Caos sul tavolo da biliardo

di Marianne Freiberger

In queste pagine vi proponiamo l'articolo di Marianne Freiberger pubblicato sul sito +plus magazine [https://plus.maths.org/content/chaos-billiard-table] e tradotto da Anna Betti nell'ambito del "Translation Project" sul sito www.mathematics-in-europe.eu, il sito realizzato dalla Commissione della Società Matematica Europea che si occupa di divulgazione

Anche processi semplici possono portare al caos. Questo è il motivo per cui è difficile prevedere che tempo farà, l'andamento delle borse e tutta una serie di altri fenomeni che incontriamo nella vita quotidiana. I matematici tentano di venire a capo del caos osservando i sistemi più semplici in cui si crea. Un bell'esempio è il gioco del biliardo. "Un biliardo matematico è un'idealizzazione di quello reale: ci sono anche qui un tavolo e una palla, ma questa volta la palla non ha massa e quindi non c'è attrito" spiega Corinna Ulcigrai, matematica dell'Università di Bristol che ha studiato vari biliardi matematici. E continua: "La palla rimbalza ai bordi del tavolo secondo le stesse regole seguite da una palla reale". Ovvero si muove in linea retta fino a quando non colpisce un lato del tavolo e rimbalza seguendo la legge di riflessione (Fig. 1). Ma, a differenza che nel biliardo vero, non ci sono buche in cui la palla può cadere e poiché non c'è nemmeno alcun attrito, essa continuerà a muoversi senza mai fermarsi.

Che tipo di traiettoria seguirà la palla reale? "Se si lancia la palla in modo che colpisca uno dei lati del tavolo frontalmente (in modo, cioè, che la sua traiettoria formi un angolo retto con la parte colpita), essa tornerà indietro lungo la

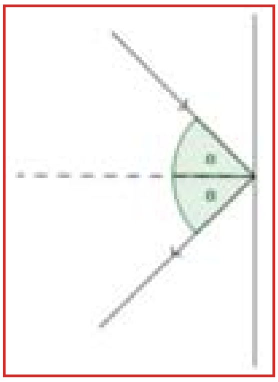

Figura 1. La legge di riflessione: l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione

stessa traiettoria con cui è arrivata, andando nella direzione opposta. Arriverà fino al lato opposto, colpendolo esattamente nel punto opposto a quello colpito inizialmente, e poi riprenderà nuovamente il suo percorso, continuando a rimbalzare tra i due punti opposti sempre lungo la stessa linea retta. In modo analogo, se si imprime una particolare direzione iniziale, si può essere sicuri che la palla continuerà a rimbalzare, a turno, esattamente nel punto centrale di tutti e quattro i lati del tavolo, e che ritornerà sempre nel punto da cui è partita, muovendosi sempre lungo gli stessi quattro segmenti (Fig. 2).

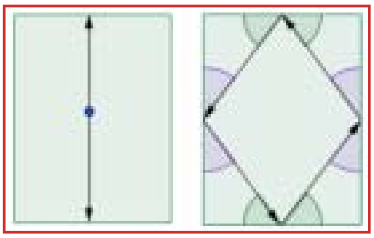

Figura 2. A sinistra: se si lancia una palla in modo che incontri il bordo ad angolo retto, continuerà a rimbalzare fra i due punti opposti del tavolo. A destra: si può fare in modo che la palla viaggi sempre lungo gli stessi quattro segmenti. Questi sono esempi di traiettorie periodiche

In realtà si è scoperto che questo comportamento regolare è molto raro. Negli anni Ottanta del secolo scorso, alcuni matematici dimostrarono che per la "stragrande maggioranza" delle direzioni iniziali, la traiettoria è molto più disordinata: la palla non solo non torna sui propri passi, ma finisce con l'esplorare l'intero tavolo da biliardo, avvicinandosi arbitrariamente a ciascun punto della sua superficie. Inoltre, per lo più visita ogni parte del tavolo in ugual misura: se si prendono due regioni del tavolo con area uguale, la traiettoria seguita è tale che la palla passa nelle due regioni la stessa quantità di tempo. Con "stragrande maggioranza" i matematici intendono dire che, dando alla palla una direzione a caso, quasi certamente essa si comporterà in modo ergodico. Questo comportamento è descritto dicendo che il biliardo è *ergodico*.
Ergodicità del biliardo significa che è veramente difficile predire dove si troverà la palla dopo una certa quantità di tempo. Per scoprirlo, bisognerebbe letteralmente tracciare su un foglio di carta il suo percorso, misurando meticolosamente angolo dopo angolo, perché non si può contare su alcuno schema regolare. Ciò potrebbe sembrare non così terribile: dopotutto si potrebbe programmare un computer che svolgesse velocemente il lavoro al posto nostro... Ma c'è un'altra, indipendente caratteristica che rende le cose più difficili. Se si misurano le condizioni iniziali della palla – il punto di partenza e la direzione del lancio iniziale – con un errore anche minimo, questo piccolo errore si propagherà a valanga, rendendo la previsione totalmente inaccurata. La *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali* è comunemente nota come "effetto farfalla" ed è uno dei tratti distintivi del caos.

