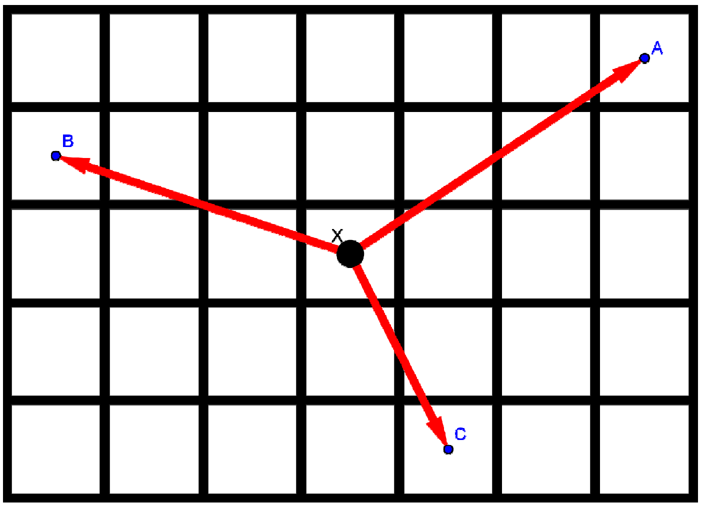
Comunicare su una griglia

Liceo scientifico "B. Pascal" - Merano (BZ)
Classi: II LS e II LST
Insegnanti di riferimento: prof. Alberto Capucci, prof. Giovanni Porcellato
Ricercatore: dott.ssa Ester Dalvit
Partecipanti: Marylise Adami, Leonardo Albertoni, Alessandro Battisti, Federico Borin, Svitlana Bronetska, Antonio Caccavella, Massimo Comper, Giulia De Lussignoli, Omar Di Vittorio, Federica Fracasso, Nabila Joarder, Marlene La Bella, Stefano Magnabosco, Valerio Meschini, Marco Panizza, Raquel Rizzi, Lorenzo Scacchetti, Carlos Alvarado, Stefano Benedini, Christian Fusaro, Emanuele Giacomuzzo, Sina Khalili Pir, Enzo Kuka, Lorenzo Lai, Luca Marth, Kely Montoya, Alberto Quaglia, Francesco Tirello, Elia Toccolini

Il problema

In una città progettata da un architetto "razionalista", le case sono disposte a scacchiera, separate da vie che si incrociano perpendicolarmente. Il proprietario di una di queste case vuole vendere la propria abitazione X. Per diffondere la notizia telefona a tre concittadini le cui abitazioni A, B e C si trovano rispettivamente:

a) spostandosi di tre case a est e due a nord;
b) spostandosi di tre case a ovest e una a nord;
c) spostandosi di una casa a est e due a sud.



A sua volta ciascuno dei cittadini informati telefona ad altri tre abitanti con le stesse regole e così via.

Come si diffonde la notizia? Se si suppone la città infinitamente estesa si può affermare che ogni abitante verrà informato? E in quanto "tempo"?

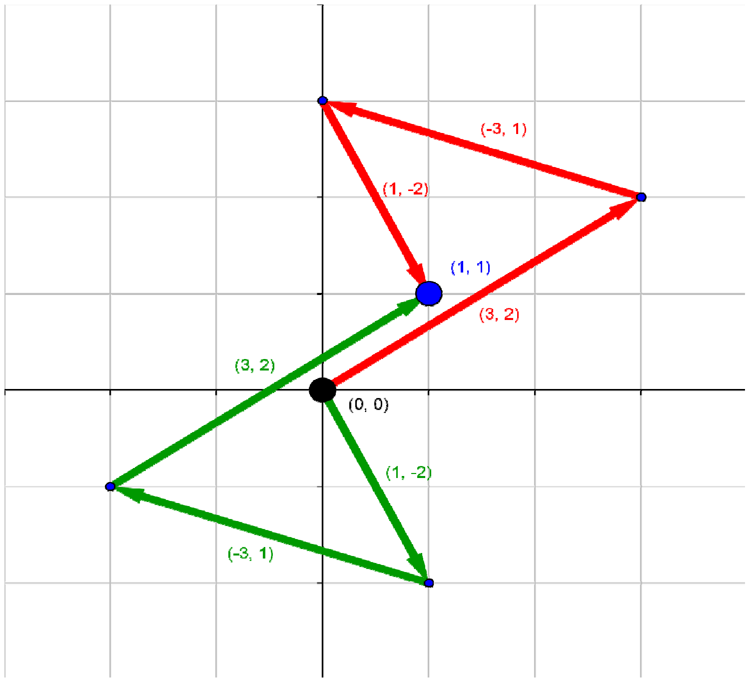
La scelta della rappresentazione: il piano cartesiano, i vettori e le traslazioni

Poniamo colui che mette in vendita la casa nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano, cioè nel punto di coordinate (0;0).

