x = -n$.

La prima delle due soluzioni mostra l'esistenza di infinite progressioni che soddisfano l'uguaglianza richiesta per ogni intero naturale. La seconda, invece, fornisce la seguente identità:

$$(-n)^2 + (-n+1)^2 + \dots + (-1)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

A questo punto, non è poi così difficile trovare anche qual è la progressione di 35 termini, o anche di più se vogliamo. Se il primo termine è $n(2n+1)$, allora l'ultimo è dato dalla somma $n(2n+1) + 2n = n(2n+3)$. Ne ricaviamo che il numero di termini della progressione è $2n+1$. Se questo numero è uguale a 35, allora $n = 17$ e $n(2n+1) = 595$. Si ha la seguente uguaglianza:

$$(6\ 556\ 305) = 595^2 + \dots + 612^2 = 613^2 + \dots + 629^2 (= 6\ 556\ 305)$$

(18 termini) (17 termini)

In conclusione, l'esistenza di queste progressioni magiche non è mera casualità ma una delle tantissime sfaccettature della matematica e della sua "magia".

A questo punto, possiamo anche cimentarci nel calcolo del valore $S(n)$ della somma comune ai due membri in funzione di n . Prendiamo in esame gli n termini del secondo membro della (1). Si ha, successivamente, sapendo che $x = n(2n + 1)$ e quindi $x + n = 2n(n + 1)$:

$$\begin{aligned} S(n) &= [2n(n + 1) + 1]^2 + [2n(n + 1) + 2]^2 + \\ &\quad + [2n(n + 1) + 3]^2 + \dots + [2n(n + 1) + n]^2 = \\ &= 4n^2(n + 1)^2 + 4n(n + 1)(1 + 2 + 3 + \dots + n) + \\ &\quad + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \\ &= 4n^2(n + 1)^2 + 2n^2(n + 1)^2 + n(n + 1)(2n + 1)/6 = \\ &= n(n + 1)(24n^3 + 36n^2 + 14n + 1)/6 = n(n + 1)(2n + 1)(12n^2 + 12n + 1)/6, \\ &\text{ovvero:} \\ S(n) &= n(n + 1)(2n + 1)(12n^2 + 12n + 1)/6. \quad (2) \end{aligned}$$

A partire da quest'ultima relazione possiamo ritrovare i valori che avevamo già calcolato

$$\begin{aligned} S(1) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 25 / 6 = 25, \\ S(2) &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (12 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 1) / 6 = 365, \\ S(3) &= 2030, \\ S(4) &= 7230, \\ S(5) &= 19\,855, \dots \\ &\text{ma anche quello nuovo che ci interessa:} \\ S(17) &= 6\,556\,305. \end{aligned}$$

Diventa allora naturale una nuova domanda: esistono progressioni analoghe che soddisfano proprietà diverse? Per esempio, ci sono progressioni con un numero pari di termini, cioè progressioni in cui il primo gruppo ha due termini più del secondo? Seguiamo lo stesso procedimento iniziando con la successione che parte da 1 e ha 4 termini:

$$\begin{aligned} (14 =) & 1^2 + 2^2 + 3^2 < 4^2 (= 16) \\ (29 =) & 2^2 + 3^2 + 4^2 > 5^2 (= 25) \\ (50 =) & 3^2 + 4^2 + 5^2 > 6^2 (= 36) \end{aligned}$$

Andando per tentativi o, come potremmo dire, procedendo in maniera sperimentale, non troviamo alcuna uguaglianza di questo tipo. Allora proviamo a modificare l'ipotesi iniziale e al posto di interi consecutivi cerchiamo "numeri (eventualmente reali) che differiscono di una unità".

Con 4 termini, cercare questa successione implica trovare la soluzione dell'equazione:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2.$$

Sviluppando i quadrati, si perviene all'equazione $x^2 = 2$, e quindi $x = \sqrt{2}$, che è compreso fra 1 e 2. La successione è pertanto la seguente:

$$(11 + 6\sqrt{2} =) (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} + 2)^2 = (\sqrt{2} + 3)^2 (= 11 + 6\sqrt{2}).$$

Con 6 termini, l'equazione da risolvere è data da

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 = (x + 4)^2 + (x + 5)^2$$

per la quale si ottiene $x = (3 + \sqrt{63})/2 \approx 5,4686\dots$

A questo punto, si intuisce che è possibile costruire pro-

gressioni di quadrati di numeri di vario tipo. Ad esempio, se i numeri sono pari, tali progressioni sono infinite. Qui di seguito ne riportiamo alcune che si ottengono raddoppiando i termini delle progressioni già trovate:

$$\begin{aligned} 6^2 + 8^2 &= 10^2 \\ 20^2 + 22^2 + 24^2 &= 26^2 + 28^2 \\ 42^2 + 44^2 + 46^2 + 48^2 &= 50^2 + 52^2 + 54^2 \end{aligned}$$

Incredibilmente, non esistono progressioni di numeri dispari al quadrato!

Per concludere, vi voglio dire chi ha trovato queste "magiche" progressioni. Non io, purtroppo: ne sarei stato molto orgoglioso!

In una riunione della Sezione Ligure della Mathesis, tenuta in un'aula del R. Istituto Tecnico Vittorio Emanuele II di Genova il 18 marzo 1938, il presidente prof. Gino Loria – a conclusione della serata nella quale era stata discussa la proposta di un concorso – richiamò l'attenzione dei convenuti sulle identità che abbiamo visto e che erano state ottenute quasi sperimentalmente da un collaboratore degli *Scripta Mathematica* estendendo la nota relazione pitagorica $3^2 + 4^2 = 5^2$ e osservò che potevano essere ricavate impostando semplici equazioni di II grado. Nel 1940, il prof. Enrico Ducci ha pubblicato, in una nota su *Il Bollettino di Matematica*, il valore della loro somma.



La copertina del N. 1 di *Scripta Mathematica*, A Quarterly Journal published by Yeshiva College

Di quale concorso s'era discusso nella riunione? Del "Premio Gino Loria" che richiama un triste episodio della nostra vita ed è certo il più strano concorso della storia della matematica: è stato bandito dallo stesso matematico in due società diverse a distanza di diciassette anni... ma questa è un'altra storia e ve la racconterò un'altra volta!

Enrico Ducci (Fermo, 15 maggio 1864 – Napoli, 29 luglio 1940). Laureatosi nel 1887 a Napoli, si occupò soprattutto di questioni legate all'insegnamento della Matematica. L'articolo di cui si parla qui sopra fu l'ultimo suo lavoro.

Gino Benedetto Loria (Mantova, 19 maggio 1862 – Genova, 30 gennaio 1954). Si laureò nel 1883 all'Università di Torino, ove ebbe come maestri Angelo Genocchi ed Enrico D'Ovidio. Dal 1886 fino al 1935, anno del suo collocamento a riposo, insegnò Algebra e Geometria Analitica all'Università di Genova. Nel 1895 fu eletto presidente della Sezione Ligure Mathesis, appena fondata. Oggi è ricordato soprattutto per il suo contributo allo sviluppo degli studi di Storia della matematica in Italia; molti suoi libri sono stati tradotti in altre lingue, soprattutto in tedesco. Un asteroide (2756 Ginoloria) porta il suo nome.

2014

Anno internazionale della Cristallografia

Un tour (virtuale) delle proposte

Saline di Trapani, raccolta del sale

di MAURIZIO GIAFFREDO

Il 2014 è l'Anno Internazionale della Cristallografia, la disciplina che studia i cristalli e che costituisce il fondamento di una quantità impressionante di risultati scientifici, ottenuti nell'arco di tutto il XX secolo. Tra gli altri, spiccano gli esperimenti dei primi anni '50, che portarono alla scoperta della struttura a doppia elica del DNA

Per chi è curioso di “fatti” e “storie” della scienza, l'anno della cristallografia è un'ottima occasione per (ri)scoprire una scienza che spesso rimane in secondo piano, ma che è

ricca di connessioni a concetti profondi della geometria (motivo per il quale noi di *XlaTangente* siamo “naturalmente” interessati al tema) e che è capace di proporre scoperte tanto importanti quanto affascinanti. In effetti, quest'anno, in tutto il mondo stanno svolgendosi conferenze, mostre e convegni e anche la rete pullula di notizie.



La home page del sito IYCr2014.it dedicato all'Anno internazionale della Cristallografia

Per cercare di mettere ordine nel *mare magnum* delle iniziative, sono nati due siti *web* ad hoc: IYCr2014.org e il suo “gemello” (totalmente dedicato all'Italia) IYCr2014.it. Una rapida occhiata alla versione internazionale basta per rendersi conto della quantità di eventi organizzati: ogni singolo giorno si contano non meno di una decina di proposte tra le quali scegliere. Particolarmente interessante è la sezione *partecipate*, che ospita un concorso fotografico e un concorso di crescita dei cristalli, rivolto alle scuole.

Anche la versione nostrana presenta un nutrito ventaglio di iniziative, segno che la comunità dei cristallografi italiani non è rimasta con le mani in mano. A fianco del calendario degli eventi, il sito propone una raccolta di luoghi interessanti dal punto di vista cristallografico che è

possibile vistare: dalle saline di Trapani alle Dolomiti, passando per Castel del Monte in Puglia, Castel Sant'Angelo a Roma e la Basilica di Sant'Ambrogio a Milano.

Molto ricca è anche la sezione delle curiosità, che raccoglie approfondimenti e materiale didattico a disposizione degli insegnanti. Una chicca: gli esperti che collaborano con IYCr2014.it stanno scrivendo un libro destinato ai docenti delle scuole superiori e a chiunque rimanga affascinato dal mondo dei cristalli. Al momento, nell'apposita area del sito web, è possibile scaricare un saggio di uno dei suoi capitoli.

Noi ci limitiamo a riassumervi i vari appuntamenti. In tutta Italia si sono tenute e si terranno conferenze e seminari, in gran parte rivolte agli esperti del settore: ricercatori, studiosi e aziende.

Non mancano tuttavia proposte pensate per i non addetti ai lavori: per esempio, si è conclusa i primi di marzo la mostra *Cristalli!*, curata dai ricercatori dell'Università di Padova. Il percorso guida il visitatore attraverso la storia, le tecniche di studio e l'osservazione dei cristalli. Chi si è perso la mostra a Padova ha potuto vederla allestita a Milano: l'Università degli Studi di Milano, in collaborazione con il Consiglio Nazionale delle Ricerche e l'Associazione Italiana di Cristallografia, ha infatti deciso di ospitarla nella sede centrale di via Festa del Perdono. Il 12 giugno si è tenuta la cerimonia di presentazione, con un pomeriggio denso di interventi. La stessa mostra è stata allestita dal 1° gennaio anche a Como, dove è rimasta sino al 28 settembre; dal 2 settembre al 3 ottobre invece la si è potuta visitare ad Arcavacata di Rende (CS), presso l'Aula Magna dell'Università della Calabria.

A coloro che hanno la possibilità di viaggiare consigliamo una visita al *MiMa*, il museo dei minerali e della matematica di Oberwolfach (Germania). La struttura è situata nel cuore della Foresta Nera e ospita – oltre a una collezione di minerali unica al mondo – una sezione dedicata alla cristallografia e alla simmetria. Gli strumenti interattivi degli *exhibit* consentono di fare un viaggio all'interno delle strutture di quarzo, fluorite e diamante. Una volta a Oberwolfach, però, non è possibile andare via senza fermarsi ad ammirare i pannelli della mostra *IMAGINARY*: un'esperienza di visualizzazione e interazione con oggetti matematici che non ha uguali.



Margherita di Savoia, le Saline

Chi non può o non vuole spostarsi può invece "assaggiare" la cristallografia stando comodamente seduto sul divano di casa propria (oppure tra i banchi di scuola), godendosi ad esempio il documentario *Cristallografia – La scienza dell'ordine atomico*, realizzato a scopo divulgativo dai ricercatori dall'Istituto di Cristallografia (CNR) di Bari. Il filmato, liberamente accessibile da YouTube, dura 30 minuti, presenta le tappe storiche fondamentali e si occupa di illustrare la "giornata tipo" di un cristallografo, facendo emergere il ruolo centrale di tale disciplina nelle scienze chimiche e biologiche.

Chi desidera approfondire gli argomenti e non ha paura dell'inglese, può iscriversi gratuitamente a *The Fascination of Crystals and Symmetry* (alla lettera *Il Fascino dei Cristalli e della Simmetria*), il corso universitario online tenuto dal dott. Frank Hoffmann in collaborazione con il dott. Michael Sartor e il prof. Michael Fröba (Università di Amburgo). Gli studenti vengono guidati in un'introduzione alla cristallografia, con un particolare riferimento agli aspetti legati alla simmetria.

Per esaltare il fascino della scoperta dell'universo dei cristalli, i docenti evitano di usare un formalismo pesante e si lanciano in una sperimentazione a tutto tondo: dall'utilizzo di poesie per introdurre i concetti a un massiccio invito all'utilizzo di *software ad hoc* per l'esplorazione delle strutture cristalline. Le lezioni sono suddivise in piccoli *clip* video tematici (ciascuno con la possibilità di attivare i sottotitoli), intervallati da *quiz* di verifica sui contenuti presentati. Chi riesce a completare correttamente almeno l'80% dei *quiz* entro la fine del corso riceve un attestato di partecipazione.

Per chi ha un profilo *facebook*, c'è anche la pagina *Crystal-MOOC* (alla quale possono accedere tutti, anche i non iscritti al corso). Le immagini, i collegamenti a pagine web per gli approfondimenti e le ultime strabilianti notizie dal mondo della ricerca sono selezionati direttamente dal dott. Hoffmann e sono uno più stimolante dell'altro.

Per chi è già esperto in materia di cristalli, infine, l'International Union of Crystallography (IUCr) ha dato vita ad una rivista online che si propone di raccogliere articoli di alto profilo scientifico: *IUCrJ*. La rivista è gratuita per i lettori, mentre gli autori sono tenuti a pagare una somma di 1000 dollari per coprire i costi di produzione, di *peer review* e di mantenimento del sito web. Il materiale è rilasciato con licenza *Creative Commons Attribution*: chiunque citi fonte e autore (che non cede il *copyright* alla rivista, ma mantiene i diritti) può riutilizzare e copiare il materiale.

Potremmo andare avanti per pagine e pagine a citare iniziative ed eventi, ma ci fermiamo qui con un invito: non lasciatevi sfuggire l'occasione di questo fine d'anno speciale; i cristalli hanno tanto da regalare anche ai matematici.

Maurizio Giaffredo

È studente di Matematica presso l'Università degli Studi di Milano, appassionato di geometria e dintorni. Interessato, tra gli altri, anche agli aspetti divulgativi della matematica, collabora con il Centro "matematita".
maurizio.giaffredo@gmail.com



© Università degli Studi di Milano - Centro "matematita"

Foto di Deblu68, Wikipedia

La tavola periodica

di ALESSIA CASSETTI

Quando si varca la soglia del Planetario di Milano, si è immediatamente attratti dalla rappresentazione a muro della tavola periodica di Mendeleev, in cui sono classificati tutti gli elementi presenti in natura e gli elementi artificiali sinora prodotti dall'uomo

Il nome della tavola parla di Dmitrij Ivanovič Mendeleev (1834-1907), un chimico russo che deve la sua gloria proprio all'organizzazione degli elementi secondo un sistema che lui stesso chiamava "la legge periodica".

C'è da dire che altri scienziati, in periodi precedenti, avevano già lavorato all'organizzazione degli elementi: ognuno di loro aveva dato un contributo, poi utilizzato dagli studiosi delle generazioni successive.

Contemporaneo di Mendeleev è invece il tedesco Julius Lothar Meyer (1830-1895), il quale era arrivato indipendentemente, e all'insaputa dello scienziato russo, a conclusioni analoghe. Da un punto di vista cronologico, Meyer fu preceduto di qualche mese da Mendeleev, ma, fortunatamente, anche il suo contributo fu riconosciuto dalla Royal Society, che nel 1882 assegnò la Davy Medal a entrambi gli studiosi.

Proprio come Meyer, Mendeleev utilizzò, come criterio per cercare di attribuire un ordine agli elementi, la massa atomica, concentrandosi anche sulle proprietà degli elementi chimici. Dispose gli elementi (quelli noti allora erano 63) in ordine di massa atomica crescente, da sinistra verso destra, incolonnando uno sopra all'altro, in "famiglie chimiche", gli elementi con proprietà simili. Per esempio potassio, rubidio e cesio, tre metalli che reagiscono violentemente con l'acqua, erano disposti nella stessa colonna o gruppo.

Mendeleev era così convinto del proprio metodo da lasciare

uno spazio vuoto nella tavola quando le proprietà di un elemento lo rendevano appartenente a un gruppo non immediatamente successivo a quello degli elementi precedenti.

Egli ipotizzò che gli spazi rimasti vuoti nel periodo sarebbero stati occupati da elementi allora sconosciuti, dei quali indicò le caratteristiche fisiche e chimiche che avrebbero dovuto possedere. In particolare, lasciò vuoti gli spazi sotto il boro, l'alluminio e il silicio e chiamò questi elementi rispettivamente "eka-boro", "eka-alluminio", "eka-silicio". In effetti, alcuni anni dopo furono scoperti gli elementi gallio (1875), scandio (1876) e germanio (1886) che possedevano proprietà analoghe a quelle previste per l'eka-boro, l'eka-alluminio e l'eka-silicio. Dopo queste conferme, il sistema periodico di Mendeleev conquistò una tale autorevolezza che, quando venivano scoperti nuovi elementi, diventava prioritaria la loro collocazione nella tavola periodica.

Pochi anni dopo, la scoperta dei "gas nobili" (elio, argon, neon, kripton e xeno) portò Mendeleev ad aggiungere un nuovo gruppo alla tavola periodica, cioè una colonna a destra delle sette da lui indicate e costituita da elementi (gas) che avevano scarsa tendenza a reagire con gli altri elementi (furono chiamati "nobili" per questo motivo).

Lo schema interpretativo proposto da Mendeleev si rivelò così efficace che si riuscì a trovarvi una collocazione non solo per nuovi elementi ma anche per intere famiglie chimiche del tutto sconosciute.



La tavola periodica al Planetario di Milano

La tabella di Mendeleev non riusciva però a spiegare alcune cose come il fatto che il cobalto, pur avendo una massa atomica maggiore di quella del nichel, possedesse delle proprietà che portavano a collocarlo prima di questo elemento. Nel 1913, G.J. Moseley comprese che il parametro ordinatore degli elementi nella tavola periodica non era la massa atomica ma il numero atomico (cioè il numero di protoni contenuti nel nucleo atomico). Secondo questo criterio, la posizione del cobalto è proprio quella che precede il nichel.

Negli anni seguenti, con poche modifiche, la tavola predisposta da Mendeleev diventò quella che usiamo ancora oggi e che viene considerata la moderna tavola periodica, in cui gli elementi sono ordinati in colonne verticali, dette *gruppi*. Questi ultimi risultano particolarmente importanti per la classificazione, in quanto gli elementi che appartengono a uno stesso gruppo mostrano tra di loro delle proprietà chimiche molto simili.

Le righe orizzontali della tavola periodica sono invece chiamate *periodi*. Le proprietà all'interno di un periodo sono meno marcate rispetto a quelle che caratterizzano i gruppi, ma, in modo analogo, si notano tendenze importanti. In tutto si hanno 7 periodi e 18 gruppi. Se si considerano le caratteristiche degli elementi di uno stesso periodo, si nota che, procedendo da destra verso sinistra, aumentano le cosiddette *proprietà metalliche*, come la lucentezza, la capacità di condurre il calore e l'elettricità, la capacità di deformarsi in maniera plastica, ovvero senza fratturarsi. In base a queste proprietà, è dunque possibile effettuare una classificazione degli elementi in metalli, non metalli e semimetalli.

Nel 1945 fu riempito l'ultimo spazio vuoto della tavola. La scienza aveva finalmente scoperto tutti gli elementi? Stranamente la risposta è sì e no. Da un lato, gli elementi che esistono sulla Terra erano stati scoperti; dall'altro, niente vietava che nuovi elementi potessero essere creati artificialmente, trovando per essi una collocazione alla fine della tavola periodica, oltre l'elemento 92, l'uranio. Con lo sviluppo della ricerca atomica negli anni '40 del secolo scorso si cominciò ad aggiungere una sequela di nuovi elementi sintetizzati in laboratorio, arrivando attualmente a ben 118 elementi. Nessuno sa quanti altri elementi potranno essere scoperti, anche se sintetizzare nuovi elementi diventa sempre più difficile. Oggi, per avere la probabilità di scoprirne uno nuovo, c'è bisogno di un laboratorio molto attrezzato: gli elementi facili da scoprire sono già stati tutti individuati.



Dmitrij Ivanovič Mendeleev (1834-1907)

La struttura della tavola periodica, o tavola di Mendeleev, è immutata nel corso degli anni e ormai ha quasi un secolo e mezzo. Quello che stupisce è come una tale classificazione, basata solo su fenomeni macroscopici e costruita dal chimico russo quando la struttura dell'atomo non era completamente nota, non

solo abbia resistito a tutto lo sviluppo di quella che viene chiamata fisica moderna – dalla nascita della fisica atomica e nucleare alle revisioni della fisica teorica dovute alla meccanica quantistica – ma, anzi, ne sia uscita rafforzata.

A questo punto, il lettore si chiederà come mai la tavola periodica abbia un posto di primo piano al Planetario di Milano, in un istituto che ha il compito di comunicare al grande pubblico i molteplici aspetti dell'astronomia. Una prima risposta si può trovare nella sua universalità, in quanto non esiste alcuna evidenza che, neppure nei più remoti angoli del cosmo, vi siano elementi chimici diversi da quelli noti sulla Terra. Tuttavia, la motivazione principale risiede nell'origine degli elementi chimici e nella storia evolutiva del nostro universo. Ma procediamo con ordine.