Non solo gioco e divertimento

Per quanto riguarda il biliardo reale, il caos è ciò che probabilmente lo rende divertente. Chi avrebbe voglia di giocare a un gioco prevedibile? Tuttavia i matematici non studiano il biliardo per giocarci, ma perché varianti di questo gioco forniscono modelli di sistemi dinamici che si trovano in natura.
La nozione di ergodicità fu sviluppata nell'ambito dello studio delle particelle, per esempio delle molecole che compongono un gas, che muovendosi si urtano l'una contro l'altra. "L'ergodicità è una proprietà molto importante dei sistemi caotici", spiega Ulcigrai. "L'idea che molti sistemi dinamici siano ergodici risale al 19° secolo e fu espressa dal fisico Ludwig Boltzmann: tali sistemi sono talmente caotici che se si osserva la traiettoria di un punto, si vedrà che in qualche modo questo esplorerà tutto lo spazio disponibile (tutti i luoghi di quello spazio teoricamente possibili)".
Eppure, sorprendentemente, l'ergodicità può rendere il sistema più facile da predire. Esiste un risultato matematico, chiamato *Teorema ergodico di Birkhoff*, che dice che se un sistema è ergodico, allora, anche se non si può prevedere esattamente come si comporterà in futuro, è possibile prevedere con una certa accuratezza alcuni dati medi relativi a traiettorie tipiche. Per esempio, nel caso del biliardo, non si può prevedere esattamente dove si troverà una palla dopo un certo tempo, ma si può prevedere con accuratezza quanto di questo tempo essa passerà in una certa area del tavolo. Se invece si sta studiando un gas, anche se non è possibile dire esattamente dove saranno le sue diverse molecole in un dato momento, si può prevedere come varieranno grandezze quali la temperatura o la

Chi è Corinna Ulcigrai

Nata a Trieste nel 1980, si è laureata in Matematica alla Scuola Normale Superiore di Pisa nel 2002 e ha svolto un dottorato in Matematica all'Università di Princeton (USA), sotto la supervisione di Y. Sinai (vincitore del Premio Abel 2014), discutendo la sua tesi conclusiva nel 2007. Oggi è professore associato (*Reader*) in Matematica Pura presso l'Università di Bristol. La sua ricerca si svolge nell'ambito dei sistemi dinamici e della teoria ergodica. È una dei pochi esperti internazionali di dinamica di *Teichmüller* in Gran Bretagna e ha studiato le proprietà dinamiche e caotiche di biliardi poligonali e di flussi su superfici. Ha ricevuto, all'*European Congress of Mathematics* del 2012, il premio per giovani matematici della *European Mathematical Society*, e il Whitehead Prize 2013 della *London Mathematical Society*. È sposata con un matematico e ha un bimbo piccolo, come ha raccontato nel n. 2 di *XlaTangente* online.

Corinna Ulcigrai

pressione. Quindi, grazie a quello che sappiamo sui sistemi caotici, l'ergodicità è in realtà una buona cosa.

Cambiare forma

Un fenomeno naturale che, semplificato, si può facilmente modellizzare con un biliardo matematico è la conducibilità elettrica dei metalli. La corrente elettrica è un flusso di particelle chiamate elettroni. Per rendere l'idea più semplice, supponiamo che ci sia un unico elettrone che passa attraverso il metallo e immaginiamo il metallo come un reticolo di molecole uniformemente disposte nel piano a due dimensioni. Pensando all'elettrone come a una piccola palla, si potrebbe notare che esso si comporta proprio come una palla da biliardo che rimbalza su un tavolo contenente un reticolo di ostacoli.