L'indirizzo di ciascun altro abitante è una coppia di coordinate intere. I vettori $\boldsymbol{v}_1(3;2)$, $\boldsymbol{v}_2(-3;1)$ e $\boldsymbol{v}_3(1;-2)$ rappresentano le tre regole di comunicazione. Ogni abitante informato telefona, una sola volta, a tre altri abitanti le cui coppie di coordinate si ottengono sommando ciascuno dei tre vettori alla coppia di coordinate dell'abitante che telefona, cioè applicando tre traslazioni.

Definite le telefonate come traslazioni, possiamo dire che godono della "proprietà" commutativa; ovvero, non importa in che ordine venga effettuata una sequenza di chiamate, si arriverà sempre allo stesso punto.

Ad esempio qui sotto vengono visualizzati due dei possibili modi per comunicare con la casa di indirizzo



(1;1): $\boldsymbol{v}_1(3;2)+\boldsymbol{v}_2(-3;1)+\boldsymbol{v}_3(1;-2) = \boldsymbol{v}_3(1;-2)+\boldsymbol{v}_2(-3;1)+\boldsymbol{v}_1(3;2)$.

Tutti gli abitanti potranno essere informati?

Supponiamo che la città sia infinita. Se si possono informare gli abitanti che stanno immediatamente a Nord (0;1), Ovest (-1;0), Sud (0;-1) ed Est (1;0), allora si possono informare tutti gli abitanti della città. Infatti, ad esempio, per informare l'abitazione Y(-5;6) basta informare in sequenza gli abitanti delle cinque case a ovest e, a partire dall'ultima casa raggiunta, le sei case che stanno a nord.

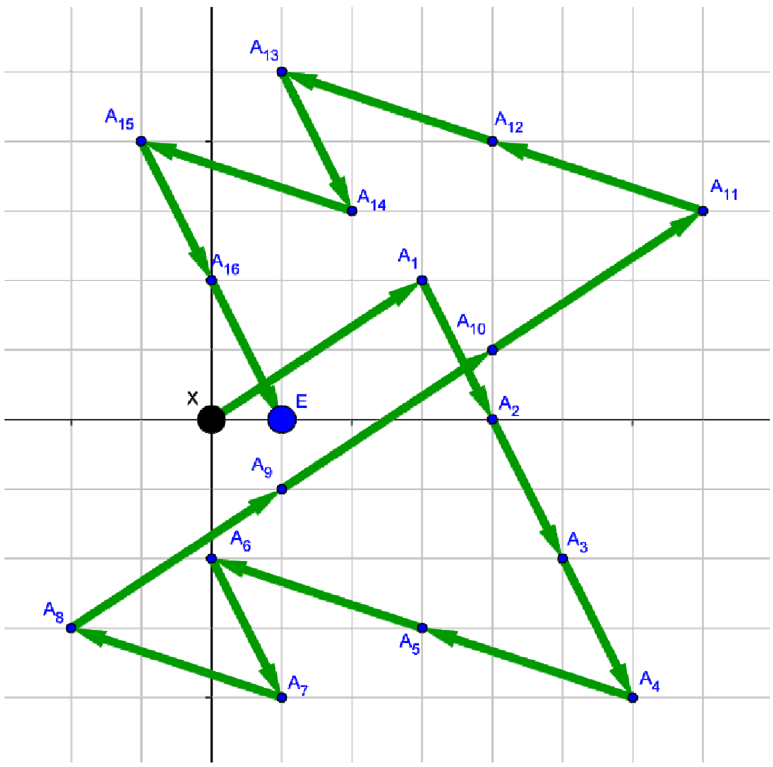
Lavorando graficamente sulla griglia si trova che:

N(0;1) = $2\boldsymbol{v}_1(3;2)+3\boldsymbol{v}_2(-3;1)+3\boldsymbol{v}_3(1;-2)$, O(-1;0) = $\boldsymbol{v}_1(3;2)+2\boldsymbol{v}_2(-3;1)+2\boldsymbol{v}_3(1;-2)$,

S(0;-1) = $3\boldsymbol{v}_1(3;2)+5\boldsymbol{v}_2(-3;1)+6\boldsymbol{v}_3(1;-2)$, E(1;0) = $4\boldsymbol{v}_1(3;2)+6\boldsymbol{v}_2(-3;1)+7\boldsymbol{v}_3(1;-2)$.

