La cava degli aironi

Una cava abbandonata è ora diventata uno stagno in cui vengono a sostare degli aironi. Nella figura qui sotto possiamo vedere la forma di questa cava.

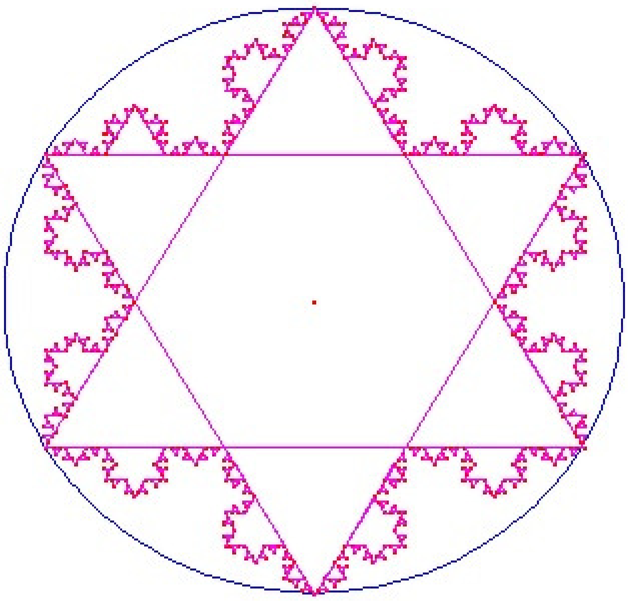
Sapreste calcolarne l'area?

Scuola secondaria di I grado "A. Cameroni" - Treviglio (BG)
Classe: II E
Insegnante di riferimento: prof. Vincenzo Di Leo
Ricercatore: dott.ssa Irene Invernizzi
Partecipanti: Giulia Bearzi, Fatima Belhaj, Andrea Conti, Federico Crivellari, Matteo Defendi, Tommaso Martelli, Sofia Piavani, Fabio Recanati

Scuola secondaria di I grado "T. Grossi" - Treviglio (BG)
Classe: II D
Insegnante di riferimento: prof.ssa Nadia Valente
Ricercatore: dott.ssa Irene Invernizzi
Partecipanti: Carlo Bassetta, Michele Colombo, Davide Galli, Lucrezia Gritti, Giacomo Mandarano, Alice Possenti, Daniela Tozzi

1) INTRODUZIONE

Il problema "La cava degli aironi" ci è stato proposto dalla dottoressa Invernizzi. Questo problema richiedeva il calcolo dell'area di questa figura che è la semplificazione della superficie di una cava abbandonata e ora diventata uno stagno in cui vengono a sostare degli aironi.



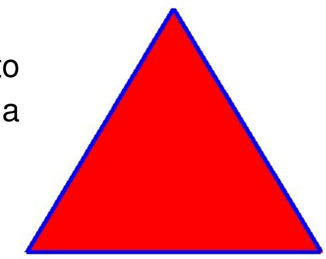
Tale figura è ottenuta a partire da un triangolo equilatero: ogni suo lato viene diviso in tre parti, e su quella centrale viene costruito un triangolo equilatero di lato pari a un terzo di quello iniziale. Su questo nuovo triangolo si riproduce lo stesso procedimento: ogni lato è diviso in tre parti e su quella centrale costruiamo un nuovo triangolo e così via all'infinito!

2. SVILUPPO DEL PROBLEMA

2.1 COME ABBIAMO LAVORATO

Quando ci è stato proposto il problema, per prima cosa abbiamo disegnato la figura con l'utilizzo del software *Cabri Géomètre*®, in particolare abbiamo fatto affidamento sul disegno di Giulia. Successivamente, abbiamo messo in evidenza il procedimento con cui è stata ottenuta la figura, facendo diversi disegni che spiegano ogni passaggio della costruzione. Questo metodo è stato adottato dai ragazzi della Scuola Cameroni, mentre quelli della Grossi hanno lavorato manualmente: hanno riprodotto la figura su compensato e su un cartellone, utilizzando spago e matita per fare il cerchio circoscritto. Così abbiamo iniziato il lavoro.

2.2 RAGIONAMENTO: PASSAGGIO 0



La ricercatrice Irene Invernizzi presentandoci il problema ci ha dato due informazioni riguardanti il triangolo da cui si parte nella costruzione della figura:

- il triangolo è equilatero;
- un lato misura 1 km.

Come prima cosa abbiamo dunque calcolato l'area di tale triangolo triangolo. Per calcolare l'area di questa figura ci sono diversi metodi:

1) la formula di Erone, valida per tutti i triangoli:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove *p* e` il semiperimetro, mentre *a,b,c* sono le misure dei lati del triangolo.

2) la formula dei triangoli equilateri:

$$A = l^2 \times \sqrt{3}/_4.$$

dove *l* è il lato del triangolo equilatero.