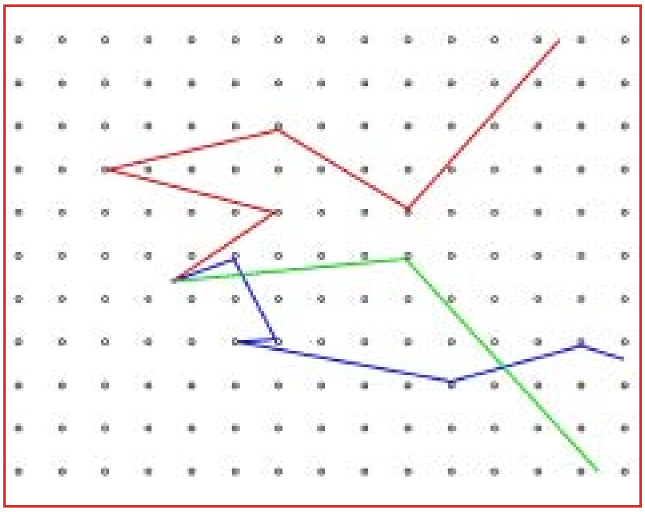

Immagine di Filippo Favale

Figura 3. Tre possibili traiettorie di una palla su un tavolo con ostacoli rotondi

Per studiare sistemi come questo, è necessario fare a meno di un'altra caratteristica tradizionale del gioco del biliardo che peraltro tutti abbiamo in mente: la forma rettangolare del tavolo. Un buon punto di partenza è quello di chiedersi che cosa succederebbe se il tavolo fosse di forma triangolare, esagonale oppure a L (Fig. 4).
Più in generale, che cosa accadrebbe se il tavolo fosse un *poligono*, una forma i cui bordi fossero delle linee diritte e che contenesse al suo interno dei buchi (corrispondenti agli ostacoli)?
Il risultato di prima – traiettorie tipiche ergodiche ed uniformemente distribuite su tutto il tavolo – sarebbe ancora valido?
La risposta è sì, purché gli angoli fra i lati del poligono abbiano ampiezze di un certo tipo: devono essere uguali a $p/q \times \pi$, dove p e q sono numeri interi (e quindi p/q è un numero razionale). Rettangoli e quadrati ricadono in questa classe (i loro angoli misurano $1/2 \times \pi$), e anche i triangoli equilateri (i loro angoli sono $1/3 \times \pi$), i pentagoni regolari (con angoli di $3/5 \times \pi$), gli esagoni regolari ($2/3 \times \pi$), così come tutti i poligoni regolari.
Il risultato resta valido pure se il tavolo contiene degli ostacoli, purché anche questi ostacoli siano limitati da linee dritte (cioè siano poligonali) e gli angoli dei poligoni così risultanti abbiano le caratteristiche descritte sopra. Un biliardo il cui tavolo soddisfi queste proprietà, viene detto *biliardo razionale poligonale*.

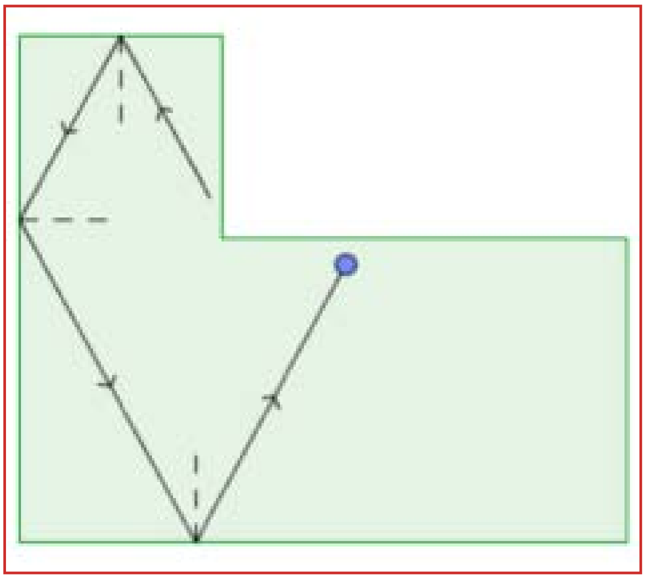

Figura 4. La traiettoria iniziale su un tavolo a forma di L. Gli angoli della L sono tutti multipli razionali di π, ossia $\pi/2$ (cinque di essi) e $3\pi/2$ (il rimanente)