Per informare gli abitanti delle case immediatamente a nord, ovest, sud ed est sono sufficienti rispettivamente 8, 5, 14 e 17 telefonate.

Nella figura è rappresentata una delle possibili sequenze di telefonate che collegano X(0;0) con E(1;0).



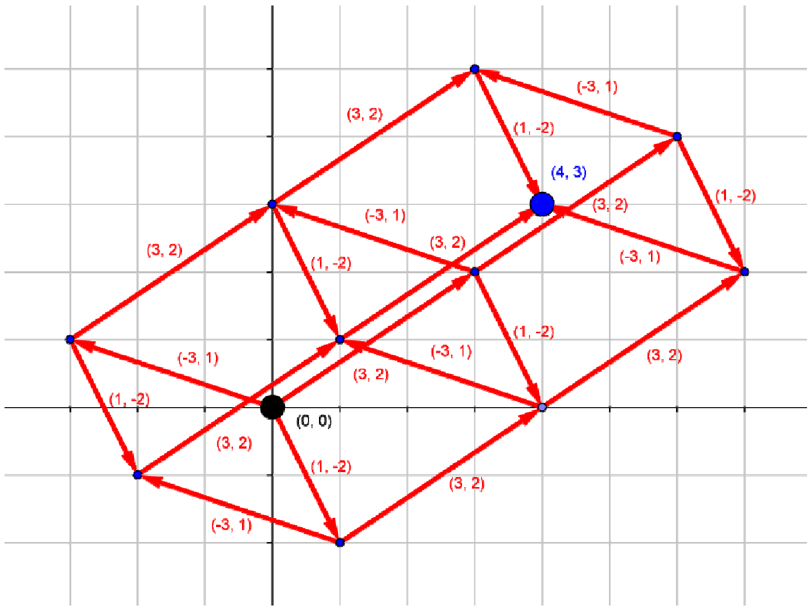
Preso un abitante a caso è possibile stabilire con il calcolo quante telefonate al minimo bisogna fare per informarlo? Quante volte, al minimo, bisogna applicare ciascuna delle tre regole per informarlo?

Per informare l'abitante in posizione P(h;k) cerchiamo i numeri naturali x, y e z tali che
$x\boldsymbol{v}_1(3;2)+y\boldsymbol{v}_2(-3;1)+z\boldsymbol{v}_3(1;-2) = P(h;k)$.
L'uguaglianza tra coppie di coordinate intere equivale al sistema di formule:
$(x, y, z \in \mathbb{N}) \wedge (3x-3y+z = h) \wedge (2x+y-z = k)$.
Esprimendo x e y in funzione di z si ottiene il sistema equivalente
$(x, y, z \in \mathbb{N}) \wedge (x = (5z+h+3k)/9) \wedge (y = (8z-2h+3k)/9)$.
Con una tabella, aumentando progressivamente il valore di z, si trova la prima terna di numeri naturali che è soluzione del sistema. Sommando i tre valori si trova il numero minimo di telefonate necessario per informare l'abitante in posizione P(h;k).
Ad esempio se si considera l'abitazione in posizione E(1;0) la prima terna soluzione che si incontra è (4;6;7) per un totale di 17 telefonate.
Il procedimento può essere automatizzato per un qualunque abitante in posizione P(h;k) codificandolo in un linguaggio di programmazione.

x	y	z	$(x, y, z \in \square)$
1/9	-2/9	0	F
2/3	2/3	1	F
11/9	14/9	2	F
16/9	22/9	3	F
7/3	10/3	4	F
26/9	38/9	5	F
31/9	46/9	6	F
4	6	7	V