Nei primi tre minuti dopo il Big Bang si sono formati i nuclei degli atomi più leggeri, idrogeno ed elio: questa è stata la fase della cosiddetta *nucleosintesi cosmologica*. L'abbondanza di idrogeno e di elio presente nell'universo proviene quindi dalle reazioni nucleari che avvengono in questo breve intervallo di tempo.

Gli elementi chimici più pesanti dell'idrogeno e dell'elio, sino al ferro, vengono sintetizzati nei nuclei delle stelle, vere e proprie centrali di energia nucleare, tramite il processo di *nucleosintesi stellare*: nuclei di elementi leggeri sono fusi in nuclei di elementi più pesanti. L'esplosione delle stelle, che caratterizza la parte finale della vita degli astri di grande massa, porta alla formazione di tutti gli altri elementi (*nucleosintesi esplosiva*); infatti, a causa della grande quantità di energia rilasciata, si creano le condizioni estreme necessarie per la formazione degli elementi chimici più pesanti del ferro, come l'oro e il platino.

Nel nostro "genoma chimico" vi sono quindi tracce di quello dell'universo stesso. Il nostro corpo, tutta la materia che ci circonda sono costituiti da atomi che in un lontano passato si trovavano nelle stelle; sono loro che li hanno fabbricati e poi disseminati per il cosmo, a disposizione di altre stelle che stavano nascendo, in particolare di una, il Sole, e della sua famiglia di pianeti. Siamo figli delle stelle, ovvero siamo fatti di materia fusa all'interno degli astri! Questo è il motivo principale per cui la tavola di Mendeleev ha un posto di primo piano all'interno del Planetario di Milano.

Tale tavola ha un'altra caratteristica interessante: gli elementi, ordinati secondo la struttura di Mendeleev e identificati sempre dalle loro sigle e dai loro numeri, smettono di essere soltanto dei nomi più o meno esotici, per diventare le sostanze della nostra vita quotidiana sempre più tecnologica. Infatti, l'idea di questa installazione nasce dal desiderio di mostrare agli studenti le proprietà di campioni reali degli elementi chimici visti nella loro "tridimensionalità". Elementi che spesso gli studenti hanno sentito nominare o, dei quali magari, hanno anche studiato le caratteristiche, senza però averli mai visti realmente in forma elementare.

Ma chi ha realizzato questa "opera"? L'idea è nata all'interno dello staff del Planetario e, successivamente, è stata realizzata da Walter Fogato (a cui si deve la realizzazione di gran parte dei diorami del Museo di Storia Naturale di Milano) sotto la supervisione scientifica del conservatore e astrofisico Fabio Peri. L'installazione poi è stata inaugurata nel 2010 per l'80° anniversario del Planetario di Milano.

Ora, tutti i visitatori sono attratti dall'enorme tavola periodica, che occupa un'intera parete a sinistra dell'ingresso principale. Il

fatto di poter vedere tutti gli elementi – nella loro forma elementare – rende la chimica più attraente e comprensibile anche a coloro che pensano che sia solo fatta di leggi, procedimenti da imparare a memoria e sconnessi dalla realtà.

In aggiunta, spesso gli insegnanti, gli stessi conferenzieri o il conservatore in persona si prestano a spiegare con passione i segreti della tavola di Mendeleev. Gli studenti possono comprendere come le proprietà e l'aspetto degli elementi si modifichino mano a mano che si procede lungo i periodi, passando dai metalli ai metalloidi, fino ai non metalli e infine ai gas nobili. I metalli del primo gruppo sono estremamente reattivi, per questo motivo vanno conservati al riparo dall'aria, in ampolle sotto vuoto o in liquidi inerti come oli minerali o paraffine. Gli elementi di transizione, invece, non hanno bisogno di particolari precauzioni per proteggerli dall'aria e dall'umidità in quanto sono molto stabili e in molti casi anche resistenti. I metalli più preziosi della tavola periodica, infine, si presentano lucidi e brillanti poiché, essendo molto stabili, non reagiscono con l'ossigeno dell'aria e non si ricoprono di ossidi.

Nella tavola periodica del Planetario di Milano è possibile anche vedere i gas. Ma come? Attraverso una scarica elettrica! Infatti, il gas ionizza ed emette luce. In questo modo si possono fare delle ulteriori scoperte: ad esempio, la luce emessa dal neon, nell'immaginario collettivo, è di colore bianco o giallo mentre in realtà è rossa!

La tavola di Mendeleev può essere utilizzata anche per raccontare la storia degli elementi e soprattutto le curiosità che possono rendere la chimica più divertente e affascinante.

Gli stessi nomi degli elementi contengono sempre qualcosa degno di essere conosciuto. Ad esempio:

- "idrogeno" significa *generatore d'acqua* ma anche *generato dall'acqua*, come suggerisce il termine tedesco "Wasserstoff";
- "stronzio", che è l'unica cosa della chimica che di solito diverte gli studenti, prende il nome dal toponimo scozzese Strontian;
- "tecnezio" (dal greco *technetos*), con il suo nome evidenzia la sua origine artificiale; è stato, infatti, il primo elemento prodotto artificialmente in laboratorio.

Alcuni nomi possono richiamare l'astronomia, come il selenio dal greco "Selene", Luna; il tellurio, dal latino "Tellus", Terra. Uranio, nettunio e plutonio ricordano invece i rispettivi pianeti.

Elio e litio derivano dai termini greci "helios" e "lithos" che significano rispettivamente "sole" e "pietra". Il mercurio, spirito metallico per eccellenza degli alchimisti, è collegato al pianeta omonimo.

Altre volte il nome dipende dalla geografia, come il polonio, l'americio, il californio, il berkelio e lo (stoccolmi)onio oppure è ispirato da grandi scienziati, come il copernicio, il mendeleevio, il curio, l'einsteinio e il fermio; altre, infine, dal luogo del loro ritrovamento, come l'itterbio, il terbio, l'erbio e l'ittrio, tutti scoperti nella miniera svedese di Ytterby tra il 1794 e il 1878.



Particolare della tavola periodica

Per concludere, mi piace raccontare due esempi su tutti che attirano l'attenzione dei ragazzi.

Il primo è il gallio, elemento metallico scoperto nel 1875 dal chimico francese Paul-Émile-François Lecoq. Fonde a 30°C, quindi diventa liquido anche solo tenendolo tra le mani, dato che la temperatura corporea dell'uomo è circa 36°C. In passato, questa proprietà veniva sfruttata in innumerevoli scherzi da parte dei chimici. Infatti il gallio, essendo un metallo malleabile e di colore argenteo, è simile all'alluminio e può essere modellato a forma di cucchiaino, in modo del tutto insospettabile. Un gioco popolare nelle feste di fine '800 e inizio '900 consisteva nel far svanire posate di gallio in tazze di tè bollente sotto gli occhi degli impietriti invitati.

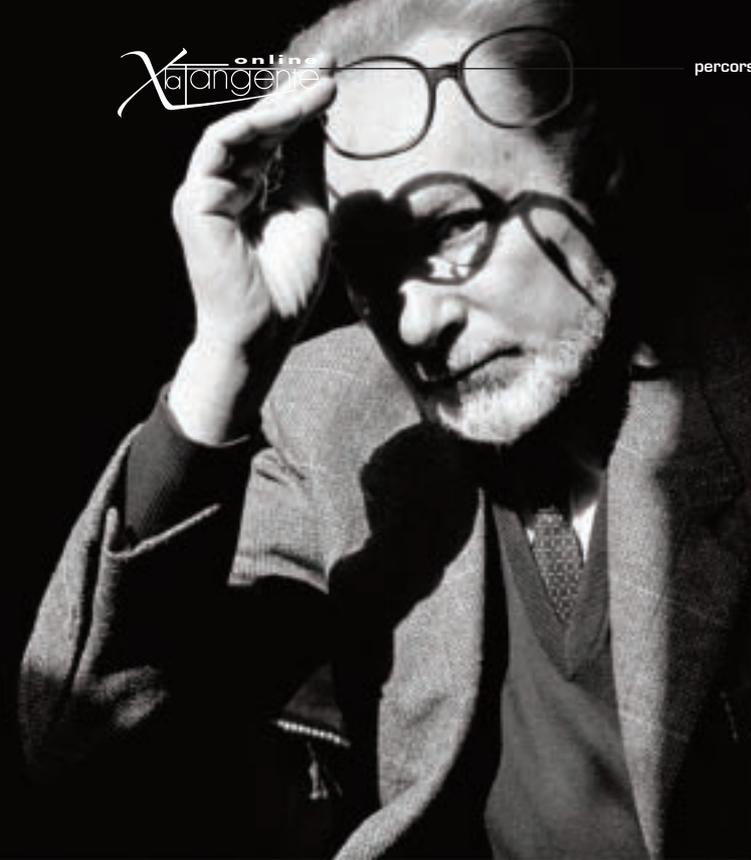
L'altro esempio è costituito dal polonio 210, un elemento altamente radioattivo. Benché non passi attraverso la pelle, sono necessari luoghi e strumentazioni adeguate per manipolarlo: infatti, l'inalazione o l'ingestione di un solo milligrammo di polonio 210 può essere letale. Piccole quantità di questo materiale possono danneggiare in maniera irreversibile tessuti e organi e una volta in circolo è molto difficile da rilevare: per questi motivi si ritiene che sia stata un'arma utilizzata per alcuni omicidi eccellenti.

Questi sono solo due esempi di una lunga lista: ci sono altri elementi della tavola periodica che hanno una o più storie da raccontare, aneddoti sulla loro scoperta o sul loro impiego nelle diverse epoche della storia. Tener vive la storia degli elementi chimici è compito della scienza quasi quanto contribuire alla loro scoperta!

Alessia Cassetti

Si è laureata in Fisica e specializzata in Astrofisica presso l'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma con una tesi nell'ambito dell'Astrofisica delle Alte Energie. È coautore di 5 articoli pubblicati su interviste internazionali. Ha conseguito un master biennale in Comunicazione della Scienza presso l'Università degli Studi di Milano-Bicocca. Da dicembre 2012 è responsabile della didattica esterna dell'associazione AstrOfficina per il Civico Planetario di Milano. Dal 2007 al 2012 è stata comunicatore scientifico presso il Museo Astronomico e Planetario di Roma. Dal 2010 al 2012 ha collaborato con la rivista scientifica "Scienza in rete" – il gruppo 2003 per la Ricerca.
alexboxes@yahoo.it alessia.cassetti@facebook.com





La poesia di Mendeleev

La Chimica e *Il sistema periodico* di Primo Levi

di ANNA BETTI

Una storia vera, autobiografica, di quelle che, pur essendo risapute, almeno nelle loro parti più forti e tragicamente note, non smettono mai di penetrare nell'anima e tormentarla; una piccola panoramica di chimica per i non addetti ai lavori e il tratteggio di un mestiere che è non soltanto un modo di guadagnarsi il pane, ma, soprattutto, un modo di stare al mondo; uno sguardo disincantato e ironico sulle vicende della vita e sui loro personaggi. Ne *Il sistema periodico* di Primo Levi, la chimica è una lente attraverso cui l'autore rivede la propria storia (che, per forza di cose, è anche uno scorcio della storia socio-politica del secondo conflitto mondiale e dei suoi regimi) e regala al lettore alcune profonde incursioni in stati d'animo e idee sulle persone e sulla vita. Un viaggio lungo 21 capitoli, autonomi e disposti in ordine cronologico, ciascuno legato a un elemento della tavola periodica di Mendeleev, per *convogliare ai profani il sapore forte ed amaro del nostro mestiere, che è poi un caso particolare, una versione più strenua, del mestiere di vivere* [p. 207]. Gli entusiasmi giovanili che, in ribellione all'astrattezza e "inconcludenza" delle materie scolastiche, soffiavano energia e ambizione, le prime esperienze di laboratorio all'università e poi i primi lavori, la deportazione, il dopoguerra e le esperienze professionali degli anni più maturi, tutte queste tappe del viaggio sono anche quelle di un rapporto con la chimica che evolve nel tempo, ma che non smette mai di essere una componente essenziale della persona di Primo Levi:

Giunto a questo punto della vita, quale chimico, davanti alla tabella del Sistema Periodico, o agli indici monumentali del Beilstein o del Landolt, non vi ravvisa sparsi i tristi brandelli, o i trofei, del proprio passato professionale? Non ha che da sfogliare un qualsiasi trattato, e le

memorie sorgono a grappoli: c'è fra noi chi ha legato il suo destino, indelebilmente, al bromo o al propilene o al gruppo -NCO o all'acido glutammico; ed ogni studente in chimica, davanti ad un qualsiasi trattato, dovrebbe essere consapevole che in una di quelle pagine, forse in una sola riga o formula o parola, sta scritto il suo avvenire, in caratteri indecifrabili, ma che diventeranno chiari "poi": dopo il successo o l'errore o la colpa, la vittoria o la disfatta. Ogni chimico non più giovane, riaprendo alla pagina "verhangnisvoll" quel medesimo trattato, è percosso da amore o disgusto, si rallegra o si dispera. Così avviene, dunque, che ogni elemento dica qualcosa a qualcuno (a ciascuno una cosa diversa), come le valli o le spiagge visitate in giovinezza. [pp. 229-230]

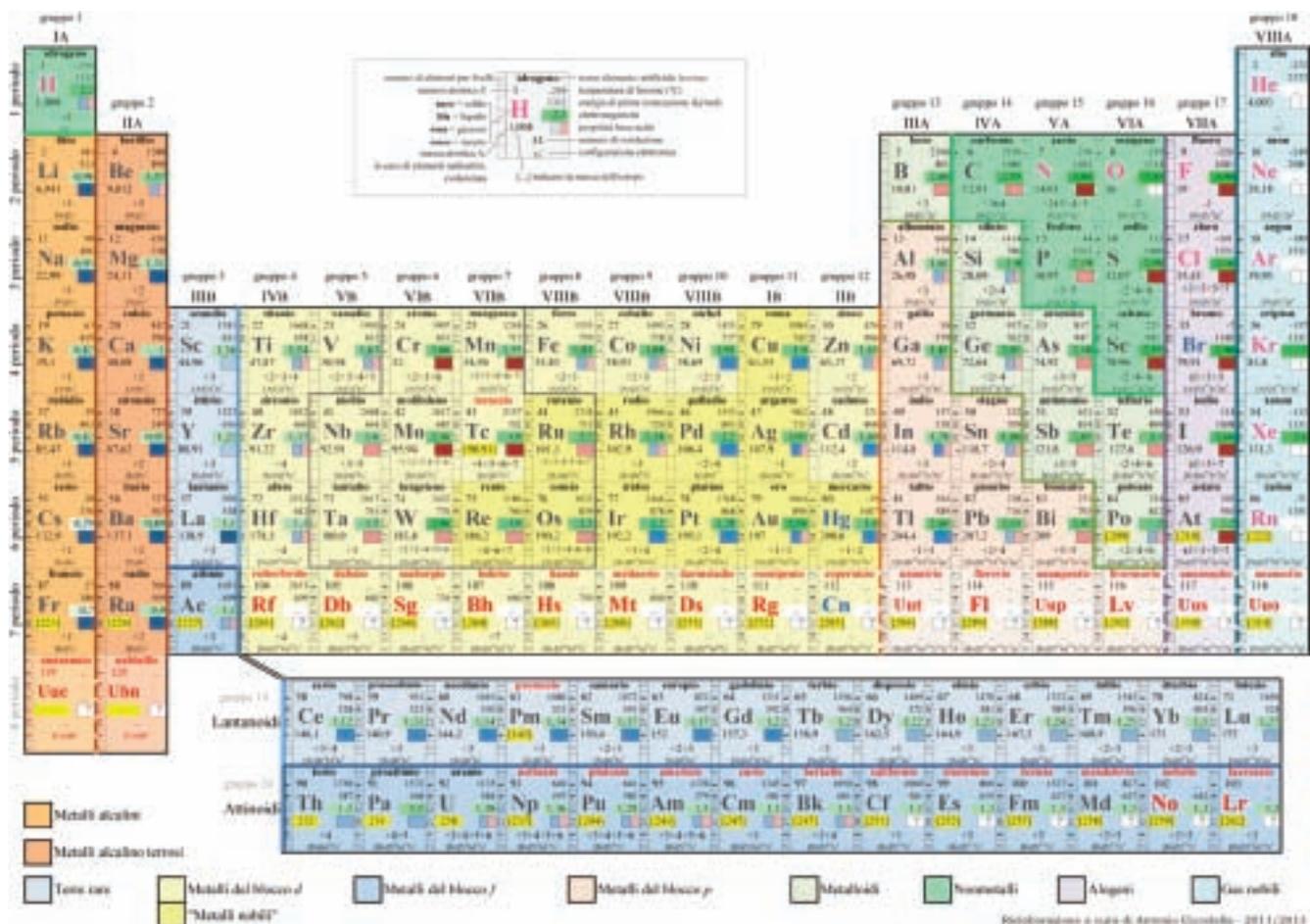
Ecco dunque, nel capitolo dedicato all'idrogeno, Primo Levi ragazzo, liceale alle prese con la ricerca di se stesso, pronto alla meraviglia di fronte al mondo, a grandi sogni, a sentire la vita come possibilità infinita davanti a sé e, allo stesso tempo, la propria piccolezza; eccolo furtivamente in un laboratorio di fortuna con un amico, della cui personalità, come anche più avanti in diverse occasioni, ci viene fornita con poche righe un'efficace descrizione. Ed ecco una chimica amica, veicolo di comprensione della realtà e di affrancamento dagli inutili insegnamenti scolastici:

Ero sazio di libri, che pure continuavo a ingoiare con voracità indiscreta, e cercavo un'altra chiave per i sommi

veri: una chiave ci doveva pur essere, ed ero sicuro che, per qualche mostruosa congiura ai danni miei e del mondo, non l'avrei avuta dalla scuola. A scuola mi somministravano tonnellate di nozioni che digerivo con diligenza, ma che non mi riscaldavano le vene. [...] Era snervente, nauseante, ascoltare discorsi sul problema dell'essere e del conoscere, quando tutto intorno a noi era mistero che premeva per svelarsi: il legno vetusto dei banchi, la sfera del sole di là dai vetri e dai tetti, il volo vano dei pappi nell'aria di giugno. Ecco: tutti i filosofi e tutti gli eserciti del mondo sarebbero stati capaci di costruire questo moscerino? No, e neppure di comprenderlo: questa era una vergogna e un abominio, bisognava trovare un'altra strada. Saremmo stati chimici, Enrico ed io. Avremmo dragato il ventre del mistero con le nostre forze, col nostro ingegno: avremmo stretto Proteo alla gola, avremmo troncato le sue metamorfosi inconcludenti, da Platone ad Agostino, da Agostino a Tommaso, da Tommaso a Hegel, da Hegel a Croce. Lo avremmo costretto a parlare. [pp. 23-24]

La chimica è una grande alleata anche nei primi anni universitari, in cui si accentua la visione della materia come controparte da domare. L'unica "redenzione" possibile dalla passività della materia è nella sua comprensione attraverso, appunto, la chimica:

... alcune idee che a quel tempo confusamente coltivavo. Che la nobiltà dell'Uomo, acquisita in cento secoli di



The image shows a periodic table of elements color-coded by groups. The legend at the bottom identifies the following categories:

- Metalli alcalini (Group 1)
- Metalli alcalino-terrosi (Group 2)
- Toni chiari (Groups 3-10)
- Metalli del blocco d (Groups 3-10)
- Metalli del blocco f (Lanthanoids and Actinoids)
- Metalli del blocco p (Groups 11-18)
- Metalloidi (Groups 13-16)
- Semimetalli (Groups 13-16)
- Alogeni (Group 17)
- Gas nobili (Group 18)

prove e di errori, era consistita nel farsi signore della materia, e che io mi ero iscritto a Chimica perché a questa nobiltà mi volevo mantenere fedele. Che vincere la materia è comprenderla, e comprendere la materia è necessario per comprendere l'universo e noi stessi: e che quindi il Sistema Periodico di Mendeleev [...] era una poesia, più alta e più solenne di tutte le poesie digerite in liceo... [p. 43]

Studiare Chimica, dunque, per Primo Levi, era ben di più che prepararsi a un mestiere per guadagnarsi da vivere; era qualcosa che aveva a che fare con la realizzazione dell'essere umano, con la sua ragion d'essere, qualcosa, in fondo, di profondamente filosofico. Eppure da questa materia vecchia come il Tutto e portentosamente ricca d'inganni, solenne e sottile come la Sfinge [p. 40], era in qualche modo attratto, ed era affascinato da chi, pur con obiettivi più terreni dei suoi, ne aveva confidenza. Splendida è la descrizione, nel capitolo "Ferro", di Sandro Delmastro (futuro partigiano ucciso nell'aprile del '44) e della loro amicizia. Sandro possedeva qualità che Primo ammirava e probabilmente sentiva di non avere: intanto aveva scelto di studiare chimica semplicemente – e realisticamente – perché era un mestiere di cose che si vedono e si toccano, un guadagnapane meno faticoso che fare il falegname o il contadino [p. 43]. E poi era tenace e coraggioso, sembrava fatto di ferro [p. 45] e gli pareva di aver perso giornata se non aveva dato fondo in qualche modo alle sue riserve di energia, ed allora era anche più vivace il suo sguardo. [p. 46] Ma era anche sottile e generoso, e non amava le parole grosse. Rappresentava, per Primo, la vera libertà:

... di tutto quanto la vita mi ha dato di buono, nulla ha avuto, neppure alla lontana, il sapore di quella carne, che è il sapore di essere forti e liberi, liberi anche di sbaigliare, e padroni del proprio destino. [p. 50]

Il nascente disinganno degli anni seguenti va, forse non a caso, di pari passo con l'incupirsi del destino dell'Europa e dell'autore. Al quarto anno di università comincia un rapporto più tormentato con la Chimica:

... giunto al quarto anno di Chimica Pura, non potevo più ignorare che la chimica stessa, o almeno quella che ci veniva somministrata, non rispondeva alle mie domande. Preparare il bromobenzene o il violetto metile secondo il Gattermann era divertente, anche esilarante, ma non molto diverso dal seguire le ricette dell'Artusi. Perché in quel modo, e non in un altro? Dopo di essere stato ingozzato in liceo delle verità rivelate della Dottrina del Fascismo, tutte le verità rivelate, non dimostrate, mi erano venute a noia o in sospetto. Esistevano teoremi di chimica? No: perciò bisognava andare oltre, non accontentarsi del "quia", risalire alle origini, alla matematica ed alla fisica. [p. 54]

Anche il confronto con la Materia si complica: da un lato essa mantiene il suo fascino, così come l'aveva avuto negli anni precedenti più spensierati, di più, diventa un'amica perché contrapposta allo Spirito, caro al fascismo; dall'altro lato si fa sempre più insopportabile la sua visione di entità passiva e indifferente. Questa insoddisfazione diventa angoscia durante la prigionia seguita alla cattura come partigiano:

... pensavo alle strade nei boschi, alla neve fuori, alle montagne indifferenti, alle cento cose splendide che se

fossi tornato libero avrei potuto fare, e la gola mi si chiudevava come per un nodo. [p. 138]

Tendendo l'orecchio, nel silenzio del copri-fuoco si sentiva il mormorio della Dora, amica perduta, e tutti gli amici erano perduti, e la giovinezza, e la gioia, e forse la vita: scorreva vicina ma indifferente, trascinandolo l'oro nel suo grembo di ghiaccio fuso. [p. 142]

La chimica è sempre presente anche in "Cesio", l'unico capitolo sul Lager, dove le considerazioni generali sulla materia e il ruolo del chimico cedono momentaneamente il passo a osservazioni relative a necessità più immediate, prima fra tutte quella della sopravvivenza. Non mancano tuttavia acute riflessioni su vissuti e dinamiche interiori, lo stesso tipo di riflessioni che accompagna il lettore lungo tutto il libro. Questo sguardo analitico, lucido e a tratti ironico, seppur fortemente coinvolto, su persone, contesti, fatti e impressioni su di essi, si ritrova infatti anche nel prosieguo della storia, nelle vicende professionali e aziendali del dopoguerra. Riaffiora il rapporto conflittuale con la materia:

... e l'avversario era sempre ancora quello, il non-io, il Gran Curvo, la Hyle: la materia stupida, neghittosamente nemica come è nemica la stupidità umana, e come quella forte della sua ottusità passiva. [p. 158]

E riaffiora, più pessimista e consapevole di tanti limiti, la visione del mestiere di chimico come missione:

Gli eventi chimici ti danno il senso [...] dell'impotenza, dell'insufficienza, ti danno l'impressione di combattere un'interminabile guerra contro un esercito avversario ottuso e tardo, ma tremendo per numero e peso; di perdere tutte le battaglie, una dopo l'altra, un anno dopo l'altro; e ti devi accontentare, per medicare il tuo orgoglio contuso, di quelle poche occasioni in cui intravedi una smagliatura nello schieramento nemico, ti ci avventi, e metti a segno un rapido singolo colpo. [pp. 206-207]

La chimica non diventa mai, dunque, qualcosa di accessorio, o uno strumento come tanti altri per guadagnarsi da vivere, ma resta sempre qualcosa di irrinunciabile, perché storia dell'uomo e delle sue qualità distintive:

A me interessavano di più le storie della chimica solitaria, inerme e appiedata, a misura d'uomo, che con poche eccezioni è stata la mia: ma è stata anche la chimica dei fondatori, che non lavoravano in équipe ma da soli, in mezzo all'indifferenza del loro tempo, per lo più senza guadagno, e affrontavano la materia senza aiuti, col cervello e con le mani, con la ragione e la fantasia. [p. 207]



Primo Levi, *Il sistema periodico*, Einaudi, Torino 2005, da cui sono tratte tutte le citazioni



“Rosa del deserto”, formazione caratteristica di cristalli di gesso

Le reazioni di un chimico

Intervista a Vincenzo Balbo

di ANNA ASTI e ANNA BETTI

Abbiamo incontrato per voi Vincenzo Balbo, Corporate IT Manager di un'importante multinazionale chimica tedesca, che si è prestato volentieri a raccontarci come vede il rapporto chimica-matematica. A lui la parola!



Ci può raccontare brevemente in che cosa consiste il suo mestiere?

Dunque, da dove parto? Ah, sì, sono un CHIMICO!! o, per lo meno lo ero... Laurea in Chimica Analitica in 4 anni (e qualche mese) al posto di 5 e con esame di Stato all'attivo subito dopo la laurea.

Parto bene, con il piede giusto, una multinazionale mi chiama praticamente il giorno dopo la laurea, mi vuole per il laboratorio CQ e R&D regionale in Italia. Rimango lì un po' di anni, poi però, mi accorgo che non c'è spazio per me, per la mia crescita; inoltre, quello che faccio non è “vera” chimica... e decido quindi di andare nella sede principale della società a Milano e vendermi come... IT (= Information Technology).

Beh, alla fine mi sono detto: “Chimica Analitica = Chimica con strumentazione = Computer e macchinari vari (AA, NMR, Fornetto di grafite, SEM... bei tempi!!!)”. Quindi diciamo che sono un chimico “venduto” all'informatica. Pensavo di rimanere poco in IT, di trovare qualche altro lavoro più da chimico sperimentale e invece la nuova veste mi è piaciuta e ho continuato, col tempo, direttamente nell'*headquarter* della società in Germania!

AA, NMR, SEM... sta parlando di crittografia?

Oops, ha ragione: come al solito, quando si parla di strumentazioni, è facile chiamarle con gli acronimi al posto del loro reale nome: AA=Assorbimento Atomico, NMR = Risonanza Magnetico Nucleare, SEM= Microscopio elettronico a scansione. Sono tutti strumenti di spettroscopia utili per facilitare l'identificazione delle molecole di un “intruglio” incognito. Una volta (ma in uso tuttora) c'era solo il metodo classico, volumetrico, con pipette, burette, reagenti, titolazioni, ora inve-

ce la tecnologia ha fatto passi da gigante e con il metodo strumentale è riuscita a rendere “semplice” un'operazione complessa.

Qual è il ruolo della matematica nel suo lavoro? È necessaria? Se sì, in che modo? E in generale nella chimica, ritiene importante il ruolo della matematica?

Matematica? Assolutamente necessaria nella chimica. Come si fa a fare le conversioni in ppm... a calcolare i picchi di uno spettrometro e soprattutto a capire e risolvere l'equazione di Schrödinger del moto degli orbitali (chi è un chimico-fisico sa bene di che cosa si sta parlando)? E comunque, anche parlando di IT, la matematica mi serve, eccome!

Eh no, sta usando ancora un codice cifrato. Ci spieghi meglio, non siamo tutti chimici-fisici e ci interessa...

Il merito del professore Erwin Schrödinger (un fisico austriaco) è stato quello di descrivere i sistemi quantistici (atomi, elettroni, molecole...) mediante la cosiddetta *meccanica*



Un cristallo di neve al microscopio elettronico a scansione

canica ondulatoria e una simpatica funzione d'onda, intesa come onda di probabilità. In parole povere, Schrödinger ha scoperto che le particelle puntiformi come l'elettrone hanno un comportamento (cioè un andamento) ondulatorio e che solo alcuni valori "discreti" di energia sono ammessi per questi elettroni. Grazie all'interpretazione fisica dei risultati dell'equazione, l'idea di funzione d'onda come onda di probabilità genera il concetto di orbitale, ossia di una zona attorno al nucleo dell'atomo in cui le probabilità di trovare l'elettrone sono molto alte.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \hat{H}\Psi(r, t)$$

Questa è l'equazione differenziale lineare di cui parlo, dove $\Psi(r, t)$ è la funzione d'onda e $r = (x, y, z)$ è un punto nello spazio tridimensionale, mentre gli altri termini sono costanti (fra cui la famosa costante di Planck \hbar), ma non chiedetemi di risolverla, per favore!

Qual è il suo rapporto "umano" con la matematica? Le sta "simpatica"?

Matematica? Sì, grazie... mi piaceva e mi piace molto tuttora (anche se adesso non ricordo proprio tutto degli integrali e delle derivate seconde...). Tutto il mondo reale ruota intorno alla matematica. Un esempio che mi viene in mente (a me molto vicino) è quello della musica, espressione della matematica per eccellenza. I differenti toni di una scala sono legati ai rapporti fra numeri interi: una corda dimezzata suona l'ottava superiore, ridotta ai suoi $3/4$ la quarta, ridotta ai suoi $2/3$ la quinta, e così via. O anche quello della fotografia, e di tutte le arti figurative in generale (dipinti, opere di architettura), dove la sezione aurea è alla base della composizione. (Si ritiene che le opere realizzate tenendo conto della sezione aurea appaiano più belle e armoniose in quanto il cervello umano sarebbe naturalmente predisposto a trovare gradevole questa particolare proporzione).

Conosce qualche matematico che lavora in aziende chimiche? Se sì, di che cosa si occupa?

Sì, una collega del mio team è laureata in Matematica (anche lei, però, passata dalla parte del "nemico" IT).

In che cosa, secondo lei, il suo approccio da chimico convertito all'IT è diverso da quello della sua collega? Ritiene

che la vostra formazione iniziale possa aver determinato qualche differenza?

Secondo me, la formazione matematica di un chimico è molto simile a quella di un matematico, anche se – per certi versi – è più specialistica e più applicata a casi concreti rispetto a quella teorica.

Il 2014 è l'anno della cristallografia: si è mai occupato di cristalli o conosce qualcuno che se ne occupa? Se sì, che cosa fa?

Cristallografia? Bellissima materia. Ho ancora gli occhi lucidi quando ripenso all'esame dato all'università, alla diffrazione dei cristalli ai raggi X, alle classi cristallografiche dei minerali... Pensi che recentemente sono andato al Museo di Scienze Naturali a Londra con la mia famiglia e alcuni amici. Ho spiegato ai nostri ragazzi il perché delle classi cristallografiche mostrate in teca! E, poi, per me... i minerali sono tutto un mondo affascinante da scoprire.

Interessante. Ci racconti...

Mi sono trovato all'improvviso di fronte alla teca con le principali classi cristallografiche, i modelli molecolari e i relativi esempi in natura. Mi è venuto subito spontaneo ri-spiegare ai nostri ragazzi, che frequentano le medie, quello che hanno studiato sulla simmetria e sulla differente durezza dei materiali, guardando anche la struttura molecolare tridimensionale rappresentata.

Che connessioni ci sono tra matematica e studio dei cristalli?

Se non ricordo male, fu Keplero che per primo descrisse in forma matematica un cristallo di neve; poi seguì lo studio della simmetria e degli angoli che formano i vari piani cristallografici. La classificazione dei cristalli si basa sugli elementi di tale simmetria e sul valore di particolari parametri. In base ad essi, possiamo classificare i cristalli in 3 gruppi, e ogni gruppo in 7 sistemi che individuano cristalli con la stessa inclinazione degli assi cristallografici. In totale, ci sono 32 sistemi, ciascuno con cristalli aventi lo stesso gruppo di simmetria. Ad esempio, il Salgemma (sale da cucina NaCl) corrisponde al sistema cubico, il quarzo (SiO₂) a quello trigonale e il gesso (CaSO₄·2H₂O) a quello monoclino, per citarne alcuni.

Primo Levi, che era un chimico, disse che il mestiere di chimico, appunto, è "un caso particolare, una versione più strenua, del mestiere di vivere", e la sua visione era quella di una missione, dura e infinita, contro l'ottusità della materia: "Gli eventi chimici ti danno il senso [...] dell'impotenza, dell'insufficienza, ti danno l'impressione di combattere un'interminabile guerra contro un esercito avversario ottuso e tardo, ma tremendo per numero e peso; di perdere tutte le battaglie, una dopo l'altra, un anno dopo l'altro; e ti devi accontentare, per medicare il tuo orgoglio contuso, di quelle poche occasioni in cui intravedi una smagliatura nello schieramento nemico, ti ci avventi, e metti a segno un rapido singolo colpo".

Lei che cosa ne pensa?

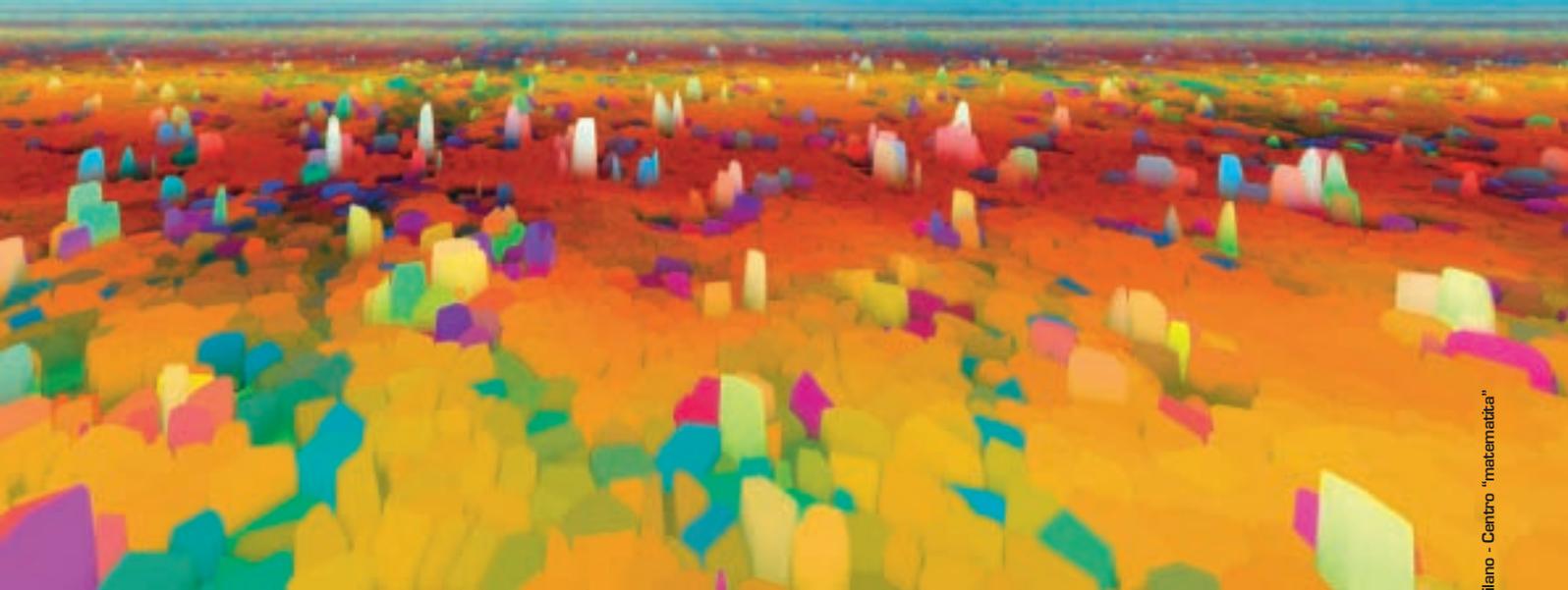
Mah, forse Primo Levi aveva ragione. Quando non sai se una reazione va nel verso giusto, sei impotente; fino all'ultimo vivi nell'incertezza di capire se quello che hai mescolato corrisponde alle tue aspettative oppure no e spera solo di non aver sbagliato i calcoli; altrimenti la reazione potrebbe prendere una brutta piega!



Cloruro di sodio

Parola d'ordine: cristalli!

Intervista a Massimo Moret e Silvia Rizzato, crescitrici di cristalli



di ANNA BETTI

In occasione dell'Anno Internazionale della Cristallografia, XlaTangente ha incontrato due ricercatori che hanno a che fare tutti i giorni con i cristalli e che hanno rilasciato gentilmente un'intervista in cui raccontano il loro affascinante lavoro. Ma non si pensi agli Swarovski, i cristalli sono intorno a noi molto più di quanto siamo soliti pensare e hanno utilizzi che vanno ben oltre l'abbellire soggiorni o décolleté di eleganti signore...

Voi vi occupate quotidianamente di cristalli; potete descriverci brevemente il vostro lavoro?

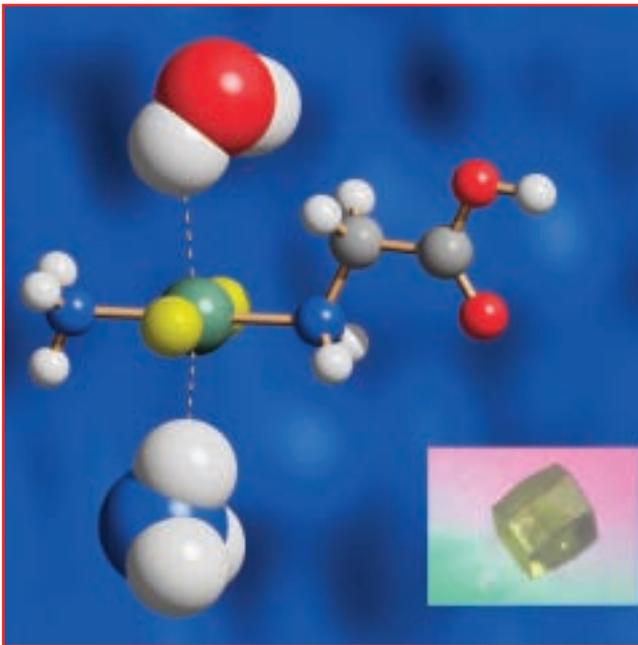
Massimo Moret Quando sono arrivato qui [al Dipartimento di Scienza dei Materiali dell'Università degli Studi di Milano-Bicocca, ndr] circa quindici anni fa, mi sono unito a un gruppo di fisici che studia i semiconduttori organici, cioè delle molecole organiche che possono sostituire, se non integralmente, almeno parzialmente, si spera, il silicio, quindi il mondo inorganico. Per fare questo c'è bisogno dei cristalli: essi sarebbero il miglior veicolo per ottenere certe proprietà fisiche, ma non si può pensare a dispositivi con molecole in forma di cristalli singoli (come nel caso del silicio). Il mezzo fisico con cui usare le molecole in forma cristallina è il *film sottile*, una pellicola spessa pochi strati molecolari (siamo nell'ordine di grandezza dei nanometri), in forma cristallina e deposta su appositi substrati.

Una parte importante del nostro lavoro consiste nel crescere dei cristalli di opportune sostanze che non sono di

per se stesse dei semiconduttori, ma servono, appunto, come substrati su cui depositare questi film sottili; è importante che siano anch'essi cristallini per una questione di ordine: se il substrato fosse amorfo, sarebbe isotropo, cioè senza direzionalità nelle proprietà fisiche; in tal caso le isolette cristalline bidimensionali che nucleano e si accrescono sulla sua superficie sarebbero orientate a caso. È una questione di simmetria: il substrato cristallino induce ordine in ciò che naturalmente non sarebbe ordinato.

Caspita, in un batter d'occhio sono stata catapultata al cuore del problema! Permettetemi di fare un salto indietro con una domanda forse un po' ingenua: perché si sta cercando di produrre dei semiconduttori organici?

M.M. È molto semplice: perché il silicio è uno, mentre le molecole organiche sono milioni. E le molecole aggregate in forma di cristallo possono avere proprietà fisiche simili, anche se al momento con prestazioni inferiori, a quelle del silicio.



Un'immagine del complesso $[PtCl_2(NH_3)(\text{glicina})]$ che mostra l'interazione a idrogeno del centro metallico (un atomo di platino) con una molecola d'acqua (sopra) e una di ammoniaca (sotto). L'esistenza di tale interazione è stata dimostrata attraverso la determinazione della struttura cristallina mediante diffrazione di neutroni e ha permesso di spiegare il meccanismo, e quindi la cinetica, con cui il composto, noto farmaco antitumorale, reagisce con il DNA. Nel riquadro una foto del cristallo

Molecole allo stato cristallino in cui l'ordine, se ho capito bene, non è una questione secondaria...

M.M. Proprio così (più precisamente si parla di "ordine a lungo raggio"), dall'organizzazione e dall'interazione delle molecole dipendono le proprietà fisiche finali!

Dunque, ricapitolando: pellicole cristalline posate su substrati cristallini con il compito di orientare molecole a volte recalcitranti all'ordine! Sembra una faccenda piuttosto complicata!

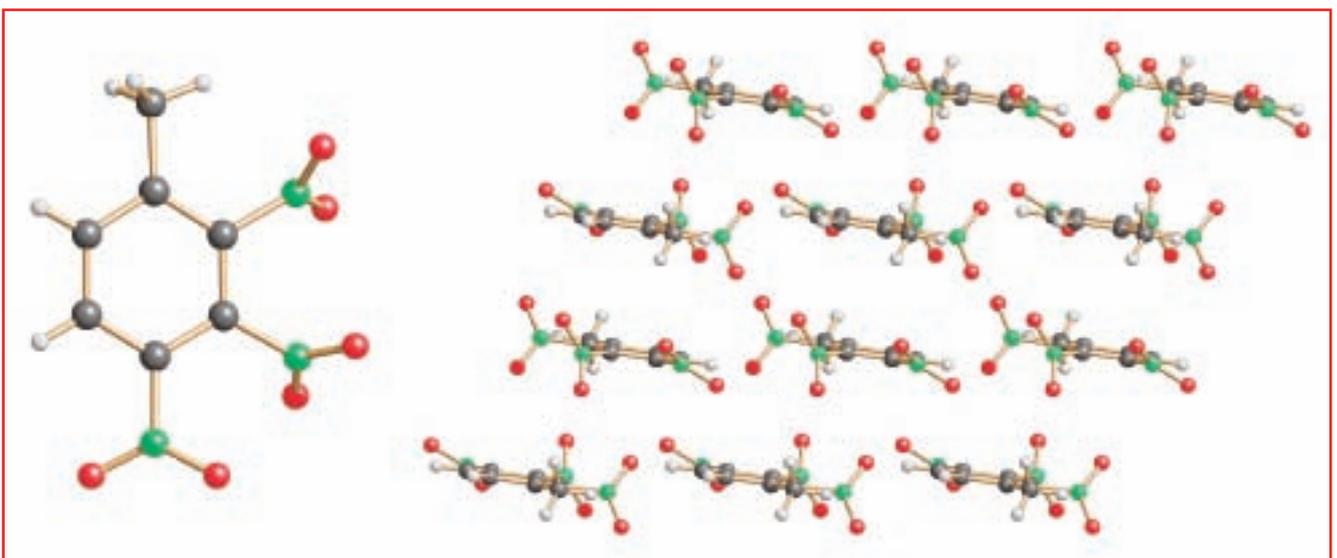
M.M. In effetti fino a pochi anni fa nessuno riusciva a ottenere i film sottili cristallini di alcune molecole molto promettenti, perché le molecole devono disporsi in maniera

ordinata; la cosa è tutt'altro che banale, perché, pur essendoci la possibilità teorica di tale ordine – nel senso che le interazioni possono essere favorevoli – a volte la cinetica, di fatto, lo impedisce. Solo dopo vari tentativi ci si è riusciti, anche grazie a questi nuovi substrati.

