+

Che valore hanno i derivati finanziari?

Molta matematica per un problema semplicissimo

Giacomo Aletti
Dipartimento di Matematica "F. Enriques"
Università degli Studi di Milano

Conferenza nell'ambito di:
"Matematica, che passione" - 15 febbraio 2012
A.N.S.A.S. (ex IRRE Lombardia)

Sommario

- Modello generale: ingredienti
- Investimenti
- Caratterizzazione geometrica
- Legame con assunzioni economiche
- Probabilità neutrali al rischio
- Teorema fondamentale dell'Asset Pricing
- In pratica?

Ingredienti

- Uno spazio finito $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_M\}$. Dice lo scenario di domani.
- Un'attività priva di rischio (nel nostro caso di un conto bancario) con r=tasso di interesse. Per semplicità, r=0
- N processi stocastici che rappresentano l'andamento di attività rischiose con tasso di interesse aleatorio (azioni, derivati, …). Saranno un vettore S che assumeranno diversi guadagni per i vari ω_i: $S_k(\omega_i)$ = guadagno dell'attività k nello scenario i. Possibile rappresentazione *MATRICIALE* **S**:

$$S_{ik} = S_k(\omega_i)$$

Investimenti

- Investimento = portafoglio: vettore **a**, a_k è la quantità di bene k nel portafoglio

- Guadagno $\mathbf{g_a}$ con portafoglio **a**

$$\mathbf{g_a}(\omega_i) = \Sigma_k S_k(\omega_i)\, a_k = \mathbf{S} \bullet \mathbf{a}$$

- ***Assenza di arbitraggio*** (ipotesi economica): non può esiste un investimento a tale che $\mathbf{g_a} \geq 0$ su tutti gli scenari, con qualcuno strettamente positivo, ossia

$\nexists$ **a** tale che $\mathbf{S} \bullet \mathbf{a} \geq 0$ con qualche componente non nulla

Caratterizzazione matematica

- Insieme G dei possibili guadagni (***sottospazio vettoriale***):

$$G = \{\mathbf{g}: \text{esiste } \mathbf{a} \text{ tale che } \mathbf{g} = \mathbf{S}\bullet\mathbf{a}\}$$

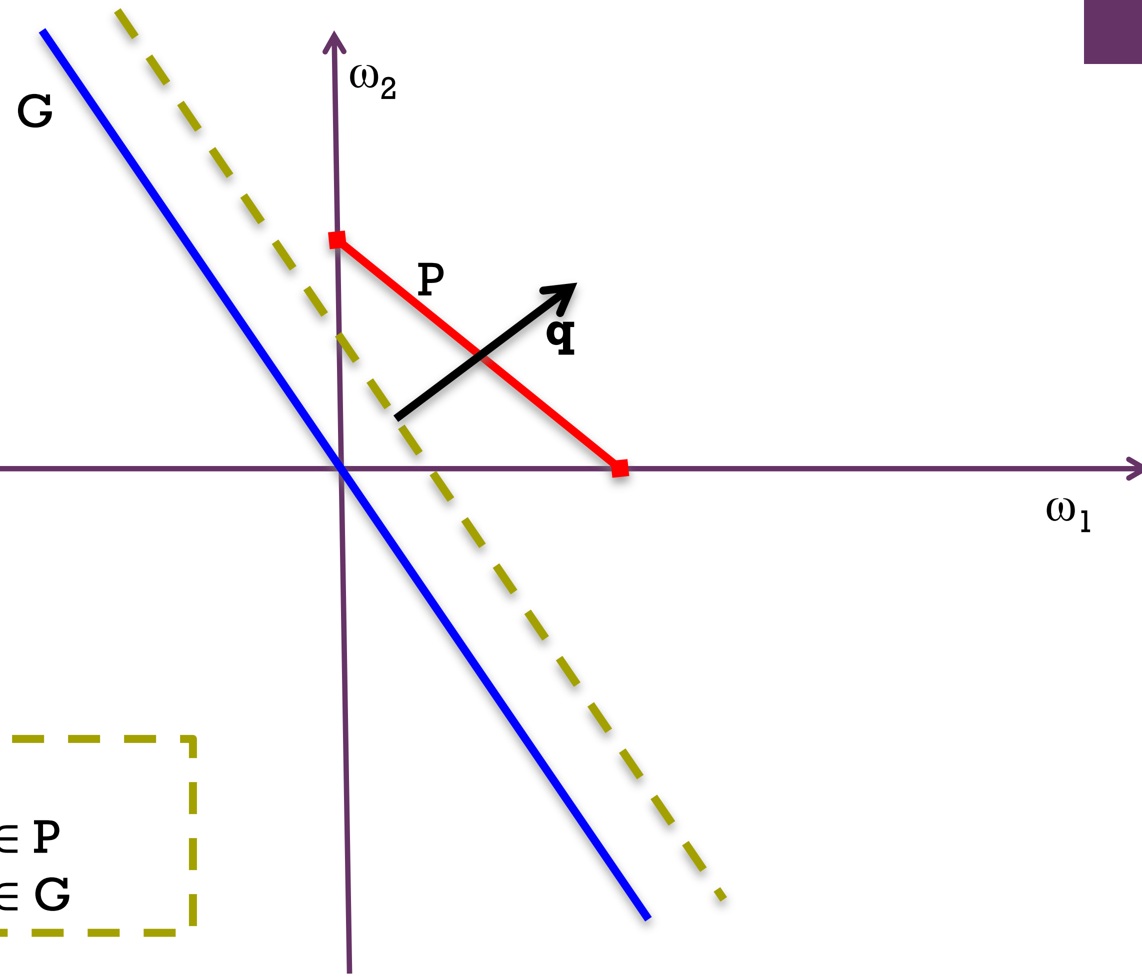
- Insieme P delle misure di probabilità (***simplesso: chiuso e convesso***):