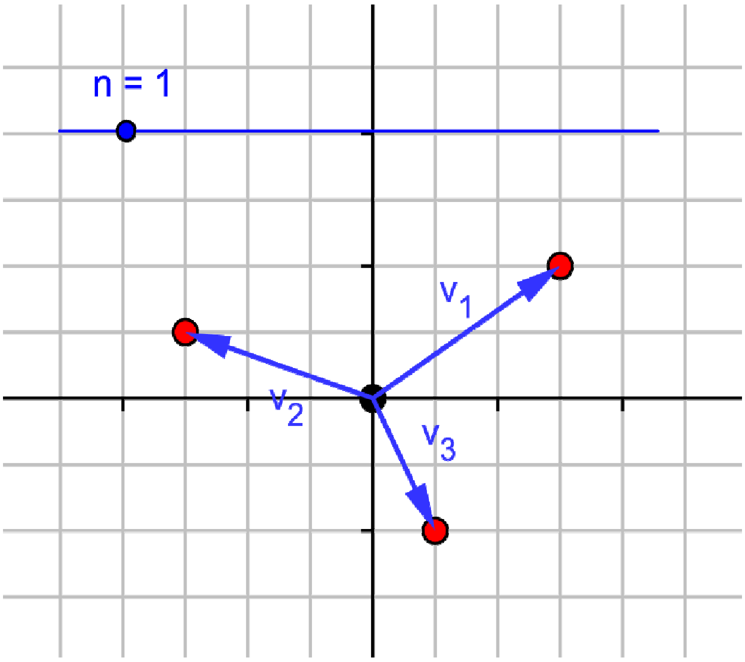
Quanti sono i canali d'informazione che arrivano ad informare un abitante?

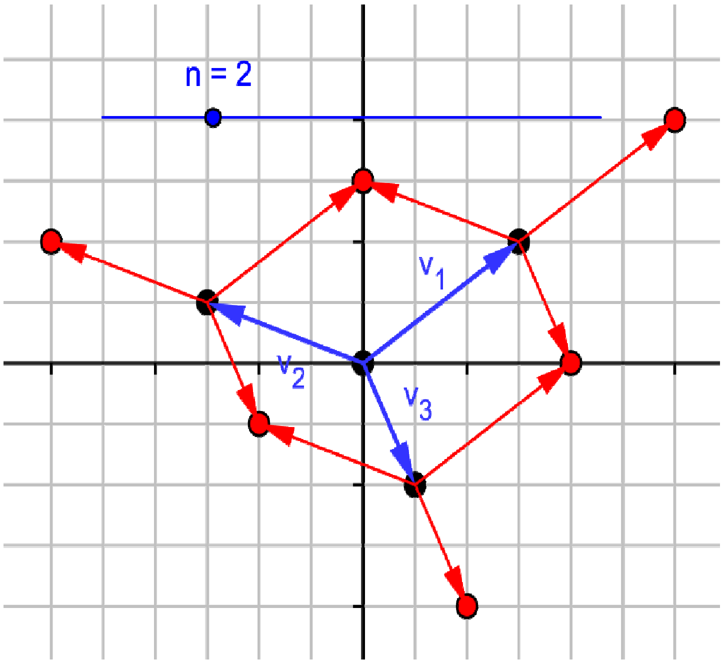
Stabilito il numero minimo t di telefonate necessarie per raggiungere un abitante, e fra queste i numeri di volte x, y e z in cui bisogna applicare ciascuno dei tre vettori che rappresentano le regole di comunicazione il numero c dei canali d'informazione è dato dalla formula:
$c = t!/(x!\,y!\,z!)$,
dove si utilizza la funzione fattoriale di un numero naturale: $n! = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.
Una volta individuati x, y e z l'ordine con cui vengono applicati i vettori non modifica la posizione d'arrivo. c è il numero delle permutazioni di t oggetti, non tutti distinti, di cui x di un tipo, y di un altro tipo e z di un altro ancora. Nella figura vengono visualizzati i canali che mettono in comunicazione il punto di coordinate (0;0) col punto di coordinate (4;3).