Per esempio, ci sono alcune molecole che sono restie a cristallizzare e formano pellicole amorfe, che non consentono quindi di produrre *transistor* organici con prestazioni accettabili; con un substrato cristallino invece questo è a volte possibile, e anche se non è ancora chiaro quale sia la causa scatenante delle orientazioni di queste isolette che si formano, abbiamo potuto osservare delle trincee superficiali, profonde pochi atomi, che sembrano indurre l'orientazione alle prime molecole che si depositano sulla superficie, orientazione che si trasferisce poi a tutta la massa cristallina. Pertanto, il lavoro consiste nel crescere nuovi substrati cristallini (partendo da una selezione di strutture potenziali estratte dalla banca dati cristallografica di Cambridge, che conta quasi settecentomila strutture cristalline di molecole organiche o che contengono una parte organica) e poi controllare se si sfaldano facilmente per ottenere superfici pulite con rugosità superficiali su scala molecolare.

Che cosa succede una volta cresciuti questi substrati cristallini? Quali sono i passi successivi?

M.M. Poi entrano in gioco i colleghi fisici; essi studiano come il substrato con il film sottile superficiale assorbe o riflette la luce, per capire se è cristallino o meno: infatti l'assorbimento della luce dipende anche dal modo di organizzazione e di interazione delle molecole tra di loro. Tra le varie informazioni che si ottengono con questo studio c'è anche l'orientazione delle isole cristalline del film sottile rispetto al substrato: se il substrato non è cristallino le orientazioni sono casuali. I film sottili, poi, per una determinata sostanza, possono nascere appoggiando un piano cristallografico piuttosto che un altro, quindi, anche se c'è una posizione più frequente di altre, non è detto che sia sempre la stessa e ciò non è indifferente dal punto di vista "energetico"; oltretutto può essere che la possibilità più rara sia, ai nostri fini, quella più interessante. Insomma, ci sono molti problemi e aspetti da considerare.



La molecola del 2,3,4-Trinitrotoluene (a sinistra) e l'impacchettamento (distribuzione ordinata nello spazio) delle molecole nella struttura cristallina (a destra) determinata mediante diffrazione di raggi X su cristallo singolo

Dopo lo studio spettroscopico, cerco di razionalizzare le osservazioni sperimentali spiegando perché si sono riscontrate certe orientazioni del film sottile rispetto al substrato, tenendo presente che ogni sostanza cristallizza a modo suo, che possono esserci orientazioni multiple, fasi cristalline e piani cristallografici diversi.

Silvia Rizzato Ora il prof. Moret, raccontando un'applicazione, ha illustrato molto di quello che è la cristallografia: innanzitutto è un campo non solo pratico, ma anche con aree teoriche tanto importanti quanto complesse. Ne è un esempio *Crystal Structure Prediction*, il cui obiettivo è quello di prevedere, attraverso opportuni metodi computazionali sviluppati in ambito cristallografico, la struttura cristallina di un composto a partire dalla struttura molecolare: che tipo di cristallo si formerà? Come si disporranno in maniera ordinata le molecole nel solido? L'aspetto teorico è attualmente così avanzato da poter prevedere con una discreta probabilità di successo la struttura cristallina, anche se non si può essere sicuri finché non la si verifica sperimentalmente.

Perché è utile prevedere la struttura cristallina?

S.R. È utile, ad esempio, nella *Crystal Engineering*, in cui si sa che per ottenere un materiale cristallino con certe proprietà fisiche si deve avere un certo assetto della struttura cristallina (sono ormai noti determinati requisiti di simmetria, ecc. alla base di determinate proprietà), per cui poter prevedere la struttura cristallina permette di sintetizzare una molecola a partire dalla proprietà fisica desiderata. Solo che è un lavoro molto complesso, con una varietà enorme di possibili casi e attualmente quasi impossibile, se non in un ristretto numero di casi mirati.

Il mio lavoro invece è l'opposto: consiste nel provare, miscelare, ecc., e poi verificare quali proprietà mostrano i materiali ottenuti.

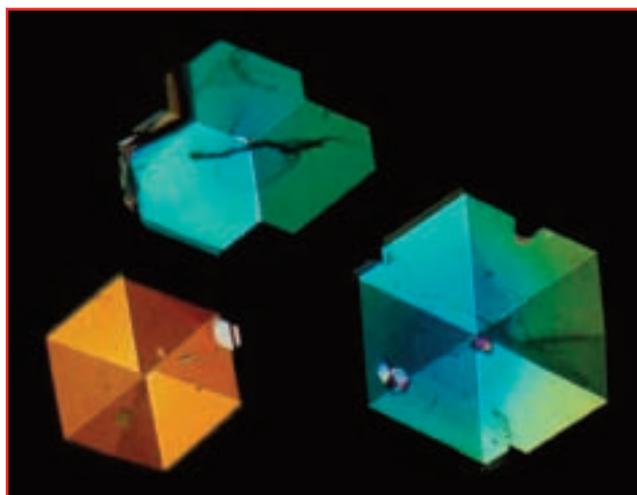
L'aspetto che è importante sottolineare è che la cristallografia è un ambito multidisciplinare, che coinvolge, per esempio, anche la fisica e la geologia. Cioè, la cristallografia è una disciplina che ha necessità di diversi approcci specialistici al suo interno.

Quindi gli studi in ambito cristallografico hanno bisogno di più punti di vista; ma è anche vero che lo studio dei cristalli ha applicazioni in campi diversi?

S.R. Sì, ad esempio in campo farmaceutico, il principio attivo è quasi sempre in forma cristallina e il suo spettro di diffrazione come un'impronta digitale e mette al sicuro la casa farmaceutica quando deposita il brevetto del farmaco.

Altro ambito applicativo è quello industriale: solo per fare un paio di esempi, seppur distanti tra loro, lo zucchero e il cemento hanno struttura cristallina. Ma, del resto, il 90% della materia è in forma cristallina. Ancora qualche esempio? I metalli, il gesso per stuccare i muri, le conchiglie dei molluschi, le ossa. E potremmo continuare a lungo!

Un'altra applicazione ancora è in campo biologico: si sta studiando, per esempio, il funzionamento di un farmaco contro la malaria. Il plasmodio, parassita responsabile della malattia, infetta inizialmente le cellule del fegato e quindi i globuli rossi, costituiti essenzialmente da emoglobina, la proteina che trasporta l'ossigeno nel sangue. Il parassita non è in grado di "digerire" la parte non proteica dell'emoglobina contenuta nei globuli rossi, chiamata eme. Il virus trasforma quindi l'eme in una forma per lui innocua, l'"emo-



Cristalli geminati di solfato di potassio (K_2SO_4) osservati al microscopio ottico in luce polarizzata. La geminazione produce individui cristallini pseudoesagonali con tre diverse orientazioni del reticolo cristallino

zoina", che forma cristalli di colore giallo, responsabili della colorazione gialla della pelle nelle persone affette da malaria. Il farmaco agisce in modo tale da impedire la trasformazione dell'eme, tossico per il parassita, in emozoina non tossica. L'azione del farmaco potrebbe essere compresa studiando la sua interazione a livello molecolare con l'eme, possibile anche attraverso determinazioni cristallografiche.

E la matematica? In che modo c'entra con i cristalli?

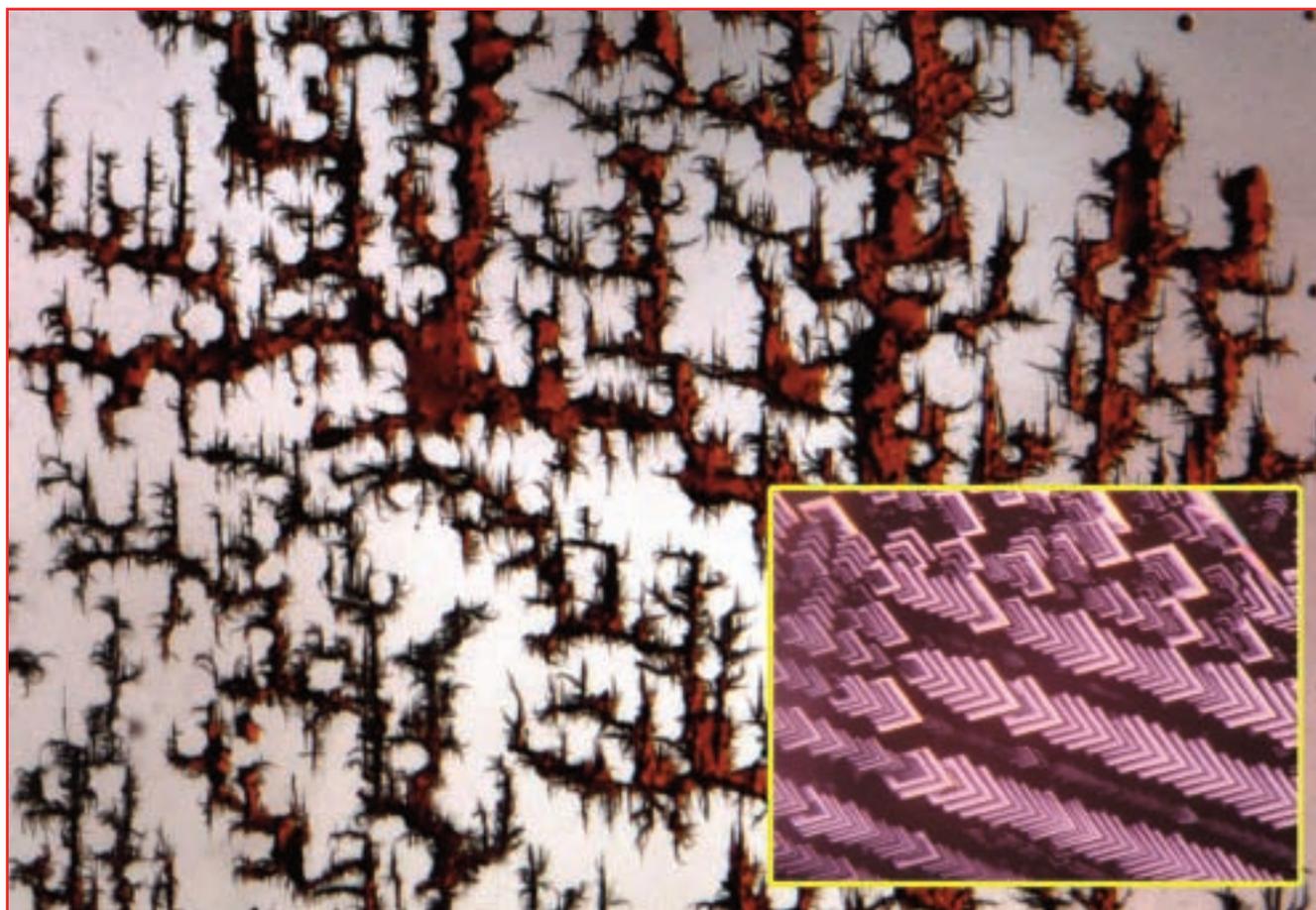
M.M. La matematica entra in contatto con il mondo dei cristalli principalmente per la simmetria. Abbiamo già visto quanto sia determinante l'ordine con cui molecole si dispongono, e la caratteristica dei cristalli è proprio quella di essere ordinati al loro interno. Inoltre, ci sono aspetti rilevanti relativi alla forma, alla morfologia poliedrica tipica dei cristalli (che determina ad esempio la velocità con cui si sciogliono).

Potete farci un po' di storia delle interazioni di matematica e cristallografia?

M.M. La matematica inizia a occuparsi del problema sicuramente con Keplero, che si accorse della simmetria esagonale dei cristalli di acqua solida (i fiocchi di neve) e arrivò anche a pensare all'esistenza di oggetti invisibili ad occhio nudo disposti in maniera ordinata. L'ipotesi di una struttura interna ordinata dei cristalli è stata poi dimostrata cento anni fa con la diffrazione dei raggi X. Keplero formulò la congettura che porta il suo nome, ipotizzando che l'impacchettamento esagonale e cubico di sfere offrisse la disposizione più efficiente nello spazio tridimensionale.

Un altro momento importante di contatto tra matematica e cristallografia è a fine Ottocento, quando alcuni matematici hanno enumerato tutte le possibili disposizioni simmetriche che un qualsiasi oggetto può assumere con periodicità ripetuta lungo tre direzioni opportune a formare quello che chiamiamo "cristallo", dimostrando che sono duecentotrenta. E qui interviene l'algebra, unitamente alla teoria dei gruppi, per definire come una molecola viene trasformata in un'altra che è sua simmetrica, attraverso una classificazione rigorosa, che consente di enumerare con la certezza di non aver dimenticato niente.

La simmetria è fondamentale anche per la predizione e lo studio delle proprietà fisiche (ci sono molte proprietà che



Cristalli dendritici di rubrene ($C_{42}H_{28}$) e di pirene ($C_{16}H_{10}$); le condizioni non ottimali di crescita dei cristalli hanno portato alla perdita della stabilità morfologica e della forma poliedrica. Condizioni analoghe sono alla base della formazione dei fiocchi di neve

© Università degli Studi di Milano - Centro "matematica"

possono essere presenti solo se il cristallo possiede determinate proprietà di simmetria, per cui governare per bene queste conoscenze è essenziale, per esempio, per decidere se portare avanti o meno determinate ricerche).

Questo in "pillole"; tuttavia l'argomento è vasto e, per essere affrontato in modo più approfondito, avrebbe bisogno di più spazio di quello che possiamo dedicargli ora. Chi fosse interessato, può trovare una trattazione più completa di tutti i temi di cui abbiamo parlato (e anche molto di più),

su www.cristallografia.org/libro.asp, dove, compilato un semplice formulario, si può scaricare gratuitamente il file pdf di "Cristallografia: la visione a raggi X", testo scritto con alcuni colleghi e accessibile anche ai non addetti ai lavori. Da leggere e da... provare, visto che ci sono anche le ricette per giocare!

Fantastico, cari lettori! Siete dunque pronti a mettere le mani in pasta e ad avventurarvi tra i cristalli?

Massimo Moret, professore associato di Chimica Inorganica presso il Dipartimento di Scienza dei Materiali, Università di Milano-Bicocca, si occupa dello studio dei processi di crescita cristallina, in particolare dello studio della morfologia dei cristalli molecolari, delle relazioni epitassiali e del polimorfismo osservati nei film sottili di materiali organici cristallini, in funzione della natura del substrato e/o dello spessore dei film.

massimo.moret@mater.unimib.it

Silvia Rizzato si è laureata in Chimica e ha conseguito il Dottorato di Ricerca in Scienze Chimiche presso l'Università degli Studi di Milano. Dal 2003 è ricercatrice e docente di Chimica Generale e Inorganica presso l'Università degli Studi di Milano. Attualmente afferisce al Dipartimento di Chimica e si occupa dello studio dei processi di cristallizzazione e della progettazione di nuove metodologie per la crescita di cristalli per sistemi di tipo coordinativo e organometallico con potenziali proprietà in ambito energetico. Nella sua attività sperimentale fa prevalentemente uso di tecniche di diffrazione di raggi X e di spettroscopia neutronica.

silvia.rizzato@unimi.it



Dai cristalli ai cristalli pazzi: la strana storia chimica delle tassellazioni

di PAOLO BELLINGERI

Che cosa lega la cristallografia all'informatica? E che cosa accomuna il Premio Nobel per la Chimica del 1914 con quello del 2011? Partiamo alla scoperta delle tassellazioni del piano e dello spazio, delle loro applicazioni e delle loro sorprendenti proprietà

Perché il 2014 è l'anno internazionale della cristallografia? La ragione principale sta nel fatto che quest'anno si festeggia il centenario del Premio Nobel per la Chimica a Max von Laue, per la sua scoperta della diffrazione dei raggi X, un fenomeno che ci permette di vedere e studiare analogie e differenze tra le strutture microscopiche degli stessi cristalli.



Max von Laue (1879-1960)

In effetti, non c'è un solo "tipo" di cristalli e negli anni a cavallo tra il diciannovesimo e il ventesimo secolo anche i matematici si lasciarono affascinare da domande come: quante e quali diverse strutture possono avere i cristalli?

Più precisamente, i matematici si interessarono a particolari modellizza-

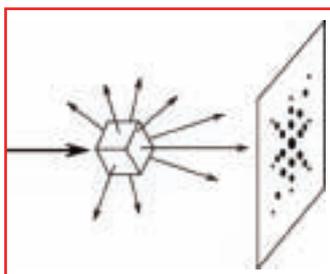


Immagine di Cdang, CC BY-SA 3.0

zioni dei cristalli, le *tassellazioni* del piano e dello spazio, ovvero i ricoprimenti senza buchi e senza sovrapposizioni, che sono ottenuti a partire da tasselli elementari.

PROBLEMI, LEMMI E SIMMETRIE: LE TASSELLAZIONI PERIODICHE

Per alcuni decenni la cristallografia è stata una grande sorgente di ispirazione per la ricerca matematica: basti pensare che, nella celebre lista di problemi posti da Hilbert nel 1900, il diciottesimo, (parzialmente) risolto da Heesch e Reinhardt negli anni Trenta del secolo scorso, parlava proprio di tassellazioni del piano e dello spazio.

Le tassellazioni del piano (e, rispettivamente, dello spazio) interessanti per la cristallografia sono quelle *periodiche*, vale a dire quelle per le quali esistono due (rispettivamente tre) traslazioni indipendenti che le lasciano invariate. Se questa definizione non vi dice granché, pensate a un esempio intuitivo: immaginate di essere su una casella di una scacchiera infinita e muovetevi di due caselle alla vostra sinistra: il panorama che vedete è lo stesso di prima. E se vi muovete di due caselle davanti a voi? Stessa osservazione, nulla è cambiato! La scacchiera infinita è un bell'esempio di tassellazione periodica del piano.

Il mondo delle tassellazioni periodiche è «prevedibile» come il mondo dei cristalli: esiste cioè una configurazione di base che si ripete in modo «regolare» in due (o tre, nel caso dello spazio) direzioni indipendenti.

Le tassellazioni ammettono anche altre regolarità, che chiamiamo *simmetrie*: per esempio, possono essere invarianti per rotazione. Immaginate ancora una volta un pavimento di piastrelle quadrate, e giratevi di un quarto di giro: il paesaggio è lo stesso di prima o, come si dice, questa tassellazione di quadrati ammette come simmetria una rotazione di ordine quattro. Quali altre rotazioni sono ammesse da una tassellazione periodica? Proprio poche, in realtà: esiste infatti un celebre teorema (che prende spesso il nome di *Lemma di restrizione cristallografica*) che afferma che le possibili rotazioni sono solo quelle di un sesto, un quarto, un terzo e metà di giro, che chiameremo rispettivamente rotazioni di *ordine sei, quattro, tre e due*.

Il lemma di restrizione cristallografica è probabilmente il risultato più importante nello studio delle tassellazioni periodiche, e quello che ha più marcato la cristallografia, come vedremo tra poco. Questo lemma è il punto chiave per mostrare che esistono solo un numero finito di «tipi» di tassellazioni periodiche (due tassellazioni sono considerate dello stesso «tipo» se hanno le stesse simmetrie). Più precisamente, consente di dimostrare che i tipi possibili sono solo diciassette. In generale la paternità di quest'ultimo risultato è attribuita a Fedorov e Schönflies, che lo hanno dimostrato indipendentemente alla fine del diciannovesimo secolo; si noti però che il fisico Bravais aveva già introdotto la nozione di reticolo cristallino una cinquantina di anni prima e aveva mostrato l'esistenza di quattordici tipi differenti di reticoli.

Precisiamo meglio che cosa intendiamo per «tipo» di tassellazione: le due tassellazioni in figura 1, per esempio, sono diverse, nel senso che sono formate da tasselli differenti, ma sono dello stesso «tipo» perché presentano le stesse simmetrie o, detto in altro modo, perché le regole di costruzione (a partire da un tassello a priori differente) sono le stesse.

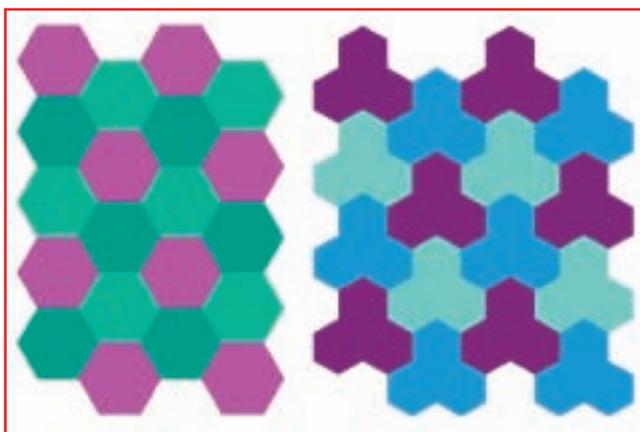


Figura 1. Due tassellazioni con poligoni che hanno lo stesso gruppo di simmetria

TRENT'ANNI DI DESERTO

Dopo la soluzione parziale del diciottesimo problema di Hilbert, l'interesse dei matematici per le tassellazioni (e le loro applicazioni cristallografiche) diminuì... fino a quando le tassellazioni (periodiche) ridiventarono interessanti per un'altra ragione: visto che sono costruite in

base a «regole», si prestano bene per creare esempi di algoritmi.