Se invece si ammette la possibilità che i bordi del tavolo siano linee curve, il sistema cambia radicalmente. Si scopre che il gioco diventa molto meno caotico se si gonfiano tutti i bordi del tavolo verso l'esterno (cioè se esso è convesso). Esempi ne sono il cerchio e l'ellisse. In questi casi, ci sono molte più traiettorie periodiche (quelle che tornano sui loro passi), e non ci sono traiettorie che esplorano tutto il tavolo (Fig. 5).
Se, invece, la forma ha delle parti del bordo sgonfiate verso l'interno, il gioco diventa molto più caotico. Se si considera una piccola gamma di posizioni iniziali e di direzioni della palla, le traiettorie risultanti non solo divergono, ma lo fanno a tal punto che alla fine si distribuiscono uniformemente su tutto il tavolo. Quindi una piccola

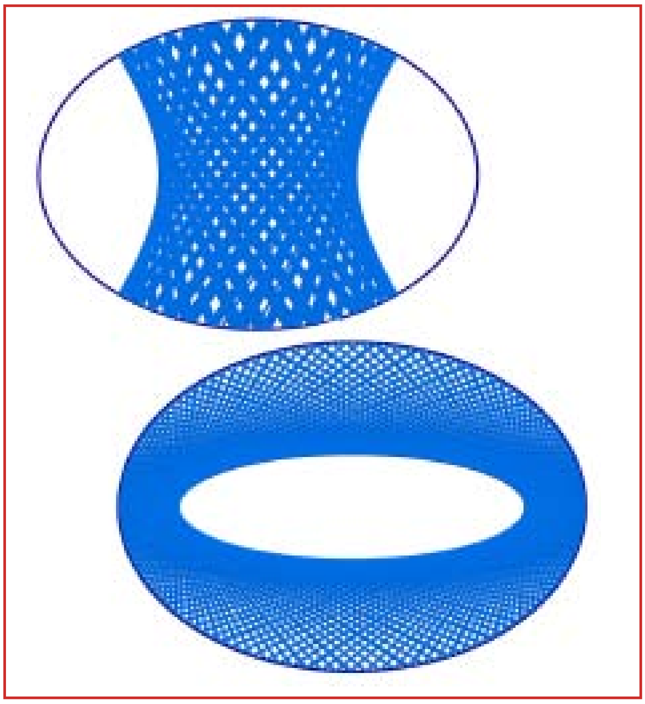

Immagine di Filippo Favale

Figura 5. Esempi di traiettorie su una superficie convessa. Esse non coprono tutto il tavolo

imprecisione nella misura delle condizioni iniziali significa davvero non avere idea di dove sarà la palla dopo un po' di tempo – questo è un esempio di una proprietà dei sistemi dinamici chiamata *mixing*.

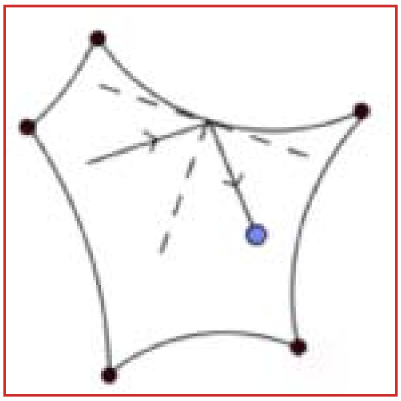

Figura 6. L'inizio di una traiettoria su un tavolo concavo

Pertanto i biliardi razionali poligonali rappresentano uno spartiacque tra differenti livelli di prevedibilità. "I biliardi poligonali sono interessanti da un punto di vista dinamico perché mostrano un tipo di caos piuttosto contenuto", spiega la Ulcigrai. "Sono caotici, ma meno di altri" (Fig. 6).