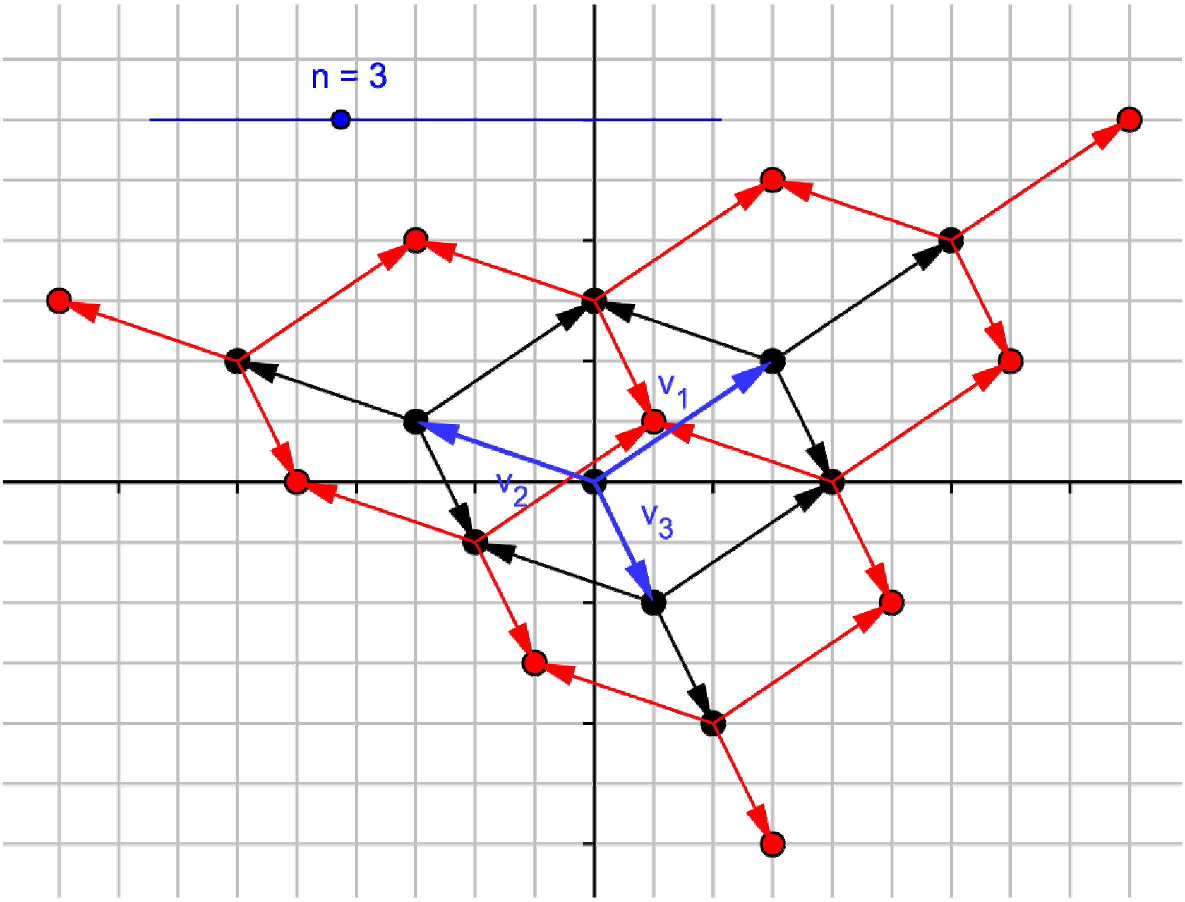


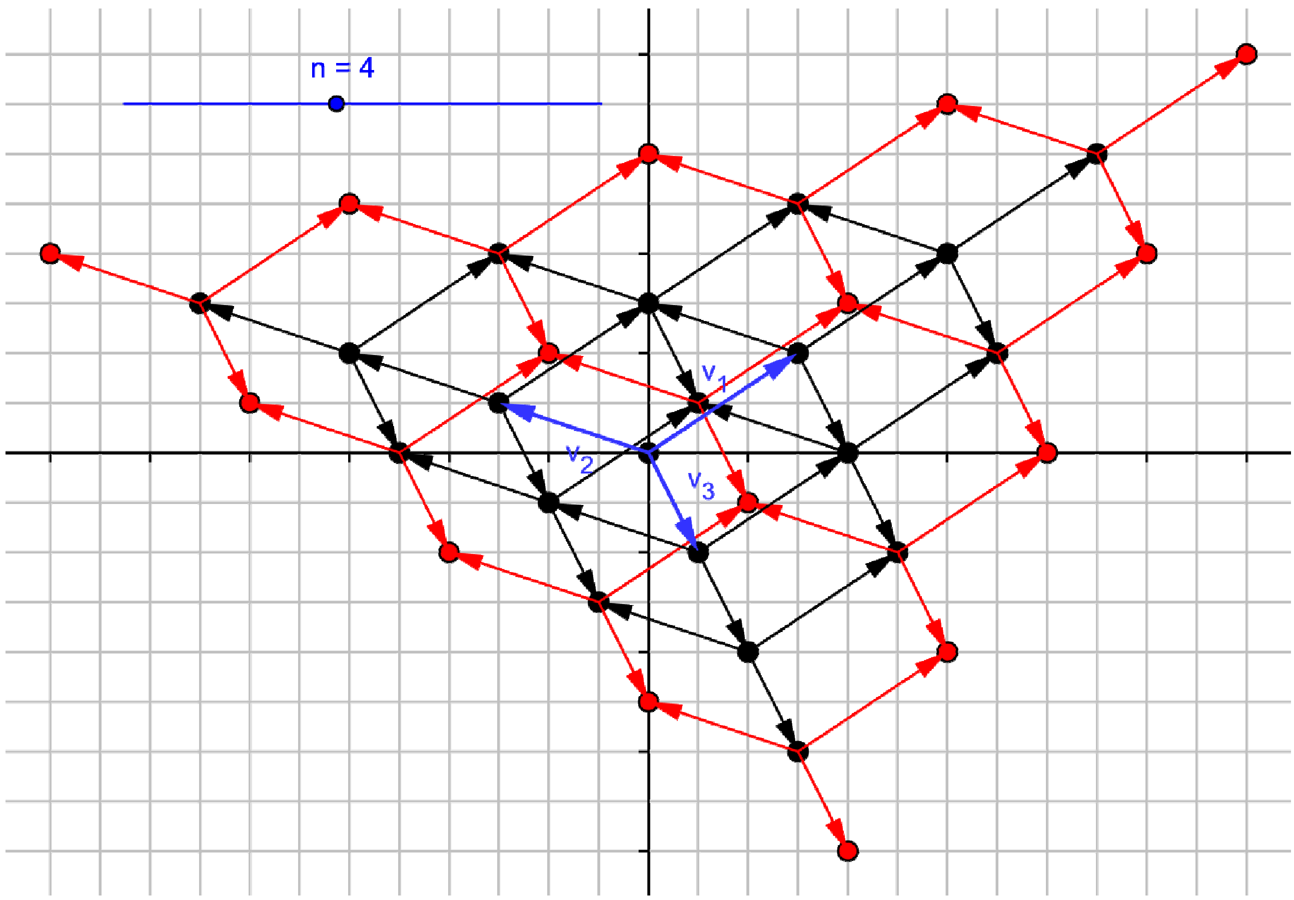
La ridondanza di canali aumenta la probabilità che la comunicazione arrivi se vi sono delle interruzioni.