Negli anni Sessanta del secolo scorso, agli albori dell'informatica, fu in effetti proposto un algoritmo capace di decidere se un dato insieme di tasselli P potesse tassellare il piano: tale algoritmo, molto semplice, si basava sull'ipotesi che esistesse almeno una tassellazione periodica tra quelle permesse dall'insieme P .

Se si parte da un insieme di tasselli elementari, può capitare che questo insieme permetta di costruire delle tassellazioni non periodiche. Prendiamo per esempio le tassellazioni composte da quadrati neri e bianchi: tra queste c'è una scacchiera infinita in cui una casella è nera, mentre tutte le altre sono bianche. In questo caso non c'è alcuna traslazione che lascia invariata la tassellazione: comunque ci muoviamo dalla casella nera, troveremo un paesaggio differente. Questo, però, non implica che TUTTE le tassellazioni che possiamo ottenere con quadrati neri e bianchi siano non periodiche: come abbiamo già osservato, in una scacchiera infinita in cui si alternano caselle nere e bianche, se saltate da una casella nera a un'altra nera, non potrete distinguere la posizione di partenza da quella di arrivo.

I matematici credevano («congetturavano») che non esistesse un insieme di tasselli che tassellasse il piano SOLO in modo non periodico. Tale congettura si basava sugli esempi conosciuti e su alcuni risultati parziali, ma anche sul fatto che la periodicità ci permette di avere un'idea di come le cose vanno «all'infinito» o, meglio, ci dà una regola di ripetizione da seguire per costruire la tassellazione a partire da una configurazione di base.

Tuttavia, verso la metà degli anni Sessanta, il matematico Berger trovò un insieme di tasselli quadrati che dovevano rispettare alcune regole di accostamento e che presentavano solo delle tassellazioni non periodiche: la congettura era quindi falsa. L'unico problema è che questo insieme era composto... da più di 20.000 tasselli elementari! Questo fu il primo esempio di *insieme aperiodico*, vale a dire un insieme di tasselli che permettono solo delle tassellazioni non periodiche.

Per estensione, spesso si chiama *tassellazione aperiodica* una tassellazione costruita a partire da un insieme aperiodico di tasselli.

PENROSE E LE TASSELLAZIONI «GONFIATE»

Dopo la scoperta di Berger, sono stati trovati nuovi insiemi aperiodici, fino ad arrivare agli insiemi di due tasselli illustrati più sotto (chiamati spesso *freccia* e *aquilone*), scoperti dal fisico americano Roger Penrose negli anni Settanta del secolo scorso.

Si tratta di due rombi di lato uguale, con gli angoli di 72, 72, 108 e 108 e di 36, 36, 144 e 144 gradi rispettivamente (figura 2). Se accostiamo i due rombi in modo tale da ottenere un parallelogrammo, possiamo immaginare facilmente una regola per una tassellazione periodica del piano, semplicemente accostando i parallelogrammi lato contro lato.

Immaginiamo adesso di provare a creare una tassellazione del piano con questi due tipi di rombi, ma con un «vincolo» ulteriore: quando accostiamo i rombi (uguali o differenti) lato contro lato, non deve mai apparire nella nostra tassellazione un parallelogramma formato da due rombi. Per rispettare questa regola possiamo marcare i lati dei rombi in modo tale da sottolineare quali lati possiamo accostare tra loro (figura 3).

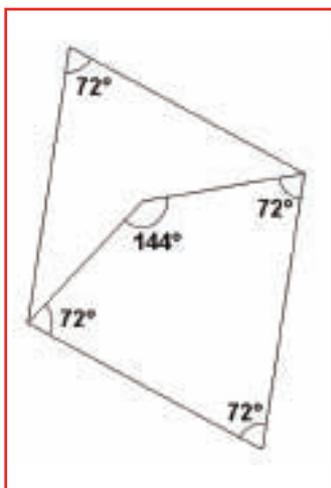


Figura 2

Il primo fatto sorprendente è che è possibile tassellare il piano anche con questa restrizione sugli accostamenti: una porzione di tassellazione è mostrata in figura 4. Sorprendente perché, anche se abbiamo la sensazione che la tassellazione possa continuare all'infinito, non esiste una regola che ci dica come accostare i tasselli per procedere nella tassellazione «all'infinito», come nel caso delle tassellazioni periodiche.

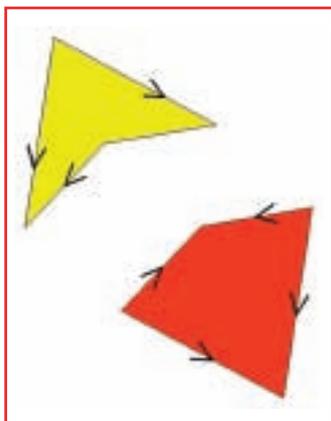


Figura 3. Tasselli di Penrose

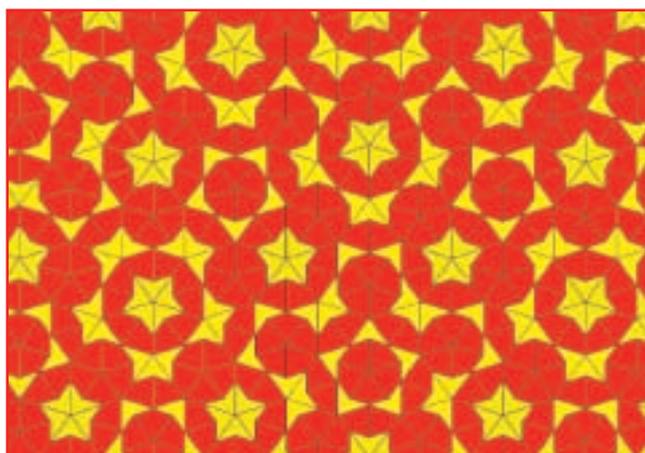


Figura 4. Porzione di tassellazione di Penrose

Un altro fatto sorprendente è legato alle proprietà delle tassellazioni che possiamo ottenere con la restrizione sugli accostamenti qui sopra definita: in effetti, non solo è possibile costruire delle tassellazioni del piano, ma esistono tante tassellazioni differenti quanti sono i numeri reali! Se pensiamo che volendo costruire una tassellazione con dei quadrati accostati lato contro lato ne otteniamo una sola...

In queste tassellazioni, inoltre, possiamo notare delle simmetrie «locali», delle stelle, dei decagoni... figure che presentano simmetrie di ordine cinque, impossibili in una tassellazione periodica! E se avessimo una porzione di tassellazione di Penrose con un grande numero di tasselli, potremmo notare come ogni configurazione (ogni sottinsieme di tasselli) si ripeta all'infinito nella tassellazione, anche se non in modo «ordinato» come nel caso delle tassellazioni periodiche.

Questo fenomeno è una delle conseguenze del fatto che le tassellazioni di Penrose si costruiscono con un metodo chiamato *di sostituzione*. Questo metodo può essere spiegato con i quadrati: prendiamo un quadrato e dividiamolo in quattro quadrati che in seguito «gonfiamo» per farli diventare della taglia del quadrato di partenza. Continuando «all'infinito» appare chiaro che possiamo coprire una superficie sempre più grande.

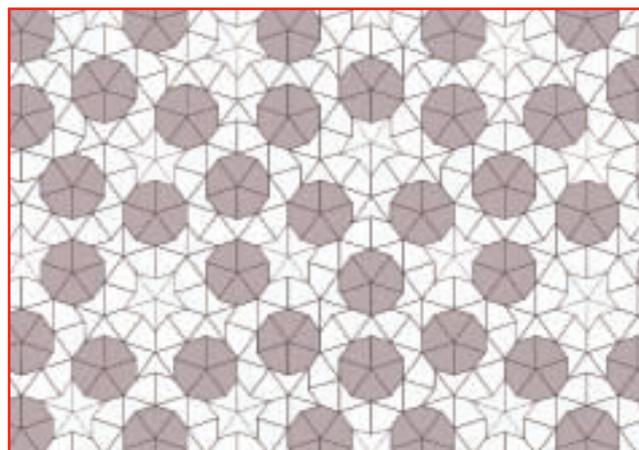


Figura 5. Una tassellazione di Penrose dove sono messi in evidenza alcuni decagoni

Il processo di sostituzione permette di dimostrare non solo che frecce e aquiloni tassellano il piano rispettando le regole date prima, ma anche che tutte le tassellazioni sono non periodiche, che tutte le configurazioni si ripetono e possono apparire di dimensioni differenti. Per esempio in figura 6 si possono notare delle stelle, simili ma di dimensioni differenti.

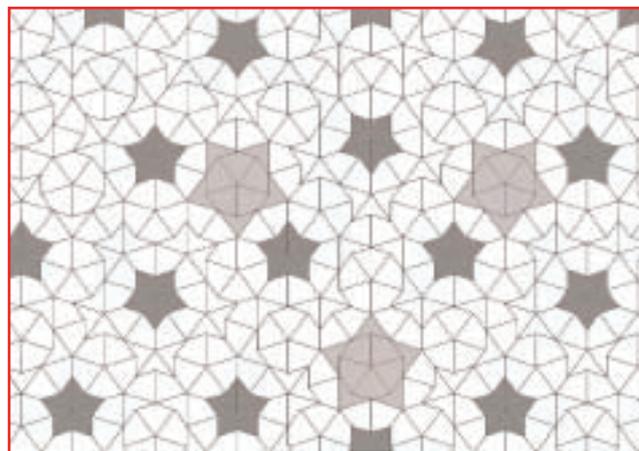


Figura 6. Una tassellazione di Penrose dove sono messe in evidenza alcune stelle di dimensioni differenti

Per riassumere tutte queste proprietà, che mettono in re-

lazione queste tassellazioni alle tassellazioni periodiche, le tassellazioni di Penrose sono spesso citate come esempio di tassellazione *quasi-periodica*.

DAL PIANO ALLO SPAZIO

Come ci sono insiemi aperiodici nel piano, così si possono cercare nello spazio delle forme (tasselli) che costituiscano un insieme aperiodico, cioè delle forme tali da poter tassellare l'intero spazio ma solo in modo non periodico. Un esempio è dato dalla tassellazione tridimensionale di Ludwig Danzer, costituita da un insieme di quattro tessere a forma di tetraedro, con cui si possono costruire degli analoghi tridimensionali delle frecce e degli aquiloni di Penrose (figura 7).

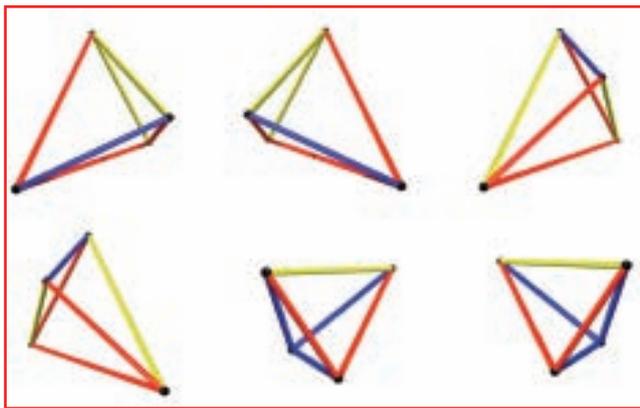


Figura 7. Tetraedri aperiodici

I CRISTALLI PAZZI

Grazie alla divulgazione fatta dal matematico americano Martin Gardner, le tassellazioni quasi-periodiche hanno avuto durante gli anni Settanta del secolo scorso una certa fama nel mondo della matematica ludica. E probabilmente sarebbero restati un argomento essenzialmente ludico se non fosse che una nuova sorpresa era alle porte: le tassellazioni quasi-periodiche avevano delle applicazioni pratiche! Agli inizi degli anni Ottanta del secolo scorso, infatti, il chimico Dan Schechtman scoprì un cristallo formato da alluminio e manganese che rivelava una struttura molto particolare, diversa da quella tipica dei cristalli, e che presentava delle strutture ordinate analoghe a quelle delle tassellazioni di Penrose. Proprio come negli anni Sessanta i matematici pensavano che le tassellazioni aperiodiche non potessero esistere, per i chimici i cristalli scoperti da Schechtman erano conside-

rati impossibili in natura, tanto sembravano contraddire le conoscenze in cristallografia. In effetti, come le tassellazioni di Penrose, questi materiali presentavano localmente delle configurazioni (anche molto grandi) con simmetrie rotazionali di un quinto di giro (come ad esempio le stelle e i decagoni nelle figure 5 e 6) e quindi «proibite» dal lemma di restrizione cristallografica.

Per questo motivo Schechtman propose di chiamarli «impossible crystals» o «crazycrystals». Il nome con cui sono oggi conosciuti, «quasicrystals» (quasicristalli), fu invece proposto da un altro scienziato, Paul J. Steinhardt, che li aveva previsti, su base teorica, qualche mese prima.

La scoperta ha avuto ricadute scientifiche e – più recentemente – pratiche (la produzione di materiali con particolari proprietà isolanti), e ha valso a Schechtman il premio Nobel per la Chimica nel 2011, probabilmente anche perché nel 2009 un gruppo di geologi (italiani, tra l'altro) ha rinvenuto sul fondo del fiume russo Khatyrka il primo esempio di quasicristallo «naturale», mostrando la «naturalità» di questi materiali.

NUOVE STRUTTURE MATEMATICHE E NUOVE APPLICAZIONI

Negli ultimi dieci anni sono state usate differenti tecniche matematiche per studiare l'aperiodico (in particolare la teoria ergodica) e sono stati proposti nuovi punti di vista, come lo studio dello spazio formato da tutte le tassellazioni di un dato insieme di forme e delle sue proprietà analitiche. E nuove applicazioni sono state trovate in informatica, in particolare nella ricostruzione delle immagini. Saranno probabilmente ancora una volta le nuove possibili applicazioni (in particolare in cristallografia e informatica) a guidare e motivare negli anni a venire le domande sulle tassellazioni e gli strumenti matematici per affrontarle.



Dan Schechtman (1941-)

Buon compleanno Mr Gardner!

Nato il 21 ottobre 1914, Martin Gardner è autore di vari libri (disponibili anche in italiano) sui giochi matematici. Alle tassellazioni quasi-periodiche, è dedicato un capitolo del suo "The Colossal Book of Mathematics". Il centenario della sua nascita è stato festeggiato con manifestazioni in tutta Italia.

Paolo Bellingeri

Ricercatore in algebra e in geometria presso l'Université de Caen in Francia, si occupa principalmente di trecce e topologia in bassa dimensione. Nell'ambito della comunicazione della matematica ha realizzato varie attività in Francia e in Italia, fra cui la traduzione del libro *Théorème Vivant* di Cedric Villani. Ha diretto la prima serie di questa rivista dal 2008 al 2013.
paolo.bellingeri@unicaen.fr



Tutti pazzi per i cristalli



Fluorite

di GILBERTO BUI e IACOPO FRATTINI

Da un punto di vista matematico, la struttura di un cristallo è "soltanto" un sistema discreto e ordinato di punti. La cristallografia usa la simmetria della struttura, cioè di tali sistemi, come criterio di classificazione

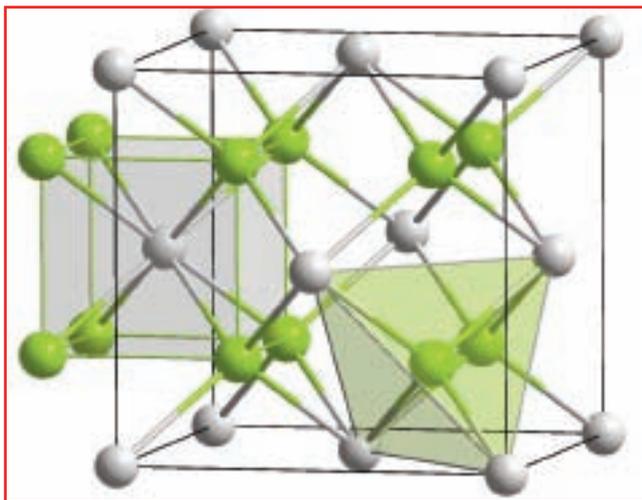
Da secoli i cristalli affascinano gli uomini con le loro forme fortemente regolari. La "leggenda" vuole che la cristallografia moderna, basata sull'idea che questa regolarità sia dovuta a una struttura modulare, sia nata con i lavori dell'abate R.J. Haüy, che avrebbe accidentalmente fatto cadere, frantumandolo, un cristallo che stava studiando, e avrebbe notato che i frammenti riproducevano in piccolo la forma dell'esemplare originario. Da questa osservazione avrebbe tratto l'idea che il cristallo fosse formato da minuscoli blocchi di forma identica ordinati in file e piani sovrapposti. Successivamente, il bravo abate avrebbe mostrato che un'adeguata organizzazione di blocchi, anche molto semplici, poteva dare vita a una notevole varietà di forme, e con ciò cominciò a rispondere alla domanda sul motivo per cui i cristalli di uno stesso materiale possono apparire in forme diverse.

L'idea originaria era che questi blocchi fondamentali fossero dei poliedri che si potevano accostare riempiendo tutto lo spazio, senza lasciare buchi e senza sovrapposizioni. Cominciò quindi una ricerca di tutti i poliedri che hanno questa proprietà e dei modi in cui possono essere assemblati. La condizione imposta ridusse fortemente il numero dei possibili poliedri, perché sono pochi quelli che tassellano lo spazio, ma non impedì che venisse analizzato anche il

caso in cui i blocchi sono sfere, o pacchetti di sfere, organizzate in qualche maniera precisa.



Quarzo



Fluorite, struttura

In genere, la struttura dei cristalli viene descritta tramite *sistemi di punti*, che possono essere interpretati come i centri dei poliedri o delle sfere, o, detto altrimenti, come i centri dei blocchi. Affinché un sistema siffatto sia adatto a descrivere i cristalli, è necessario che innanzitutto sia discreto – cioè ogni suo punto deve rappresentare un blocco e due punti non possono avvicinarsi troppo (per evitare che ci sia un blocco che contiene altri punti) – e poi che riempia bene lo spazio, cioè sia tale che i blocchi si compongano senza lasciare spazi vuoti.

Un sistema di punti può essere molto disordinato, ma qui, nei modelli utili a studiare i cristalli, occorre che i blocchi si dispongano lungo file e piani paralleli. Allora è naturale limitarci a quel tipo di sistema ordinato che va sotto il nome di *reticolo tridimensionale*.

Lo possiamo pensare come l'insieme delle immagini dei punti del sistema ottenute applicando ad ognuno di essi, una dopo l'altra, tre traslazioni lungo tre direzioni indipendenti, cioè lungo direzioni che non individuano uno stesso piano.

Vale a dire che, per ogni punto P del sistema, consideriamo le successive immagini di P generate dalla prima traslazione. Questi nuovi punti stanno tutti su una stessa retta, sulla quale sta anche P. Allo stesso punto P applichiamo le altre due traslazioni e consideriamo le rette che vengono individuate in questo modo. Se ripetiamo questa operazione per tutti i punti del sistema, otteniamo il *reticolo*, una specie di "carta a cubetti" dello spazio, dove i "cubetti" possono non essere cubi!

Il reticolo ha solo un significato geometrico; per costruire da esso un cristallo, occorre associare a ogni suo punto

atomi, ioni o molecole di un solo elemento o di più elementi della tavola periodica.

Ma, per descrivere i cristalli, i reticoli non bastano. Si usano anche altri sistemi di punti, quelli che soddisfano un'ipotesi di *regolarità*, in base alla quale, comunque si scelgano due punti, esiste un'isometria dello spazio che manda il primo punto nel secondo punto e trasforma complessivamente il sistema in se stesso. Una tale isometria prende il nome di *simmetria di quel sistema di punti*.

L'ipotesi di regolarità ci dice, fra l'altro, due cose. La prima è che se esiste una rotazione che trasforma il sistema in se stesso, questa avrà infiniti centri ottenuti per traslazione, e la seconda che ci sono da soddisfare alcune restrizioni sugli angoli di rotazione che sono possibili. In particolare, si può dimostrare che le sole simmetrie rotatorie sono quelle di ordine 2, 3, 4 e 6!

Per studiare la struttura di un cristallo, occorre dunque comprendere – fra le altre cose – le sue simmetrie e come si compongono; quindi, come direbbe un matematico, occorre comprendere la struttura del gruppo da esse generato.

Si parte, per ricostruire il cristallo almeno da un punto di vista matematico, da una qualsiasi delle cosiddette *celle unitarie*, cioè da una qualsiasi di quelle celle che generano l'intero cristallo con sole operazioni di traslazione. L'idea di cella unitaria viene da lontano, visto che fu introdotta da C. Huygens (1629-1695) per interpretare le proprietà ottiche della calcite.

Una cella unitaria è detta *primitiva* se i soli punti che ha in comune con il reticolo sono i suoi stessi vertici. Tre direzioni linearmente indipendenti della cella primitiva individuano i cosiddetti *vettori primitivi* e quindi le traslazioni che generano il reticolo.

Ma le traslazioni rappresentano solo alcune fra le simmetrie del reticolo. Per ottenere l'intero gruppo, bisogna con-

© Università degli Studi di Milano - Centro "matematica"

Foto di Didier Descouens



Cloruro di sodio e struttura



Tormalina

Foto di Marco Del Torchio

Foto di Giovanni Dall'Orto



Fluorite

siderare anche le isometrie che fissano un punto e mandano il reticolo in se stesso. Questo nuovo gruppo prende il nome di *gruppo puntuale* e offre una prima maniera per classificare i cristalli. In base alle sue caratteristiche, infatti, i reticoli vengono classificati in 7 classi, i cosiddetti *reticoli di Bravais* che descriviamo qui sotto (dove l'aggettivo "centrato" sta ad indicare la presenza di un centro di simmetria del sistema cristallino). Eccoli.