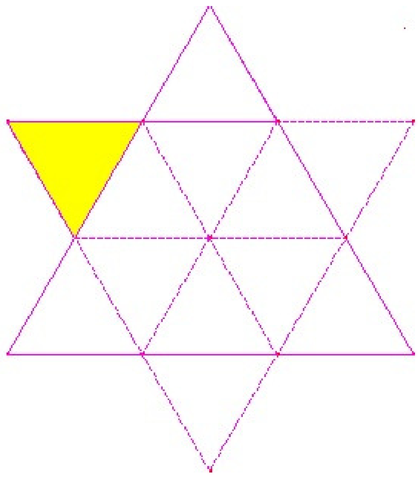
Noi abbiamo scelto di adottare la formula di Erone, che ci permette di calcolare l'area sapendo solo la lunghezza del lato. Infatti essendo a=b=c=1 vale:

$$A_0 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-1)^3}$$

Calcolando il semiperimetro $p = 3/2$ si ottiene:

$$A_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}433\ km^2$$

2.3 PASSAGGIO 1



Nel passaggio 1 abbiamo osservato che, se dividiamo il triangolo del passaggio 0 in 9 triangolini uguali, questi sono congruenti a quello sul lato. Quindi i 3 triangoli che si aggiungono nel passaggio 1 hanno ciascuno area pari alla nona parte dell'area del triangolo iniziale, cioè della figura al passaggio 0:

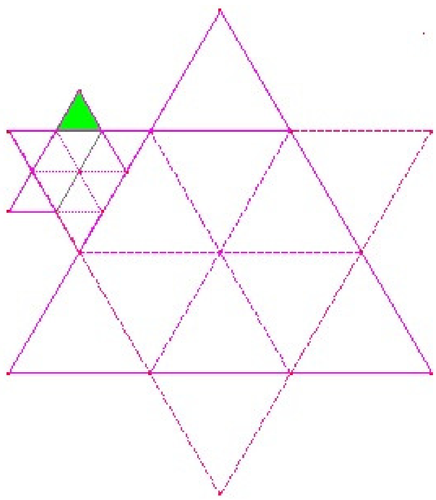
Dunque l'area del triangolo evidenziato in giallo vale:

$$B_1 = \frac{A_0}{9}.$$

Mentre l'area totale della figura al passaggio 1 e`:

$$A_1 = A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} A_0$$

2.4 PASSAGGIO 2



Nel secondo passaggio abbiamo osservato che ogni nuovo triangolo è congruente a uno dei nove triangolini, uguali tra loro, ottenuti dividendo in nove parti il triangolo giallo del passaggio 1. Quindi i 12 triangoli che si aggiungono nel passaggio 2 hanno ciascuno l'area pari alla nona parte dell'area del triangolo del passaggio 1.

L'area del triangolo verde è quindi

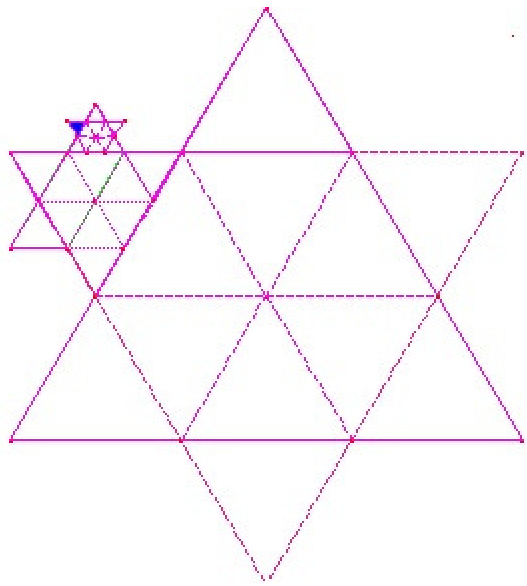
$$B_2 = \frac{B_1}{9} = \frac{A_0}{81}$$

Mentre l'area della figura al passaggio 2 vale:

$$A_2 = A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} A_0 + 12 \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9} A_0\right)$$

2.5 PASSAGGIO 3

Nel passaggio 3 abbiamo diviso un triangolo aggiunto nel passaggio 2 in nove triangolini uguali, ottenendo nove triangoli congruenti a quello sul lato. Quindi i 48 triangoli che si aggiungono nel passaggio 3 hanno ciascuno area pari alla nona parte dell'area del triangolo del passaggio 2.



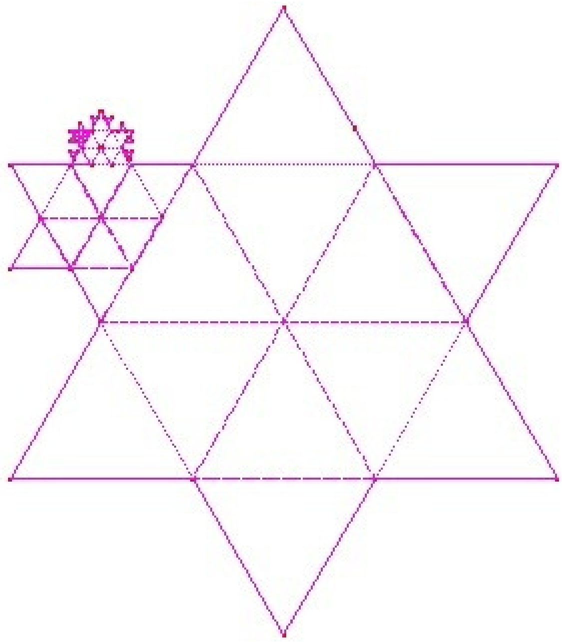
$$B_3 = \frac{B_2}{9} = \frac{A_0}{729}$$