Con quale velocità si diffonde la notizia?
Nelle figure seguenti, realizzate con il software di geometria dinamica GeoGebra, sono rappresentati in rosso i nuovi informati ai passi 1, 2, 3 e 4. Si può notare che ci sono informati singoli ed informati multipli con due o tre telefonate.







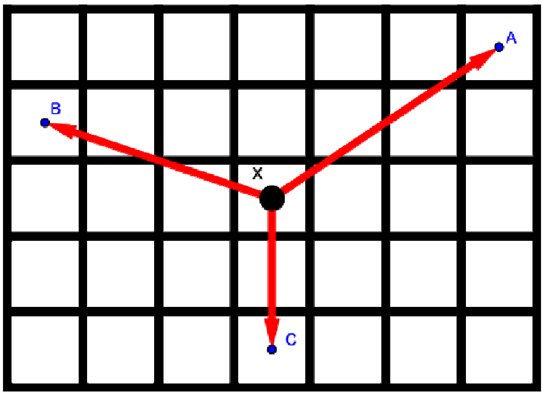


La successione del numero dei nuovi informati è la successione: 1, 3, 6, 10, 15, … . È la successione della somme dei primi *n* numeri naturali a partire da uno. La formula chiusa di questa successione è 1+2+3+ …+*n*=*n*(*n*+1)/2. Se il primo valore della successione ha indice zero, allora la formula per il calcolo del numero dei nuovi informati al passo ennesimo è: (*n*+1)(*n*+2)/2. La successione del numero delle telefonate al passo ennesimo si ottiene moltiplicando il numero dei nuovi informati del passo precedente per tre.