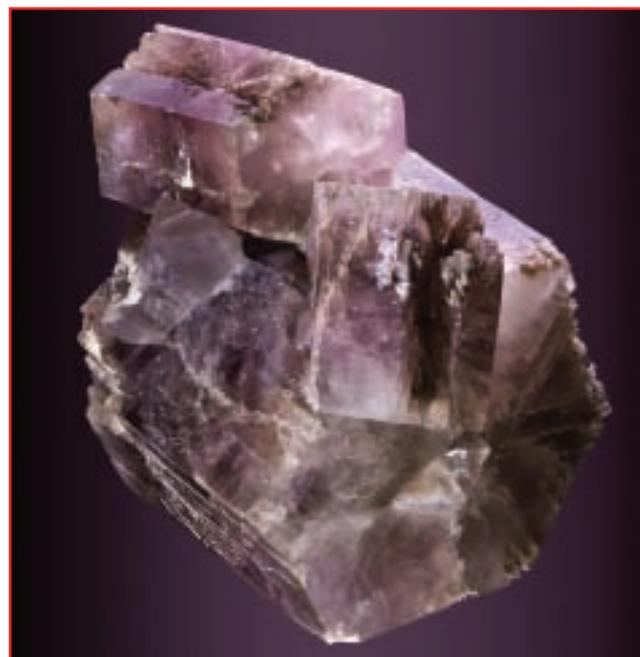
1) Sistema monometrico o cubico. La cella può avere tre forme: un cubo, un cubo centrato; un cubo con le facce centrate. Il gruppo di simmetria è quello delle simmetrie di un cubo.

2) Sistema tetragonale. La cella può avere due forme possibili: un prisma retto a base quadrata o un prisma retto a base quadrata centrato. Il gruppo di simmetria è quello del prisma a base quadrata, e le riflessioni avvengono rispetto ai piani perpendicolari agli assi di rotazione.

3) Sistema esagonale. La cella è un prisma retto che ha come base un rombo con gli angoli di 60 gradi e 120 gradi. Questo reticolo ha le simmetrie di un prisma a base esagonale, con un piano di simmetria parallelo alla base del prisma (che quindi contengono l'asse di rotazione di ordine 6 e tre assi, uno ciascuno, di ordine 2), e altri tre piani che

contengono l'asse di ordine 6 e gli altri tre assi di ordine 2, ossia ogni asse è perpendicolare a un piano e viceversa.

4) Sistema trigonale o romboedrico. La cella ha una forma piuttosto complicata: è un prisma uguale a quello del sistema esagonale centrato in due punti lungo una delle diagonali maggiori, ovvero un romboedro le cui facce sono costituite da rombi uguali con angoli diversi da 90 gradi e da 60 o 120 gradi. Il gruppo di simmetria è quello del prisma a base triangolare, i piani di simmetria sono perpendicolari agli assi di rotazione di 180 gradi.



Aragonite

5) Sistema ortorombico. Le possibili forme della cella sono quattro: un parallelepipedo rettangolo, un parallelepipedo rettangolo centrato; un parallelepipedo rettangolo con le facce centrate; un parallelepipedo rettangolo con solo due facce opposte centrate. Ha tre assi di rotazioni di ordine 2, che sono ortogonali fra loro, e tre piani ognuno dei quali contiene due di tali assi.

6) Sistema monoclinico. La cella può avere due forme possibili: un prisma retto con un parallelogrammo come base; un prisma retto come quello di prima ma centrato. Il gruppo di simmetria è formato da una sola rotazione di 180 gradi.

7) Sistema triclinico. La cella è un parallelepipedo qualsiasi che non rientra in alcuno dei casi precedenti. Il gruppo di simmetria è generato dalla simmetria centrale rispetto al centro della cella.

Insomma, c'è più matematica in un cristallo di quanto non si possa immaginare a colpo d'occhio!

Foto di Gia.cossa



Berillo

Foto di Didier Descouens

© Università degli Studi di Milano - Centro "matematica"

Iacopo Frattini

Laureato in Matematica all'Università degli Studi di Milano, lavora nell'ambito finanziario presso una banca di Milano.
iacopo81@gmail.com



Dai cristalli alle simmetrie del cubo

Una proposta da sperimentare in classe

Fluorite

di ANNA ASTI

Le indicazioni nazionali per le scuole secondarie superiori pongono l'enfasi "sulla necessità di costruire, attraverso il dialogo tra le diverse discipline, un profilo coerente e unitario dei processi culturali. Progettare percorsi di effettiva intersezione tra le materie è compito della programmazione collegiale dei dipartimenti disciplinari e dei consigli di classe"¹.

Vi proponiamo qui un'esemplificazione di come ciò possa essere fatto a partire dall'articolo "Tutti pazzi per i cristalli", di Gilberto Bini e Jacopo Frattini

Dall'osservazione dei cristalli si può risalire alla loro classificazione basandosi sugli elementi di simmetria che presentano. Un cristallo può essere ricostruito dal punto di vista matematico a partire da una sua qualsiasi cella, che con

sole operazioni di traslazione genera l'intero cristallo. In particolare, nel sistema monometrico o cubico il gruppo di simmetria è quello delle simmetrie di un cubo.

Tra le tante modalità che possono essere utilizzate per affrontare questo nucleo importante in classe, prediligiamo quella laboratoriale. Le attività che descriveremo di seguito prendono spunto da quelle ideate e proposte dal Centro "matematita"².

Dapprima elenchiamo e descriviamo tutte le possibili rotazioni che mandano un cubo in se stesso.

Individuiamo innanzitutto quali sono i possibili assi di rotazione, cioè le rette attorno alle quali far ruotare il cubo in modo che torni in se stesso. Queste rette possono essere di tre tipi.

Rette che passano per i centri di due facce opposte (Figura 1). Le rotazioni intorno a queste rette di $1/4$, $1/2$ e $3/4$ di giro sono simmetrie del cubo, così come la rotazione di un giro completo, che corrisponde all'identità. Nel cubo ci sono tre distinte rette di questo tipo e quindi abbiamo individuato dieci simmetrie.

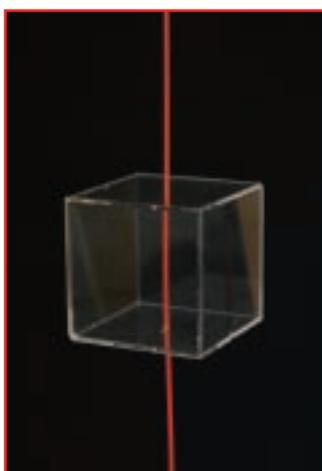


Figura 1. L'asse di rotazione di ordine 4 che passa per i centri di due facce opposte di un cubo

Anna Asti

Laureata in Matematica all'Università degli Studi di Milano, ha conseguito le abilitazioni all'insegnamento nella Scuola Secondaria di primo e secondo grado. Ha una ventennale esperienza maturata come docente nella scuola e collabora con il Centro "matematita", occupandosi di ricerca nella didattica della matematica e di formazione degli insegnanti. annaastimariani@gmail.com





Figura 2. L'asse di rotazione di ordine 2 che passa per i punti medi di due spigoli opposti di un cubo



Figura 3. L'asse di rotazione di ordine 2 che passa per i punti medi di due spigoli opposti di un cubo

Le simmetrie del cubo è reperibile su *Youtube* al link <https://www.youtube.com/watch?v=gBg4-lJ19Gg>

Oltre alle 24 simmetrie di rotazione, che abbiamo individuato, possono essere esplorate le riflessioni. Ci sono nove simmetrie di riflessione rispetto a nove piani di simmetria, cioè rispetto a quei piani che lo dividono in due parti, l'una immagine speculare dell'altra (Figura 4). Se consideriamo tutti insieme i piani di simmetria che abbiamo osservato in precedenza, essi dividono la superficie del cubo in 48 triangoli uguali e il cubo stesso in 48 parti uguali (Figura 5).

“Ciascuna di queste parti è una piramide, il cui vertice è nel centro del cubo e la cui base è un triangolo che ha per vertici: un vertice del cubo, il punto medio di uno degli spigoli uscenti da questo vertice, il centro di una delle facce che si appoggiano a questo spigolo.”³

Scelta come riferimento una di queste 48 piramidi, ogni simmetria del cubo la sposta in una delle 48 posizioni possibili, compresa quella da cui era partita.

Per visualizzare gli elementi del gruppo di simmetria del cubo può essere utile prendere come riferimento un particolare oggetto e visualizzare su di esso l'effetto delle diverse trasformazioni; un oggetto comodo da questo

Rette passanti per i punti medi di due spigoli opposti (Figura 2).

Le rotazioni attorno a queste rette che fissano il cubo (a parte l'identità, che abbiamo già contato) sono solo quelle di mezzo giro; le rette di questo tipo sono sei e quindi abbiamo trovato altre sei simmetrie del cubo.

Rette passanti per due vertici opposti (Figura 3).

Il cubo in questo ultimo caso può essere ruotato di $1/3$ o $2/3$ di giro (a parte l'identità, che abbiamo già contato); ci sono quattro coppie di vertici opposti e quindi altre otto simmetrie di rotazione.

Ci sono, dunque, in totale, 24 differenti simmetrie di rotazione. Per esplorarle, è possibile utilizzare la [scheda 2](#) del laboratorio “Simmetrie del cubo” ideato da Gilberto Bini e Luca Ugaglia e sperimentato all'interno del Progetto Lauree Scientifiche.

Un'animazione interessante che visualizza le

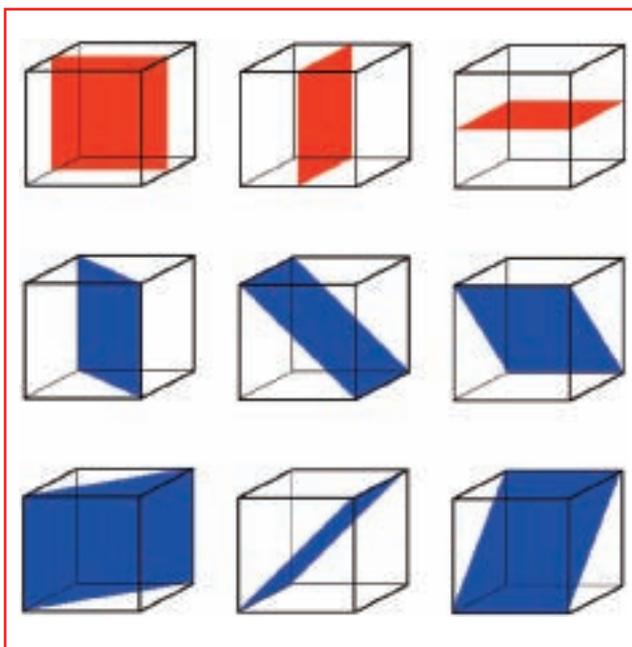


Figura 4. I nove piani di simmetria di un cubo: in rosso i tre piani paralleli a una coppia di facce opposte, in blu i sei piani che contengono una coppia di spigoli opposti

punto di vista è una piramide che ha per vertici: il centro del cubo, un vertice del cubo, il punto medio di uno spigolo che esce da questo vertice, il centro di una faccia che si appoggia a questo spigolo (Figura 6).

Per un'attività laboratoriale sulle simmetrie di riflessione è possibile utilizzare la [scheda 3](#) del laboratorio “Simmetrie del cubo” (di cui abbiamo parlato sopra).

Le simmetrie non sono finite qui, ma ne rimangono altre 15, che si possono vedere come trasformazioni composte, cioè ottenute facendo seguire una all'altra due trasformazioni, e considerando poi la trasformazione complessiva. Se componiamo due delle 24 rotazioni, non scopriamo nessuna nuova simmetria, perché il risultato è ancora una rotazione. Se invece componiamo una delle nove riflessioni

con ognuna delle 24 rotazioni, troviamo tutte le 24 rimanenti simmetrie del cubo che non sono rotazioni: quelle cercate (tra le quali ci saranno anche le nove riflessioni).

Sempre all'interno del laboratorio “Simmetrie del cubo” è possibile utilizzare la scheda “Una simme-

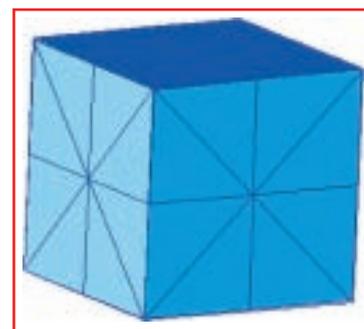


Figura 5. Un cubo, con la traccia lasciata sulla sua superficie da tutti i suoi piani di simmetria.

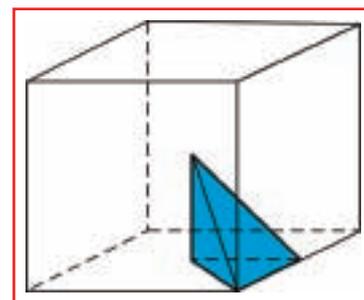


Figura 6

tria dopo l'altra" (Scheda 4) per accompagnare gli studenti nella scoperta di cosa accade componendo le simmetrie di cui sopra.

Le 48 simmetrie del cubo formano un insieme con interessanti proprietà⁴. Il risultato della composizione di due o più elementi è sempre un elemento dell'insieme. La trasformazione identità è l'elemento neutro dell'insieme, nel senso che ogni simmetria del cubo composta con l'identità rimane se stessa. L'ordine, con cui si compongono le trasformazioni, influisce generalmente sul risultato finale. Ogni simmetria del cubo è in un rapporto privilegiato con la sua inversa. Infatti, se una simmetria viene composta con la sua inversa, indipendentemente dall'ordine, il risultato è l'identità. Infine, ogni simmetria del cubo composta con se stessa un certo numero di volte (che dipende dalla simmetria) è uguale all'identità. Nel descrivere le caratteristiche dell'insieme delle simmetrie del cubo, abbiamo dato un esempio di uno dei più importanti concetti matematici: la struttura di *gruppo*.

Le simmetrie del cubo, con l'operazione data dal fare prima una e poi un'altra di esse (la composizione), formano un gruppo; così come è un gruppo anche l'insieme dei numeri interi relativi con l'operazione di somma; infatti, la somma di due numeri interi è ancora un numero intero, il numero 0 ha per i numeri il ruolo che la trasformazione identità ha per l'insieme delle simmetrie del cubo, e ogni numero ha un rapporto privilegiato con il numero di segno opposto, perché ogni numero, sommato al suo opposto, fa zero.

Non possiamo pretendere che gli spunti forniti siano esaustivi: ma a chi fosse interessato ad approfondire l'argomento, suggeriamo di consultare il sito della mostra "Simmetria, giochi di specchi", in cui si possono trovare alcune idee per nuove attività interattive e laboratoriali.

Un cubo in una piazza di Porto (Portogallo): la verticale è l'asse di rotazione di ordine 3 del cubo (per due vertici opposti) e questo ce lo fa apparire inusuale rispetto alla posizione in cui la verticale è l'asse di rotazione di ordine 4 (per i centri di due facce opposte).

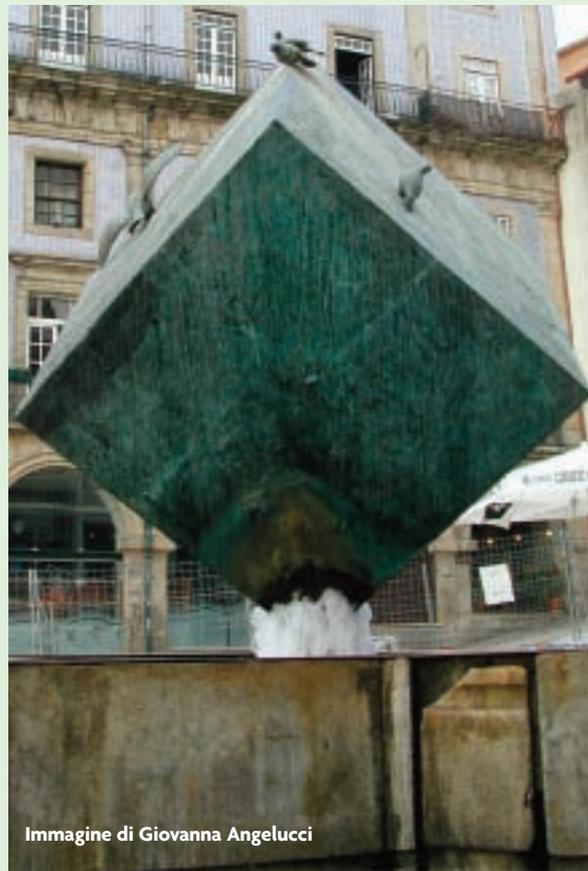


Immagine di Giovanna Angelucci

I gruppi

La moderna definizione di gruppo è stata data da Walther von Dick nel 1882. In precedenza, numerosi matematici avevano indagato le proprietà dei gruppi senza chiamarli in questo modo. Fra loro ricordiamo L. Eulero (1707-1783), C.F. Gauss (1777-1855), J.L. Lagrange (1736-1813), N. Abel (1802-1829) e É. Galois (1811-1832). Fondamentali anche i contributi di A.L. Cauchy (1789-1857). Lo studio dei gruppi di trasformazioni ha avuto inizio con S. Lie nel 1884; in particolare i sottogruppi discreti, e ancora quelli finiti (come le simmetrie del cubo), sono stati approfonditi soprattutto grazie alle ricerche di F. Klein (1849-1925).

Note

- 1 Indicazioni nazionali http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
- 2 *Le simmetrie del cubo* a cura di Cristina Vezzani per la mostra *Simmetria, giochi di specchi*.
- 3 "Camere di specchi e caleidoscopi: perché solo sei?", di Maria Dedò in *La matematica nella vita quotidiana* a cura di Simonetta Di Sieno, Marco Rigoli, Teresa Sichel, Mimesis, 2002.
- 4 *La famiglia delle simmetrie del cubo* a cura di Cristina Vezzani per la mostra *Simmetria, giochi di specchi*.

Il mistero dei cristalli giganti

di ANTONELLA TESTA

La resistenza delle ossa del nostro scheletro, la lucentezza dei cosmetici, la simmetria dei cristalli di ghiaccio, la tenacità del diamante: sono proprietà di cui oggi conosciamo molti dettagli. Da un secolo a questa parte la cristallografia ha avuto un poderoso sviluppo di conoscenze che hanno rivelato le relazioni tra struttura atomica o molecolare dei cristalli e le loro proprietà. Un insieme di saperi che ha dato vita ad applicazioni di ogni sorta: dispositivi elettronici, leghe leggere dei telai delle biciclette, farmaci, ... Un insieme di saperi che si celebra nel 2014, Anno Internazionale della Cristallografia, a un secolo dal primo di una serie di premi Nobel in questo settore, quello a Max Von Laue per la scoperta della diffrazione a raggi X dei cristalli.

Ma le proprietà di molti cristalli sono note fin dall'Antichità. Da qui prende le mosse il documentario *Il mistero dei cristalli giganti*, di Juan Manuel García Ruiz per la regia di Javier Trueba (Madrid Scientific Films, Spagna, 2010, 50 min). Il titolo rievoca le parole di Plinio il Vecchio, che nella sua celebre *Historia Naturalis* – enciclopedia ante-litteram in 37 volumi – descrive il lapis specularis, minerale traslucido costituito da gesso puro estratto in enormi cristalli nella zona di Segóbriga, nella Spagna romana. Esfoliato in lamine di qualsivoglia spessore, forniva lastre trasparenti che, dalle miniere spagnole, viaggiavano per ogni luogo dell'Impero ed erano usate per separare gli ambienti delle terme, costruire serre, chiudere i vani delle sofisticate case romane. Una materia prima preziosa condannata all'oblio non appena furono acquisite le tecniche necessarie per produrre il vetro piano. Questa è, fra l'altro, l'origine della confusione tra vetro e cristallo che regna ancora oggi, perché d'ora in poi "cristallo" sarà un termine impropriamente usato anche per definire qualsiasi materiale trasparente ed economico dalla struttura amorfa, che cristallo non è.

Il documentario è un viaggio che, partendo dalle riscoperte miniere di Segóbriga, fa successivamente tappa in altri singolari luoghi del Pianeta che custodiscono cristalli di dimensioni eccezionali, per svelarne la bellezza e la scienza che li governa. Ci spostiamo innanzitutto 600 km più a Sud, nella provincia di Almería, dove il massiccio sfruttamento minerario ha casualmente risparmiato il grande geode di Pulpi, una cavità lunga 8 metri e larga 2 con enormi cristalli di gesso meravigliosamente trasparenti, che sembrano ghiaccio.

Poi, oltreoceano, nelle profondità del deserto messicano di Chihuahua, scenario di molti film western, esploriamo la celebre Grotta delle Spade, che prende il nome dalla fitta copertura di lunghi cristalli che si stagliano dalle pareti alla stregua di spade minacciose.

8000 km più a Sud, nella parte occidentale della Cordigliera delle Ande, in Cile, gli scavi della più grande miniera sotterranea al mondo hanno svelato l'esistenza di molte grotte con i più grandi cristalli di gesso fino ad allora noti. Tra esse la Caverna dei Cristalli, visitata da turisti di ogni parte del mondo, con pareti ricoperte da cristalli dorati di pirite e di barite e, qua e là, immensi cristalli di gesso lunghi fino a 7,5 m, che attraversano l'intera caverna.



I cristalli di gesso della miniera di Naica. La presenza di una persona, in basso a destra, permette di valutare le dimensioni dei cristalli

Torniamo infine a Naica, perché, nascosta alla profondità di 290 metri, c'è una grotta – scoperta dai minatori nel 2000 – che offre uno scenario mozzafiato. È l'unico posto dove Superman si sentirebbe a casa – suggerisce il film – perché sembra di essere nella sua fortezza della solitudine. Dalle superfici rossastre, ricche di ossidi di ferro, si elevano vere "travi" di gesso trasparenti lunghe fino a 10 metri, larghe oltre 1, alcune dal pavimento fino al soffitto rimaste immerse nelle acque fino al 1975, quando l'attività mineraria ha richiesto il prosciugamento delle acque di profondità.