Infinite sorprese

Può sembrare un fatto curioso, ma i matematici hanno impiegato più tempo a trovare risultati per i biliardi poligonali piuttosto che per quelli con bordi curvilinei.
Risultati sull'ergodicità di certi biliardi curvi sono stati dimostrati negli anni Sessanta del secolo scorso, in particolare nei fondamentali lavori del relatore di dottorato della Ulcigrai, Yakov Sinai, che ha ricevuto quest'anno proprio il Premio Abel, uno dei riconoscimenti più prestigiosi in matematica, per i suoi contributi alla teoria dei sistemi dinamici. Ma solo negli anni Ottanta i matematici hanno iniziato a comprendere i biliardi poligonali, che solo all'apparenza sono semplici. Il loro successo è stato il risultato di un ingegnoso trucco matematico, che ha trasformato quelle traiettorie frastagliate e disordinate su tavoli piani in curve lisce su belle superfici ben comprese dai matematici. Si tratta di una bella tecnica che vale la pena di guardare e che si può trovare illustrata nell'articolo "Playing billiards on doughnuts" apparso su *Plus*.

Nel 2013, questa tecnica ha contribuito a fare dimostrare alla Ulcigrai un risultato sorprendente. Insieme al matematico polacco Krzysztof Fraczek, ha considerato un tavolo da biliardo infinito contenente un reticolo di ostacoli rettangolari, conosciuto come *Modello di Ehrenfest*, dal nome della matematica russa Tatyana Ehrenfest e di suo marito Paul, che lo studiarono per spiegare il comportamento delle molecole nei gas (Fig. 7).

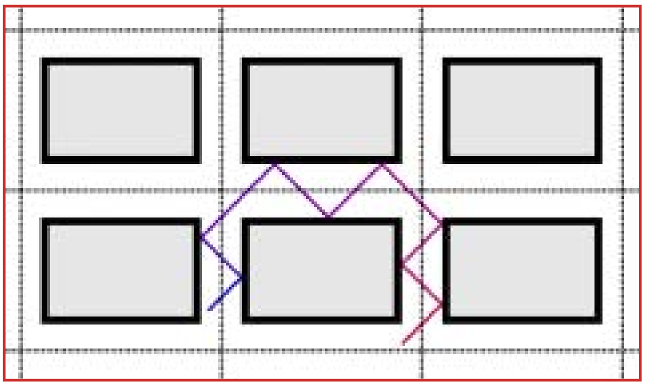

Immagine di Filippo Favale

Figura 7. Il modello di Ehrenfest consiste in un tavolo infinito con un'infinita schiera di ostacoli rettangolari

Lasciare entrare l'infinito nell'analisi potrebbe spaventare, ma è una cosa che i matematici fanno regolarmente. E poiché il biliardo infinito è una generalizzazione diretta di un biliardo poligonale razionale – in cui gli ostacoli sono tutti limitati da segmenti che si incontrano ad angoli retti – Ulcigrai e Fraczek si aspettavano che anche qui la maggior parte delle traiettorie fosse ergodica. Invece ciò che alla fine hanno dimostrato è l'esatto opposto: la grande maggioranza delle traiettorie non è ergodica. Il perché è un mistero. "Esistono altri sistemi nei quali c'è una chiara ragione geometrica che spiega la loro non ergodicità", dice Ulcigrai. "Se si tracciano le traiettorie tipiche, si può vedere che esse restano tutte all'interno di una fascia limitata, per esempio. Ma nel nostro modello, se si traccia una traiettoria, non si vede un fenomeno del genere. La traiettoria sembra esplorare l'intero tavolo. Ma abbiamo dimostrato che non lo fa. È ingannevole!".
Sarà necessario continuare la ricerca, per svelare i misteri dei tavoli infiniti. Ma anche i biliardi finiti pongono ancora delle questioni: che cosa succede se il tavolo è un poligono i cui angoli sono multipli irrazionali di π, come $2/1 \times \pi$? Il fatto è che davvero nessuno lo sa. La questione è ancora completamente aperta.

Mathematics in Europe, il sito realizzato dalla Commissione RPA (_Raising Public Awareness_) della European Mathematical Society, nel 2013 ha iniziato un progetto di traduzioni, il "Translation Project", che coinvolge alcuni siti e alcune riviste di comunicazione della matematica, tra cui _IMAGINARY_ (recensito anche sul sito di _XlaTangente_), la spagnola _Divulgamat_ (vedi _XlaTangente_ n. 32), la francese _images des Maths_ (vedi _XlaTangente_ n. 41), l'inglese _Plus Magazine_ e… last, but not least, _XlaTangente_.
Il progetto ha tre obiettivi principali: creare un _network_ di operatori nel settore della comunicazione della matematica, tradurre articoli selezionati pubblicati dalle riviste coinvolte e mettere queste traduzioni a disposizione dei lettori in vari Paesi.