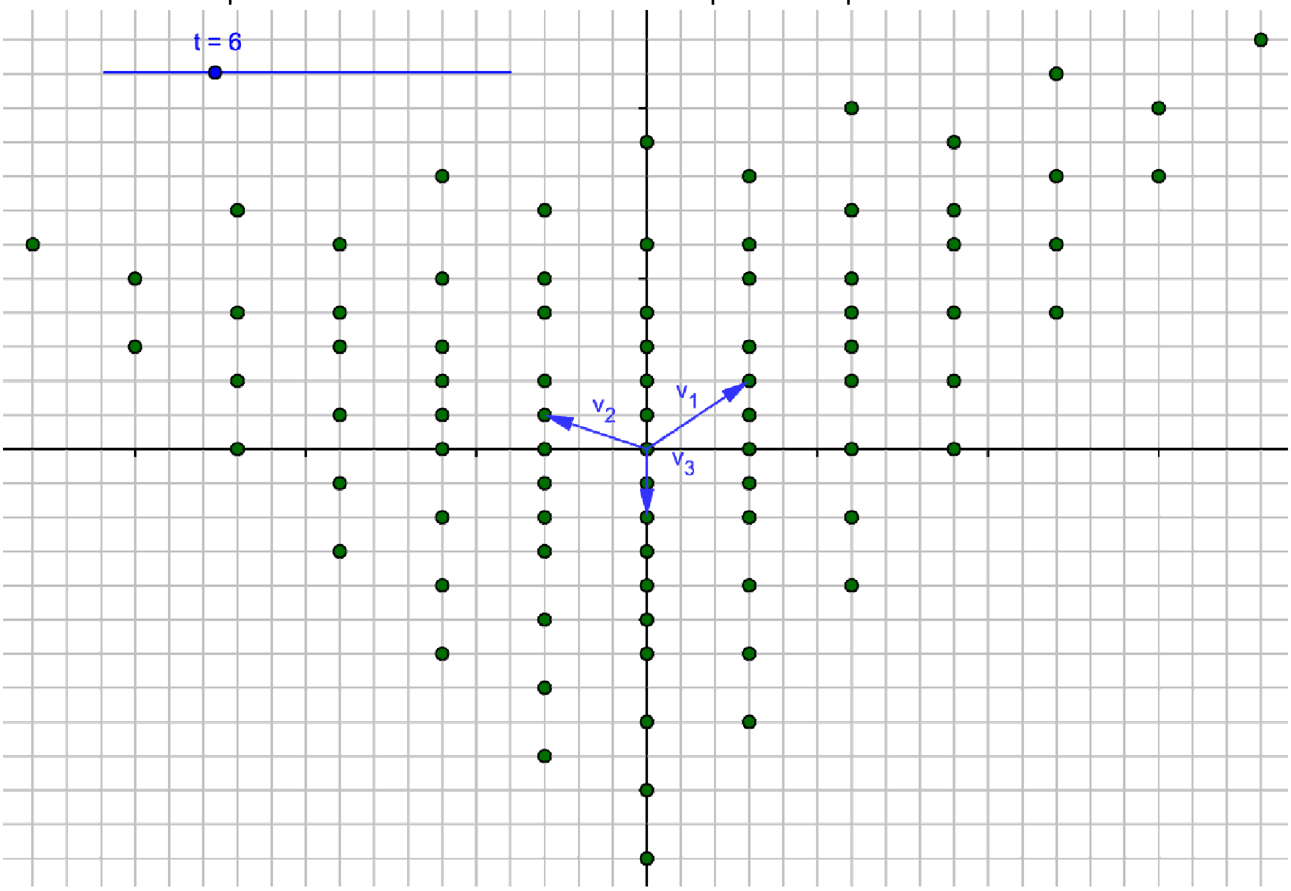
n° passo	n° telefonate	n° nuovi informati	n° totale informati
0	0	1	1
1	3	3	4
2	9	6	10
3	18	10	20
…	…	…	…
n	3*n*(*n*+1)/2	(*n*+1)(*n*+2)/2	?

Ci sono abitanti che dopo un certo numero di passi vengono re-informati?
Colui che vuole vendere la casa riceverà, dopo un certo tempo, una telefonata che gli comunicherà che la sua casa è in vendita? Se sì dopo una sequenza di quante telefonate?
La cosa si verifica dopo 22 telefonate. Infatti il sistema
$(x, y, z \in \mathbb{N}) \wedge (3x\text{-}3y\text{+}z = 0) \wedge (2x\text{+}y\text{-}z = 0)$,
oltre alla soluzione ovvia (0;0;0), ha anche la soluzione (5;8;9) che comporta 22 telefonate.
Ciò significa che la tabella precedente va rivista perché dopo 22 telefonate vi sono abitanti re-informati. Essi non vanno conteggiati tra i nuovi informati.

E se si cambiano le regole?
Cambiando le regole di comunicazione è possibile informare ugualmente tutta la città?
La risposta è negativa. Se ad esempio modifichiamo la terza regola di comunicazione assegnando al vettore $\boldsymbol{v}_3$ le componenti scalari (0;-2) non si potranno informare tutti gli abitanti la cui "coppia-indirizzo" ha ascissa che non è un multiplo di tre.