Come si formano cristalli così enormi? Perché in alcune grotte le pareti sono completamente ricoperte da un'infinità di piccoli cristalli mentre altre grotte sono occupate soltanto da poche gigantesche colonne? Qual è la velocità di crescita dei cristalli giganti? Come possono sussistere strutture così imponenti, senza soffrire il proprio peso e le scosse sismiche?

Il cristallografo Juan Manuel Garcia Ruiz, dell'Università di Granada, che accompagna lo spettatore nel viaggio, è stato uno dei primi scienziati ad occuparsi del sito e risponde ai quesiti. Grazie a sofisticate apparecchiature, ha potuto stimare che i cristalli di Naica crescono a un ritmo lentissimo, della misura dello spessore di un capello ogni secolo! Ciò significa che queste strutture possono aver raggiunto tali dimensioni in mezzo milione di anni... e sono pertanto un prezioso registro del tempo che scorre.

Il documentario è stato distribuito in DVD. L'edizione italiana è stata curata dall'Associazione Italiana di Cristallografia.

Antonella Testa

Ha conseguito la laurea in Fisica e il dottorato in Storia della Fisica; si occupa di storia della scienza, storia della strumentazione fisico-astronomica e di comunicazione scientifica presso l'Università degli Studi di Milano. Cura e collabora a iniziative di diffusione di cultura scientifica tra cui, dal 1997, il festival del film e del documentario scientifico *Vedere la Scienza Festival*, di cui dirige il programma. antonella.testa@unimi.it





Da George Orwell a Philip Dick

di LINDA PAGLI

Quando improvvisamente, a causa delle rivelazioni di Edward Snowden, ex agente della CIA, gli americani, e con loro tutto il mondo, sono venuti a sapere della grande operazione di spionaggio su Internet, chiamata data gate, l'indignazione dei cittadini, amplificata dai media, è stata enorme

Constatare che le comunicazioni personali potessero essere controllate su larga scala ha fatto capire che i confini della *privacy* erano stati decisamente oltrepassati, anche se da questa parte dell'oceano, essendo gli individui per tradizione e cultura meno inclini ad aver fiducia nelle istituzioni e nella limpidezza delle operazioni che si svolgono nei luoghi di potere, la reazione non è stata di stupore, anzi, la notizia è stata accolta solo come una conferma di sospetti già ben articolati.

La rete si presta bene al controllo globale: tutti gli indirizzi dei siti ai quali accediamo vengono memorizzati dal programma di navigazione che usiamo. È noto che *Gmail*, il servizio di posta elettronica di *Google*, archivia nelle sue memorie di dimensione praticamente infinita il contenuto di tutte le *e-mail* scambiate tramite quel servizio. *Gmail* si è diffuso rapidamente perché non mette limiti allo spazio a disposizione dell'utente. In generale, tutta la posta che viene scambiata elettronicamente passa in chiaro (non crittografata) sulla rete e può essere intercettata con facilità da solerti spioni. Un mes-

saggio di posta elettronica va usato come una cartolina postale, quello che si scrive è leggibile. Se se ne vuole sigillare il contenuto in una busta, occorre crittografarlo.

Tutti i dati che provengono dalle nostre *mail* e più in generale da tutti i nostri contatti con il *web* vengono memorizzati, filtrati, incrociati e analizzati. Essi contengono tante *parole* che possono aver valore in contesti diversi e diventare *parole chiave* per ricerche di vario tipo, come indagini di mercato o sondaggi di opinione. I dati memorizzati, nel loro insieme, hanno un valore e possono essere ceduti al miglior offerente, che sia l'agenzia di stato alla caccia di peri-



Edward Snowden

colosi terroristi, il politico che misura consensi in campagna elettorale o una multinazionale in cerca di nuovi affari.

Tanti servizi *web* ci vengono offerti gratuitamente ma noi, più o meno inconsapevolmente, li paghiamo affidando al *web* tutti i nostri dati personali, le nostre emozioni, le nostre relazioni e i nostri “segreti”.

George Orwell parlava dell'anno 1984, in cui in un brutto mondo del futuro (rispetto al 1948 quando Orwell scrisse il romanzo *1984*) il Grande Fratello, capo di un'organizzazione totalitaria a cui era quasi impossibile sfuggire, spiava le azioni di tutti quanti. Adesso il Grande Fratello (nome ormai svilito da tanta tv spazzatura), cioè il controllo capillare e globale, non è più fantascienza, ma è reso possibile dalla rete e attuato costantemente dai giganti del *web* (come Google, Facebook, Amazon ecc.) e da chi ha accesso a questi dati. Anche se è in corso un'ampia discussione per stabilire le regole della proprietà dei dati e le operazioni lecite su di essi, non ci sono ancora leggi in merito. Inoltre la rete evolve sempre troppo velocemente perché una legge, una volta discussa e varata, non risulti già obsoleta al momento di entrare in vigore.

Le leggi si scontrano anche con la dimensione della “statalità”, che, diversamente dalla rete, risponde invece a leggi globali ed è “protetta” da una resistenza diffusa del popolo del *web* a volerla regolamentare. Esiste una spinta notevole per permettere che i “dati” della rete non appartengano più ai proprietari, ma diventino un bene comune; con un po' di pessimismo ci sembra di capire che se, e quando, questo succederà, dai dati sarà già stato spremuto tutto il possibile. Il presidente Obama ha tentato di calmare l'opinione pubblica dichiarando che i programmi di controllo analizzano soltanto i dati anonimi alla ricerca di “pattern” indicatori. Si dice che questi programmi considerino i *metadati* (cioè dati che riguardano altri dati), vale a dire che raccolgono soltanto le etichette e le relazioni tra i dati, non il contenuto vero e proprio. La distinzione, però, tra dati e metadati è molto labile: per esempio, il contenuto di un *tweet* una volta rimbalzato (*retweet*) genera metadati; inoltre il presidente americano ha ammesso l'esistenza soltanto di una parte, quella apparentemente più difendibile, del programma, e ha taciuto il resto. Così facendo, ha anche implicitamente dichiarato che il programma di spionaggio è ancora più complesso e articolato, quindi più preoccupante di quello che ci si aspettava. Il programma si chiama “Prism” e permette di analizzare i dati attraverso un grande prisma che ne scompone i “raggi”, consentendone interpretazioni diverse.

Ma che cosa significa cercare “pattern” nei dati? Precisamente non lo sappiamo, ma conosciamo il punto di partenza: ci sono a disposizione una montagna di dati, un numero praticamente illimitato di processori molto potenti e veloci, memorie gigantesche, algoritmi sofisticati e tecniche

statistiche. Una miscela esplosiva per ricavare tantissime informazioni utili. Cercare un “pattern” significa, per esempio, fare analisi sui dati per estrarne delle correlazioni: anche se la causa non è nota, possono esistere situazioni che ne provocano altre; dall'analisi del comportamento di una persona (per esempio dal tipo di acquisti, dagli accessi a siti *web* ecc., o dal funzionamento di una macchina, come dai dati relativi alla temperatura, al consumo di corrente ecc.) si possono fare delle previsioni statistiche: un “pattern” specifico ha delle particolari conseguenze, non si capisce perché, ma il rapporto causa-effetto è determinato statisticamente dalle moltissime volte che una concomitanza di cause ha prodotto il medesimo effetto. Per usare

una metafora medica, alcuni sintomi specifici sono indice di un certo tipo di malattia, come si è riscontrato in tanti altri casi. Si cerca quindi di individuare schemi ricorrenti che consentano di prevedere che cosa capiterà in futuro. Si prevede che succederà, anche se non si sa perché debba succedere.

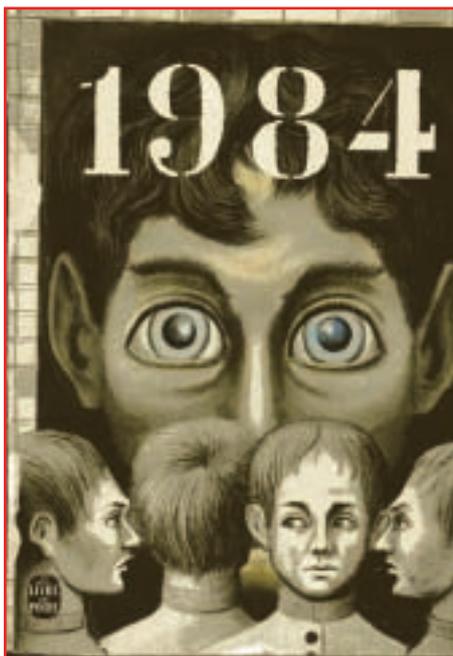
Un esempio pratico è quello di una ricerca canadese che studia grandi quantità di dati per prevenire le infezioni nei neonati prematuri. Vengono costantemente raccolti sedici parametri vitali, come il battito cardiaco, il ritmo respiratorio e altri. Questi parametri formano un flusso che prevede più di 100 dati al secondo. È stato osservato che esiste una correlazione tra piccolissime variazioni di questi dati e problemi molto più gravi che insorgono dopo un po' di tempo. Non se ne conosce il mo-

tivo, ma lo studio minuzioso di questi dati può essere utilissimo per intervenire tempestivamente e prevenire complicazioni.

Un altro modo, completamente diverso, di andare alla ricerca di “pattern”, è quello di operare sulla struttura stessa della rete di connessioni presenti nel *web*. Le connessioni interessanti, per esempio, sono quelle a forma di *stella*, cioè quelle che individuano un punto della rete che concentra numerosissime connessioni. Le stelle, dette, *grandi attrattori* nel gergo di chi studia le reti, sono importantissime per capire gli orientamenti delle opinioni e eventualmente per pilotarle. Se una persona è estremamente popolare, la sua opinione potrà avere influenza su moltissime altre.

Dal punto di vista computazionale, cioè dei sistemi automatici che fanno queste rilevazioni, trovare le stelle è facile; basta contare il numero di collegamenti in entrata per ogni elemento della rete in esame, come per esempio il numero di seguaci o *followers* in una rete sociale. Altri tipi di sottoreti interessanti non sono così immediatamente rintracciabili, come racconta il prossimo esempio.

Una banda di criminali decide di fare uso del *web* per scambiarsi materiale proibito e informazioni segrete. I suoi membri pensano che il modo migliore di passare inosserva-



La copertina del libro di George Orwell, *1984*, nell'edizione francese del 1964

ti sia quello di iscriversi a una qualsiasi rete sociale, crearsi la rete di amicizia al suo interno e scambiarsi uno con l'altro messaggi crittografati.

Nonostante le precauzioni, questa circolazione di messaggi in codice insospettisce la polizia addetta al controllo della rete: non riuscendo a forzare lo schema crittografico adottato dai malviventi e volendo tuttavia identificarli, la polizia decide di analizzare la rete in modo alternativo, cercando di isolare comunità o sottoreti unite da interessi comuni. Stima che la sottorete da individuare sia costituita da una decina di persone, che gli scambi debbano avvenire ad alta intensità e soprattutto che questi scambi producano interazioni da ogni membro della banda verso tutti gli altri. Il compito di scoprire la banda viene assegnato all'agente più giovane.

Se la rete sociale ha 1000 utenti e si pensa che la banda criminale sia composta di 10 persone, l'agente deve trovare se esiste una sottorete completa di 10 elementi (detta *10-clique* in teoria dei grafi), cioè una sottorete dove ogni coppia di elementi possiede un collegamento diretto. L'agente è un esperto programmatore ma, dopo aver riflettuto un po', non trova soluzione migliore al problema se non quella di un algoritmo che genera e controlla tutti i possibili gruppi di 10 elementi. L'algoritmo assegna quindi i numeri da 1 a 1000 agli elementi della rete e seleziona tutti i gruppi di 10 elementi presi da un insieme di 1000; controlla poi, in ciascun gruppo, se tra ogni coppia di elementi esiste una connessione. In tal caso il gruppo deve essere considerato sospetto e sottoposto a più stretta sorveglianza. I gruppi vengono generati ordinatamente: (1, 2, ..., 9, 10), (1, 2, ..., 9, 11), (10, 11, ..., 19, 20), ..., ecc.. L'algoritmo sembra non terminare mai e il giovane agente già s'immagina le ire dei superiori. L'agente e i suoi superiori non sanno che un procedimento più sbrigativo di quello adottato dall'agente, che semplicemente elenca uno dopo l'altro tutti i possibili gruppi per scoprire un'eventuale *10-clique*, non è conosciuto.

L'algoritmo deve generare tutte le combinazioni di n ($=1000$) elementi a gruppi di k ($=10$). Il numero di queste combinazioni è dato dal coefficiente binomiale $C(1000; 10) = 1000! / (10! (1000-10)!)$ che dà luogo a un numero spropositato di gruppi, pari circa a 2.64×10^{24} . Un esempio di reti con $n = 12$ e $k = 4$ è mostrato in figura 1. In generale, se n è la dimensione della rete e k quella della sottorete, il numero delle combinazioni di n elementi a gruppi di k , $C(n; k)$ può essere limitato superiormente da n^k , che, al crescere di k linearmente, diventa esponenziale in n .

Sfortunatamente, non è nota una strategia efficiente che scopra una *k-clique* o stabilisca che tale sottorete non esista. Quest'affermazione è vera in generale, ma possono presentarsi casi particolari di reti per cui esistono delle scorciatoie: per esempio, affinché una *k-clique* esista, bisogna che esi-

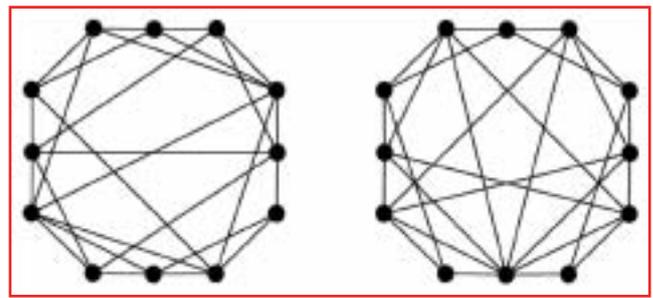


Figura 1. Due reti di 12 elementi. La prima non contiene *4-clique* mentre la seconda ne contiene 2. Siete in grado di individuarle?

stano almeno k elementi connessi ad almeno altri $k - 1$ elementi. Ora, questa condizione può essere verificata velocemente e, se sussiste, è possibile rispondere negativamente in breve tempo. In caso contrario, e in generale, bisogna procedere come ha fatto l'agente, o applicare qualsiasi altro metodo enumerativo, sostanzialmente fare tutte le prove. Problemi come il precedente, per cui si conoscono soltanto metodi enumerativi di soluzione, che consumano un tempo che cresce esponenzialmente all'aumentare della dimensione dei parametri d'ingresso, si chiamano *problemi intrattabili*, proprio per indicare che in pratica (anche con un calcolatore molto veloce) non possono essere risolti. Su un problema delle dimensioni di una vera rete sociale sembra difficile trovare le bande di sospetti in tempo utile, ma nella realtà potrebbe essere sufficiente trovare una sottorete densa, cioè con un numero alto di connessioni tra un numero piccolo di elementi e andare a indagare su di essi.

In tutti i modi, per quanto abbia tantissime applicazioni utili, la ricerca dei "pattern" e il loro uso per la previsione e la prevenzione, ci fanno riflettere. Ricordano un po' la situazione di un libro di Philip Dick, *Minority Report*, in cui personaggi dai poteri speciali (chiamati *pre-cog*) sono in grado di prevedere il futuro e in particolare di prevedere atti criminali. Sulla base delle previsioni dei *pre-cog*, le persone colpevoli di eventuali delitti vengono messe in una sorta di terribile carcere del futuro prima di aver commesso il fatto. Se una persona si comporta in modo sospetto, per esempio comprando online manuali di costruzione di bombe fatte in casa o divise naziste, è auspicabile che una polizia che operi sulla rete si metta in allerta per controllarla più da vicino, ma è preoccupante arrivare a considerare potenziali criminali persone che hanno comportamenti normali solo perché questi comportamenti nel loro insieme costituiscono pattern giudicati come sospetti. Pensare che la rete verrà usata per prevenire potenziali criminali fa pensare alla ovvia possibilità di enormi errori di valutazione e soprattutto alla negazione del libero arbitrio. Per fortuna, tanti problemi interessanti su reti di grandi dimensioni sono ancora intrattabili!



Riferimenti bibliografici

- K. Cukier, V. Mayer-Shoenberger: Una montagna di dati. *Foreign Affairs*, *L'internazionale* giugno 2013
- F. Luccio, L. Pagli, G. Steel: *Mathematical and Algorithmic Foundations of the Internet*. CRC Press, USA 2102

Linda Pagli

È professore ordinario di Informatica presso il Dipartimento di Informatica dell'Università di Pisa. Le sue ricerche, iniziate nel campo delle strutture dei dati, si sono rivolte successivamente all'algoritmica anche per i sistemi distribuiti e per le reti. Ha svolto un'intensa attività nel campo dell'istruzione superiore per paesi in via di sviluppo. È coautrice di numerosi articoli scientifici e di quattro libri, uno di testo e tre di carattere divulgativo. pagli@di.unipi.it





La classifica finale dei giochi olimpici: una questione per matematici

di RENATO DE LEONE e ROBERTA SAGRIPANTI

Le applicazioni della Ricerca Operativa (RO) crescono ogni giorno di più. In tutte quelle situazioni in cui bisogna prendere delle “decisioni” (e se ne potrebbe stilare un lungo elenco), la Ricerca Operativa rappresenta un valido supporto. Oltre che nei problemi di pianificazione finanziaria e degli investimenti, pianificazione della produzione, gestione delle scorte di magazzino, logistica, ottimizzazione e determinazione dei turni del personale, *mix* produttivi, gestione del traffico aereo e dei trasporti, strategie militari, diete alimentari, simulazioni scientifiche e studi sulla struttura del Dna, la RO mostra le sue potenzialità anche quando è messa al servizio di campi inaspettati, come, per esempio, lo sport. Le sue applicazioni, insieme a quelle della *Management Science*, si rivelano essere, infatti, efficaci ed efficienti strumenti di supporto sia per misurare e migliorare le prestazioni dei giocatori e delle squadre, analizzare le strategie di gioco, aiutare i *team* a scegliere i migliori giocatori disponibili in un campionato sportivo, sia per far fronte a problemi e aspetti come l’assegnazione degli arbitri, l’analisi dei fattori economici e logistici, la valutazione di ogni singolo atleta e del suo *team*, la pianificazione di un torneo e in generale tutti gli aspetti che riguardano la politica di *marketing* delle società sportive. Senza dubbio una delle applicazioni principali della RO nello sport è la formulazione dei calendari delle competizioni sportive, data la necessità di programmi che soddisfino diversi tipi di vincoli, riguardanti sia gli atleti che il pub-

blico e gli sponsor. In effetti, i metodi della RO hanno aiutato con successo manager dei giocatori e dirigenti delle società, nonché tifosi e giornalisti sportivi, spesso desiderosi di conoscere le possibilità di una squadra di qualificarsi ai *playoff* in una data classifica. Per quanto quello tra Ricerca Operativa e sport possa sembrare un collegamento “non usuale”, uno dei primi studi a riguardo, a opera di Charles M. Mottley e George B. Dantzing, risale al 1954. Di seguito presentiamo un esempio concreto di applicazione della RO, in particolare della Programmazione Lineare Intera, nell’ambito della formulazione della classifica finale del medagliere dei Giochi Olimpici.

Guardando al medagliere olimpico dell’ultima edizione (figura 1), svoltasi a Londra dal 27 luglio al 12 agosto del 2012, i primi tre posti sono occupati da nazioni – Stati Uniti, Cina e Gran Bretagna – da sempre dominatrici dei Giochi. Scorrendo la classifica, all’ottavo posto troviamo l’Italia con un totale di 28 medaglie, vicino a grandi nazioni come Giappone e Australia, mentre al dodicesimo posto si classifica il Kazakistan con un totale di 13 medaglie. Non si può dire che il Kazakistan si sia ritrovato a mani vuote, dato che la sua bacheca comprende 7 medaglie d’oro, contro le 8 dell’Italia, che si trova quattro gradini più in alto per via delle medaglie di argento e bronzo. Ma a ben guardare, a volte le logiche di ordinamento delle nazioni possono sembrare ingiuste. Le nostre 28 medaglie dovrebbero infatti essere sufficienti a scavare un abisso tra noi e i ka-

Rank by Gold	Country	Gold	Silver	Bronze	Total
1	United States of America	40	29	29	98
2	People's Republic of China	38	27	22	87
3	Great Britain	29	17	19	65
4	Russian Federation	24	26	33	83
5	Republic of Korea	13	9	7	29
6	Germany	11	10	16	37
7	France	10	11	12	33
8	Italy	0	9	11	20
9	Hungary	0	4	9	13
10	Australia	7	16	12	35
11	Japan	7	14	11	32
12	Kazakhstan	7	7	9	23
13	Netherlands	6	6	9	21
14	Ukraine	0	5	9	14
15	Cuba	0	2	6	8
16	New Zealand	0	3	9	12
17	Islamic Republic of Iran	6	5	3	14
18	Jamaica	6	4	4	14
19	Czech Republic	6	5	5	16
20	Democratic People's Republic of Korea	6	0	2	8
21	Spain	3	10	4	17
22	Brazil	3	2	9	14
23	Belarus	3	5	5	13
24	South Africa	3	2	1	6
25	Ethiopia	3	1	3	7
26	Croatia	3	1	2	6
27	Russia	2	5	2	9
28	Korea	2	4	2	8
29	Denmark	2	4	3	9
30	Azerbaijan	2	2	6	10
31	Poland	2	2	6	10

Figura 1. Medagliere Olimpico Londra 2012

zaki, e invece questi tallonano l'Italia, dal momento che il numero degli ori è la prima voce che si utilizza per stilare la classifica.