$$P = \{\mathbf{p}: p_i \geq 0 \text{ e } \Sigma_i p_i = 1\}$$

- Assenza di arbitraggio ▫ $\{ G \cap P \} = \emptyset$

+ Non Arbitraggio: separazione!

$\{ G \cap P \} = \emptyset$



Teorema di Separazione di Convessi

$\exists \mathbf{q}$:
$\mathbf{p} \bullet \mathbf{q} > c > 0, \qquad \forall \mathbf{p} \in P$
$\mathbf{g} \bullet \mathbf{q} = 0, \qquad \forall \mathbf{g} \in G$

Probabilità neutrale al rischio (PNR)

- $\mathbf{p}\bullet\mathbf{q} > c > 0$, $\forall \mathbf{p} \in P$, e quindi tutte le componenti di $\mathbf{q}$ sono strettamente positive. Quindi, si definisce la probabilità $\mathbf{r}$

$$P_i = q_i \,/\, \Sigma_k\, q_k$$

che ha le stesse proprietà di $\mathbf{q}$ (è solo moltiplicata per una costante!)

- $\forall g \in G$, $0 = \mathbf{g}\bullet\mathbf{q} = \mathbf{g}\bullet\mathbf{P}$, ossia

$$0 = \Sigma_k\, g_k\, P_k = \Sigma_k\, \mathbf{g}(\omega_k)\, \mathbf{P}\,(\omega_k) = E_{\mathbf{P}}(\mathbf{g})$$

- *Esistono, per l'assenza di arbitraggio, misure di probabilità sotto le quali tutti gli investimenti possibili hanno guadagno medio nullo*!
- Vale anche il viceversa ("semplice" ☺ esercizio)!

Primo teorema fondamentale dell'Asset Pricing e derivati

- Non esiste possibilità di arbitraggio

  SE E SOLO SE

- esiste almeno una misura di probabilità (PNR) sotto la quale tutti gli investimenti possibili hanno guadagno medio nullo

- Introduciamo un **derivato**: investimento che valendo oggi x, darà un guadagno **t** pari a f(**S**)-x:

$$\mathbf{t}(\omega_i) = f\,(S_1(\omega_i), \ldots, S_k(\omega_i), \ldots, S_N(\omega_i)) - x$$

- ***Come valutare x?***
  Vincolo naturale: il derivato non deve introdurre possibilità di arbitraggio SE E SOLO SE ha guadagno medio nullo sotto almeno una PNR!