Supponiamo di fare una sequenza di t telefonate con le regole $\boldsymbol{v}_1(3;2)$, $\boldsymbol{v}_2(-3;1)$ e $\boldsymbol{v}_3(0;-2)$ di cui k con la regola $\boldsymbol{v}_1(3;2)$, m con la regola $\boldsymbol{v}_2(-3;1)$ e n con la regola $\boldsymbol{v}_3(1;-2)$. Si informa in questo modo l'abitante la cui "coppia-indirizzo" ha coordinate $(3k - 3m;\ 2k+m-2n)$. L'ascissa di tale coppia è in ogni caso un multiplo di tre. Da questo possiamo dedurre che non potranno mai essere informati gli abitanti la cui "coppia-indirizzo" ha ascissa che non è un multiplo di tre. Nella figura sono visualizzate con i punti tutte le abitazioni informate dopo una sequenza di sei telefonate.

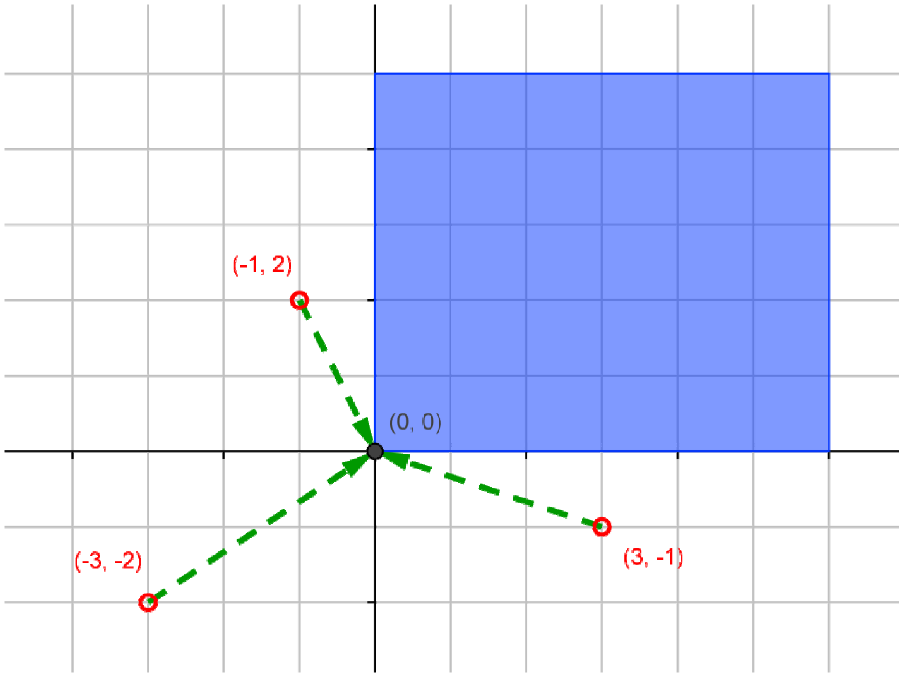


Questo risultato può essere generalizzato. Se si scelgono infatti tre regole rappresentate da vettori con ascisse (o ordinate) divisibili per un numero naturale d maggiore di uno, non potranno essere informati tutti gli abitanti la cui abitazione è individuata da una coppia la cui ascissa (o ordinata) non è divisibile per d.
Resta aperto il problema di trovare una condizione sufficiente affinché le regole di comunicazione (definite da tre vettori) permettano di informare tutta la città.

E se la città è finita?

Una variante del problema considera la città come città finita. Se la forma è rettangolare, si può dimostrare che qualunque sia l'abitazione da cui parte l'informazione non può essere informato il cittadino che abita nella casa all'angolo inferiore sinistro della città.

Scegliamo il riferimento cartesiano in modo tale che l'origine coincida con l'angolo inferiore sinistro. Supponiamo, per assurdo, che al passo ennesimo tale abitazione sia stata raggiunta dall'informazione. Essa, in base alle regole di comunicazione, può giungere solo dai punti di coordinate (-1;2), (-3;-2) o (-3;-1) che appartengono rispettivamente al 2°, al 3° e al 4° quadrante perché hanno almeno una coordinata negativa. Ma per come è stato scelto il sistema di riferimento, nessuna delle case della città può avere coordinate negative.



Si può anche dimostrare che se l'informazione deve partire dalla abitazione che si trova nell'angolo superiore destro, nessun altro abitante della città può essere informato. Scegliamo il riferimento cartesiano in modo tale che l'origine coincida con l'angolo superiore destro della città finita. In base alle tre regole definite dai tre vettori le tre abitazioni informate al primo passo si dovrebbero trovare nei punti di coordinate (3;2), (-3;1) e (1;-2) rispettivamente nel 1°, nel 2° e 4° quadrante. Ma in tali quadranti non vi sono abitazioni perché le case della città stanno tutte nel 3° quadrante. Quindi l'informazione non parte nemmeno.