Mentre l'area totale della figura al passaggio 3 vale:

$$A_2 = A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} A_0 + \frac{12}{81} A_0 + 48 \cdot \frac{A_0}{729}$$

2.4 PASSAGGIO 4

Analogamente a quanto compiuto in precedenza, nel passaggio 4 abbiamo diviso un triangolo ottenuto nel passaggio precedente in nove triangoli equilateri, uguali tra loro. Quindi i 192 triangoli che si aggiungono nel passaggio 4 hanno ciascuno area pari alla nona parte dell'area del passaggio 3:



$$B_4 = \frac{B_3}{9} = \frac{A_0}{6561}$$

Dunque l'area della figura al passaggio 3 è:

$$A_2 = A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} A_0 + \frac{12}{81} A_0 + 48 \cdot \frac{A_0}{729} + 192 \cdot \frac{A_0}{6561}$$

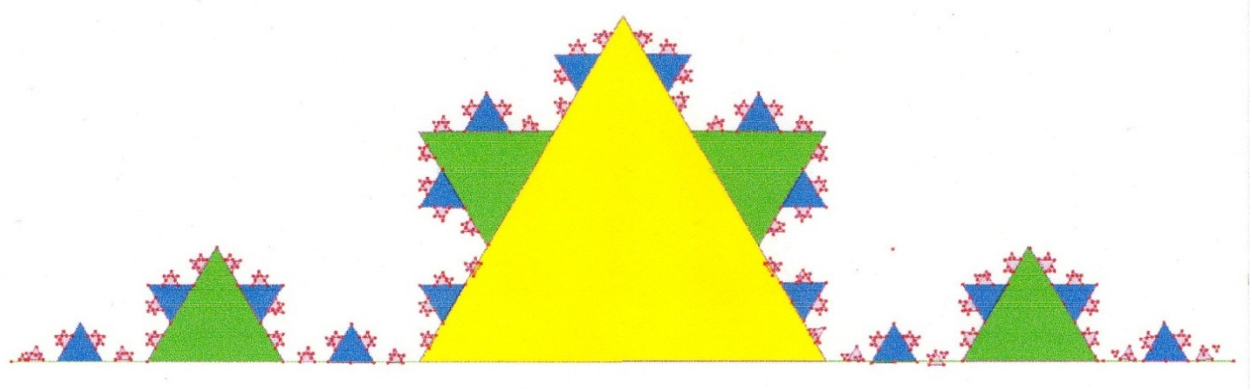
2.7 AREA TOTALE

Riportiamo nella seguente tabella i risultati ottenuti nei diversi passaggi:

Num. passaggio:	**Num.Triangoli aggiunti nel passaggio:**	**Area singolo triangolo aggiunto:**	**Area Totale al passaggio (km^2):**
0	1	$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$	A_0 =0,433013
1	3	$B_1 = \frac{A_0}{9}$	A_1 =0,57735
2	12	$B_2 = \frac{A_0}{81}$	A_2 =0,6415
3	48	$B_3 = \frac{A_0}{729}$	A_3 =0,670011
4	192	$B_4 = \frac{A_0}{6561}$	A_4 =0,682683
…	…	…	…
n	$\mathbf{3 \cdot 4^{n-1}}$	$\boldsymbol{B_n = \frac{A_0}{9^n}}$	$\boldsymbol{A_n}$

2.8 LATO DELLA FIGURA ZOOMMATO

Per analizzare meglio la figura, l'abbiamo riprodotta con uno zoom, ricopiando un lato e ottenendo:



2.9 CONCLUSIONE

In conclusione, pur non essendo riusciti a calcolare il valore esatto dell'area della cava, possiamo affermare che l'area totale si avvicina a 0,691910058 km^2.

2.10 FRATTALI, PERIMETRO E AREA

Noi abbiamo circoscritto il triangolo, perché abbiamo visto che i triangolini rimangono sempre dentro alla circonferenza e di conseguenza l'area è finita; il procedimento per andare avanti è sempre lo stesso, cambia solo che i numeri diventano sempre più infinitesimi, quasi nulla. Anche se l'area è finita, il perimetro è infinito.
Si tratta di una figura geometrica in cui il motivo, identico, si ripete in tutte le direzioni e a scala continuamente ridotta. Ingrandendo la figura si otterranno forme ricorrenti e ad ogni ingrandimento essa rivelerà nuovi dettagli. Contrariamente a qualsiasi altra figura geometrica un frattale invece di perdere dettaglio quando è ingrandito, si arricchisce di nuovi particolari.

2.11 RINGRAZIAMENTI

Ringraziamo in particolare per questo lavoro:
la Preside Nicoletta Sudati e il Collegio D'Istituto per avere finanziato il progetto.
Ringraziamo anche il professor Di Leo e la ricercatrice Invernizzi che ci hanno proposto e seguito nella risoluzione del problema con tanta pazienza!