I kazaki hanno dalla loro il rapporto abitanti/medaglie. Vivono in un Paese che ha una superficie di 2.724.900 kmq (praticamente 9 volte l'Italia), ma sono appena in 16.600.000, contro i nostri 60 milioni di abitanti. Tradotto in termini di densità, significa che riescono a "creare" un campione olimpico ogni 2 milioni e mezzo di abitanti circa, mentre da noi c'è una medaglia d'oro ogni 10 milioni di italiani. Quindi chi merita di stare più in alto nella classifica? Come si misura il vero "successo" di una nazione nello sport? Può una nazione di ridotte dimensioni essere messa direttamente a confronto con Paesi di cinque, se non dieci volte più grandi sia in termini geografici che nel numero di abitanti? Un'idea sarebbe quella di calcolare la classifica non in base al numero assoluto di medaglie, bensì in base al numero di medaglie "pro capite": questo potrebbe infatti essere un buon modo per valutare la propensione di uno Stato allo sport.

Sono vari e diversi i metodi alternativi con cui potrebbe essere stilata la classifica finale dei giochi olimpici, a seconda dell'obiettivo che ci si pone: vince chi ha più medaglie in totale o chi ha più medaglie d'oro? Vince chi ha più medaglie in proporzione al numero di abitanti oppure va assegnato un peso al valore delle medaglie, a seconda che siano d'oro, d'argento o di bronzo? Il modello analizzato di seguito, con pesi assegnati a ogni medaglia, mostra come varia la classifica finale al variare dei pesi: alcune nazioni salgono, altre scendono e altre, infine, rimangono stabili, indipendentemente dai pesi.

Il punto di partenza del problema è un'analisi effettuata da Michael Trick, Professore di Ricerca Operativa della Tepper School of Business, Carnegie Mellon University di Pittsburgh, riportata nel suo blog (<http://mat.tepper.cmu.edu/blog/>) ed effettuata a partire dal seguente medagliere (tratto da nbcolympics.com), relativo alle Olimpiadi invernali di Vancouver (Canada, 12-28 febbraio 2010).

COUNTRY	Gold	Silver	Bronze	Total
United States	9	15	13	37
Germany	10	13	7	30
Canada	14	7	5	26
Norway	9	8	6	23
Austria	4	6	6	16

Se si contano tutte le medaglie (oro+argento+bronzo), gli Stati Uniti hanno vinto, mentre se si contano soltanto le medaglie d'oro ha vinto il Canada. Se si assegna un peso pari a 5 per ogni oro, 3 per ogni argento, e 1 per ogni bronzo, gli Stati Uniti risultano ancora primi; se però i pesi fossero 10, 5, 1, il primo risulterebbe essere il Canada.

È anche lecito chiedersi: esiste una combinazione di pesi che porti a vincere la Germania? La risposta è negativa: sapreste dimostrarlo?

Di fatto, solo il Canada e gli Stati Uniti possono risultare primi, a seconda dei pesi che si assegnano a ciascuna medaglia. Ma come assegnare questi pesi in modo tale che la classifica sia la più equa possibile? È chiaro, come sottolinea Michael Trick, che non tutte le combinazioni di peso hanno senso, perché dare 10 punti per un bronzo e 1 punto per un oro non sarebbe in linea con la gara olimpica. Il peso della medaglia d'oro, quindi, dovrà essere maggiore o uguale al peso della medaglia d'argento, che a sua volta dovrà essere maggiore o uguale al peso della medaglia di bronzo. In questa ipotesi, quali sono i pesi che possono determinare una vittoria del Canada sugli Stati Uniti? Supponiamo di normalizzare i pesi in modo che la loro somma sia uguale ad 1, e assumiamo che i pesi delle tre medaglie siano non negativi. Con due sole nazioni il confronto è abbastanza facile: si determinano le due aree corrispondenti a quella costituita dai pesi che portano il Canada a vincere e quella costituita dai pesi che portano a vincere gli Stati Uniti, si confrontano e si determina la nazione vincitrice. L'approccio qui proposto è invece diverso e lascia a ciascuna nazione la possibilità di scegliere i pesi che preferisce e di stilare così una "sua" classifica.

Il problema che andremo ad analizzare rientra in quella che si chiama *Programmazione Lineare Intera*. L'aggettivo "lineare" indica che tutte le funzioni matematiche del modello (funzione obiettivo e vincoli) devono essere funzioni lineari. L'aggettivo "intera" si riferisce al fatto che alcune delle variabili sono vincolate ad assumere valori interi. Grazie alla sua generalità, questo modello si presta a rappresentare un grandissimo numero di problemi reali, caratterizzati dall'indivisibilità delle risorse e dalla necessità di scegliere tra un numero finito di alternative.

Ritornando al nostro problema, indichiamo con x_1 il peso delle medaglie d'oro, con x_2 il peso delle medaglie d'argento e con x_3 il peso delle medaglie di bronzo e calcoliamo la somma pesata, ovvero

$$Gx_1 + Sx_2 + Bx_3,$$

dove G, S e B indicano rispettivamente il numero delle medaglie d'oro (Gold), d'argento (Silver) e di bronzo (Bronze) conquistate.

Questa sarà la funzione che andremo a ottimizzare (funzione obiettivo).

Nel caso dell'Italia, avendo conquistato 8 medaglie d'oro, 9 d'argento e 11 di bronzo, si ottiene:

$$8x_1 + 9x_2 + 11x_3.$$

Per quanto detto prima, i pesi devono soddisfare le seguenti ipotesi (vincoli del problema):

- la loro somma è uguale 1

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1;$$

- sono tutti non negativi

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0,$$

$$x_3 \geq 0;$$

- peso oro \geq peso argento e peso argento \geq peso bronzo

$$x_1 \geq x_2;$$

$$x_2 \geq x_3.$$

Il problema, posto in questo modo, ha tre variabili. Dall'uguaglianza $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, però, otteniamo $x_3 = 1 - x_1 - x_2$, e quindi il problema si trasforma in un equivalente problema in due variabili il cui sistema dei vincoli diventa

$x_1 \geq x_2$
$x_2 \geq 1 - x_1 - x_2$
$1 - x_1 - x_2 \geq 0$
$x_3 = 1 - x_1 - x_2$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

La trasformazione della variabile x_3 agisce anche sulla funzione obiettivo che diventa:

$$\begin{aligned} Gx_1 + Sx_2 + Bx_3 = \\ Gx_1 + Sx_2 + B(1 - x_1 - x_2) = \\ (G - B)x_1 + (S - B)x_2 + B \end{aligned}$$

In questo problema, in cui sono presenti soltanto due va-

riabili (peso per la medaglia d'oro e peso per la medaglia d'argento), la soluzione può essere ottenuta con il metodo grafico, che consiste nella costruzione di un grafico bidimensionale con x_1 e x_2 come assi cartesiani. Il primo passo è individuare l'insieme di tutte le coppie (x_1, x_2) ammissibili, cioè soddisfacenti tutti i vincoli. Ciò viene fatto tracciando tutte le rette che delimitano la regione dei valori permessi da ciascun vincolo. Per prima cosa si osservi che le condizioni $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ limitano l'insieme dei punti al primo quadrante del piano cartesiano, inclusi gli assi. Successivamente si tracciano le rette associate a ciascun vincolo, cioè le tre rette di equazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= 1 - x_1 - x_2 \\ 1 - x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

La regione risultante, costituita dai valori (x_1, x_2) che soddisfano tutti i vincoli, è chiamata *regione ammissibile* e nel nostro caso (figura 2) essa è limitata e non vuota.

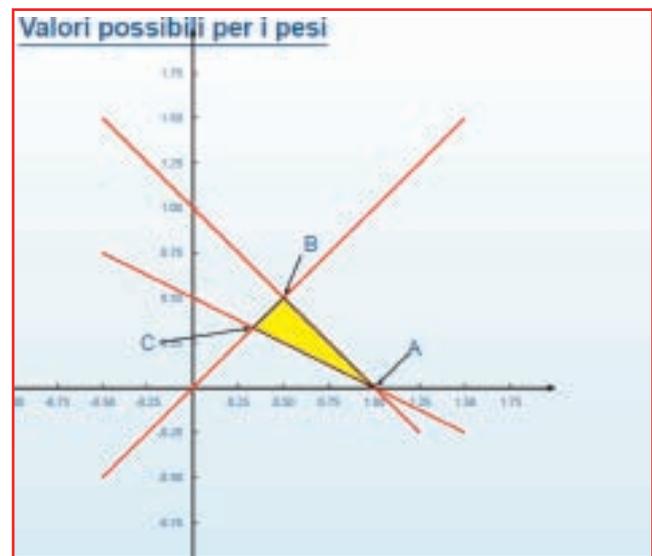


Figura 2

Il prossimo passo è determinare una soluzione ammissibile ottima, sulla base del valore della funzione obiettivo del

	Gold	Silver	Bronze	Total
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				
37				
38				

Figura 3

modello: bisogna, cioè, determinare il punto ammissibile più alto per la funzione obiettivo. Uno dei risultati più importanti della Programmazione Lineare è che sotto opportune ipotesi (nel caso in esame soddisfatte), esiste almeno una soluzione ottima corrispondente a un vertice di questa regione. Qui ci sono tre vertici ammissibili:

- $A = (1, 0)$ che corrisponde al caso $G > S$.
In questo caso, la terna di pesi per G , S e B sarà $(1, 0, 0)$.
- $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ che corrisponde al caso $G \leq B$ e $S > B$.
In questo caso la terna di pesi sarà $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
- $C = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ che corrisponde al caso $G < B$ e $S \leq B$.
In questo caso la terna di pesi sarà $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
- Quando $G = S = B$ ogni possibile scelta ammissibile dei pesi porta allo stesso valore della funzione obiettivo.

L'analisi mostra però che questa ampia libertà di scelta dei pesi (diversi per ciascuna nazione) non porta a stabilire una classifica finale "ragionevole".

Una seconda strada che può essere utilizzata nello studio di questo problema prevede la sua formulazione in modo che ogni nazione scelga i pesi "migliori" (cioè la combinazione di pesi che la portano più in alto nel medagliere finale), confrontandosi con altre nazioni. Se G, S, B è il numero di medaglie d'oro, argento e bronzo di una certa nazione e $\hat{G}, \hat{S}, \hat{B}$ il numero delle medaglie d'oro, argento e bronzo di un'altra nazione, affinché la prima nazione sia più in alto nel medagliere della seconda dovrà verificarsi che

$$(G - B)x_1 + (S - B)x_2 + B \geq (\hat{G} - \hat{B})x_1 + (\hat{S} - \hat{B})x_2 + \hat{B}, \quad (1)$$

(anche qui la terza variabile x_3 è stata eliminata esprimendola in funzione delle altre due).

Non sempre però esistono pesi per cui questa disuguaglianza è verificata. È possibile introdurre una variabile y di tipo binario, ovvero una variabile che assuma solo due valori 0 e 1, la quale assuma valore 1 quando non esistono pesi che soddisfano la disuguaglianza (1) e 0 altrimenti.

Questo può essere ottenuto introducendo una costante M che assume valore molto grande (in modo che il termine $-My$ sia minore di $\hat{B} - B$) e modifica la disuguaglianza precedente come

$$(G - B)x_1 + (S - B)x_2 \geq (\hat{G} - \hat{B})x_1 + (\hat{S} - \hat{B})x_2 - My.$$

Il modello di PLI diventa allora

$$\min \sum y_i$$

$$x_1, x_2, x_3, y_i$$

dove l'indice i varia nell'insieme I delle nazioni coinvolte e i vincoli sono descritti in questo modo:

$$x_1 \geq x_2 \text{ soggetto a } x_1 + 2x_2 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$(G - B)x_1 + (S - B)x_2 \geq (G_i - B_i)x_1 + (S_i - B_i)x_2 - My_i$$

per ogni i di I , con $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_i \in \{0, 1\}$.

Qui la funzione obiettivo conta il numero delle nazioni per le quali non esiste alcuna scelta di pesi che consentono alla nazione in esame di essere in classifica con un punteggio complessivo più alto.

Oggi esistono *software* estremamente efficienti, in grado di risolvere in tempi rapidi problemi reali di PLI con centinaia di migliaia di variabili e milioni di vincoli. Anche *Excel*, tramite un suo componente aggiuntivo e la funzione Risolutore, è capace di risolvere questa classe di problemi. Per implementare il nostro modello con il *Solver* di *Excel*, basterà inserire la funzione obiettivo, le variabili e i vincoli; penserà poi il Risolutore ad analizzare le possibili soluzioni e individuare la soluzione ottima e il rispettivo valore ottimo, tutto ciò in tempi rapidi. Nella figura 3 è possibile vedere la risoluzione del nostro problema dove, in particolare, nelle celle evidenziate in giallo, troviamo i valori dei pesi assegnati alle medaglie d'oro, d'argento e bronzo. La cella P2 evidenziate in rosa riporta invece il valore ottimo della funzione obiettivo.

Sviluppando l'analisi per la Spagna si ha:

- il peso della medaglia d'oro è 0,545455
- il peso della medaglia d'argento è 0,454545
- il peso della medaglia di bronzo è 0
- il valore ottimo della funzione obiettivo è 11.

Questi sono i valori migliori possibili per la Spagna secondo il nostro modello: non esistono altre combinazioni di pesi che possono portarla più in alto nella classifica finale. Ciò implica che 11 nazioni saranno sempre più in alto nella classifica finale rispetto alla Spagna.

Guardiamo che cosa succede, invece, all'Italia, al Kazakistan e all'Australia. L'Italia rimane sempre all'ottavo posto e quindi non può migliorare ulteriormente la sua posizione, il Kazakistan dal dodicesimo posto sale al decimo e l'Australia dal decimo posto sale al sesto. Ovviamente, è possibile che ci siano degli *ex-aequo*, ma ciò accade qualunque sia la metodologia utilizzata per stilare la classifica.

Con il presente lavoro si è cercato, dunque, di dimostrare come una classifica, per quanto semplice e per nulla articolata, offra comunque buoni spunti di riflessione e permetta di analizzare nel dettaglio le diverse letture a cui si presta. Un'altra occasione per rimarcare, insomma, che i numeri necessitano di una lettura attenta, che non si soffermi alle facili conclusioni della prima occhiata!

Renato De Leone

Professore ordinario di Ricerca operativa presso l'Università degli Studi di Camerino, è stato Presidente dell'AIRO, Associazione Italiana di Ricerca operativa, dal 2007 al 2011. I suoi interessi vanno dall'ottimizzazione non lineare alla programmazione lineare a larga scala, dall'ottimizzazione nei sistemi di trasporto a modelli e algoritmi per problemi di classificazione.
renato.deleone@unicam.it



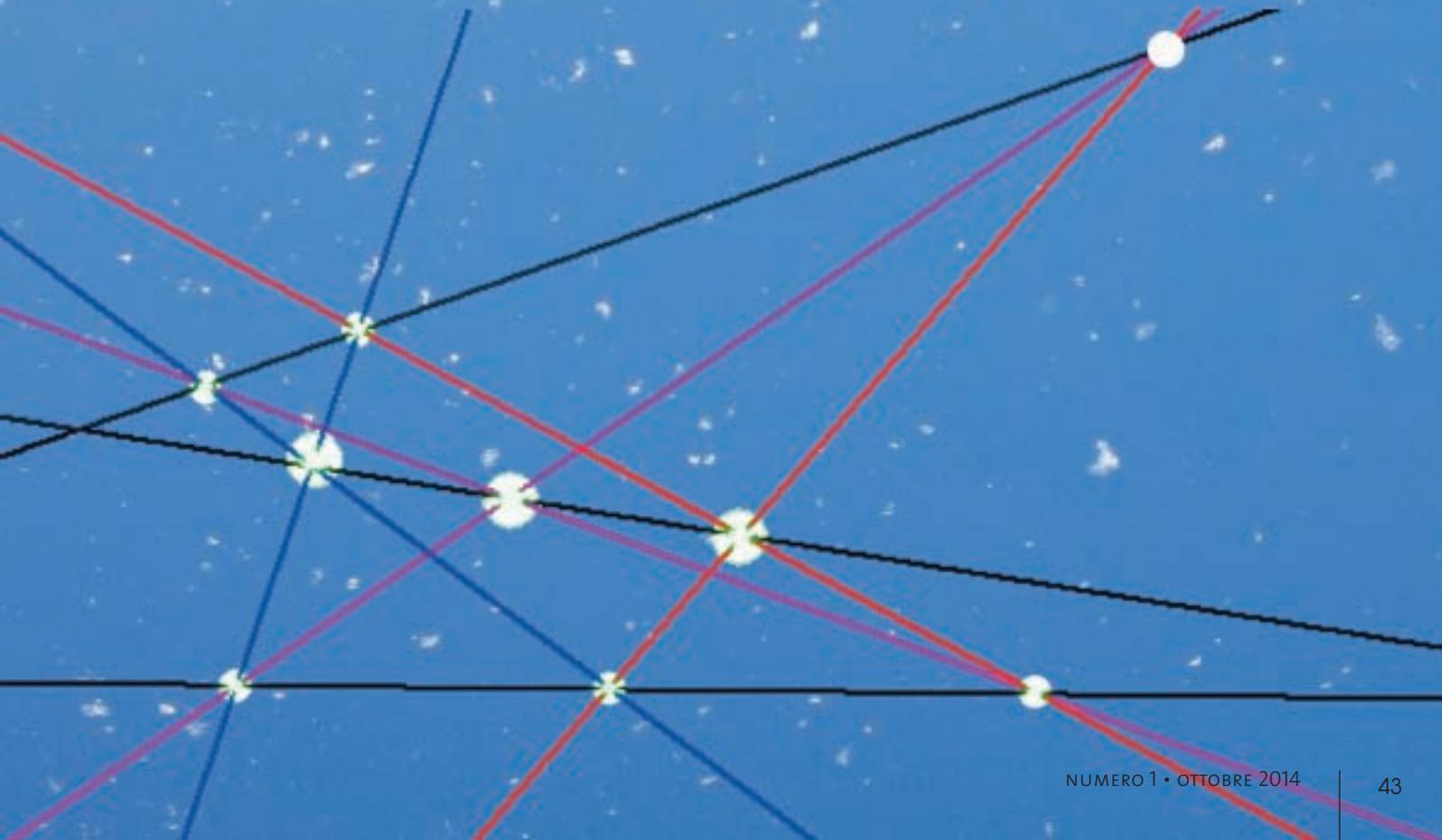
Roberta Sagripanti

Laureanda magistrale in Matematica e Applicazioni presso l'Università di Camerino, sta lavorando a una tesi in Modelli e Applicazioni dell'Ottimizzazione Stocastica, sotto la supervisione del prof. Renato De Leone. I suoi interessi spaziano in tutto ciò che è Ricerca Operativa. Il lavoro svolto per la tesi di laurea triennale le ha permesso di partecipare alla Conferenza AIRO 2012.
roberta84s@hotmail.it



La Via delle Immagini

pappo su Pappo



© Università degli Studi di Milano - Centro "matematica"

14 SETTEMBRE **2014** **Triennale**
23 NOVEMBRE **di Milano**

MaTeinItaly

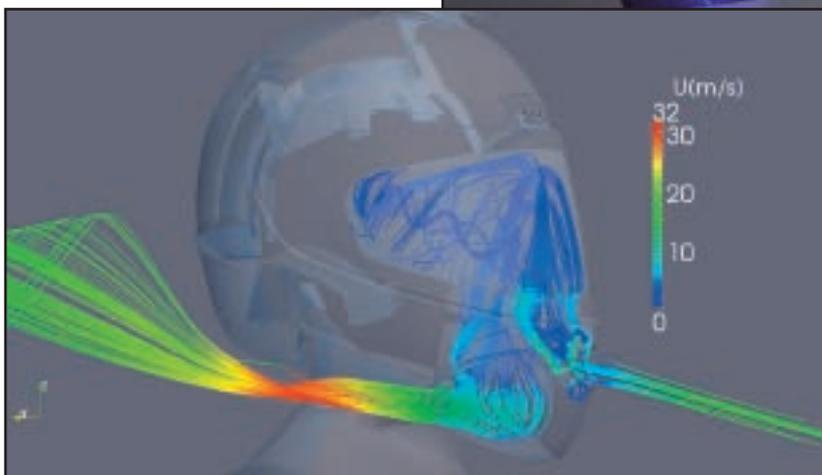
matematici alla scoperta del futuro

Una mostra organizzata dal Centro "matematita" e dal Centro PRISTEM

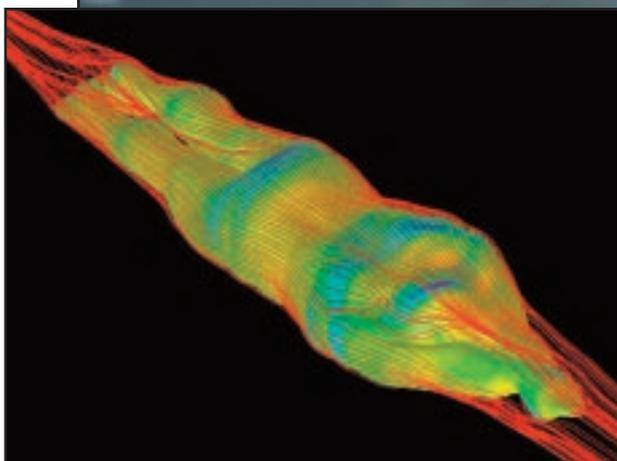
Se l'idea di matematica che vi siete fatti è di espressioni che non finiscono più, di trapezi che girano e rubinetti che riempiono vasche... beh, siete fuori strada.

Ma allora che cosa fanno i matematici?

I matematici trasformano i problemi in numeri e forme e, spesso, li risolvono. Poi, però, nuove domande nascono dallo stesso alfabeto della matematica.



L'attualità della matematica contemporanea vede un'esplosione del tema dei modelli negli ambiti più svariati: in medicina, nella finanza, nella gestione ottimale del traffico aereo e di quello ferroviario, nei problemi legati alla segretezza di varie operazioni (dalle carte di credito a Internet, ecc.).



E persino nello sport, per cui si studiano i migliori costumi dei nuotatori e il profilo superveloce delle barche.



Il matematico vive il fascino della libertà di costruire mondi diversi che nascono solo dalla sua immaginazione.

Spinto dalla curiosità, elabora nuove teorie che trovano poi, magari a distanza di decenni o di secoli, una conferma nel mondo reale.

