Curve algebriche

Consideriamo il piano cartesiano. Ogni punto Q è associato a una coppia di numeri (xQ; yQ). Per noi una curva è l'insieme dei punti associati alle coppie (x; y) che soddisfano l'equazione P(x; y) = 0 dove P(x; y) è un polinomio. Diciamo che una curva ha grado n se il polinomio P(x; y) ha grado n.
Quali (e quante) sono tutte le curve di grado 2? Quanti punti ci vogliono per determinare una curva di grado n? Date due curve C_1 e C_2 tali che il grado di C_1 è n_1 e quello di C_2 è n_2, in quanti punti si possono intersecare? Descrivere alcune curve di grado n. Che cosa hanno di particolare le curve di equazioni $y^2 - x^3 - x = 0$ e $x^3 - y^2 = 0$? Cercare altre curve con le stesse particolarità

ITIS "Hensemberger" - Monza
Classi: III AL – IV AL
Insegnante di riferimento: prof.ssa Cristina Chiusa
Ricercatore: dott.ssa Alice Garbagnati
Partecipanti: Tommaso Antonelli, Franco Baldessari, Luca Mauri, Ivan Pasquariello, Giulia Rastelli, Luca Rossi, Damiano Samory, Giorgio Scarabottolo, Fabio Stasuzzo

ITIS "Cartesio" - Milano
Classe: IV BL
Insegnante di riferimento: prof.ssa Antonella Trevisol
Ricercatore: dott.ssa Alice Garbagnati
Partecipanti: Raffaele Aliverti, Giulio Claudio Barbiera, Federico Bergamin, Simone Bonaccorsi, Lorenzo Bottacini, Francesca Carannate, Carmine D'Agosto, Matteo Delle Fave, Kriel Veni Dimatulac, Jack Huang, Alessia Improta, Simone La Grassa, Genn Patrich Lopez, Deborah Losapio, Stefano Lusito, Alessio Massironi, Mattia Ristagno, Matteo Santini, Gabriele Sgrò, Sandro Zanon

Lavorando al progetto MATh.en.JEANS abbiamo fatto la conoscenza delle curve algebriche. Per avere una curva algebrica occorre avere un polinomio in due incognite reali $P(x,y)$ e considerare le coppie di valori (x,y) che lo annullano

curva algebrica = insieme delle coppie reali (x,y) tali che $P(x,y) = 0$

Le caratteristiche del polinomio $P(x,y)$ possono servire a classificare anche le curve. Le qualità algebriche del polinomio, come la completezza, l'omogeneità, la simmetria, la scomponibilità, si riflettono sulla curva da esso individuata e ne definiscono alcune importanti peculiarità.
Poiché una coppia (x,y) è rappresentabile come un punto nel piano cartesiano, diventa interessante osservare la forma che la curva assume al variare delle caratteristiche del polinomio e quindi dei suoi coefficienti.

Quali equazioni rappresentano delle curve?

Le equazioni di 1° grado hanno questa forma: $ax + by + c = 0$.

Per ogni valore dei parametri essa rappresenta una retta, anche quando alcuni di essi valgono zero.

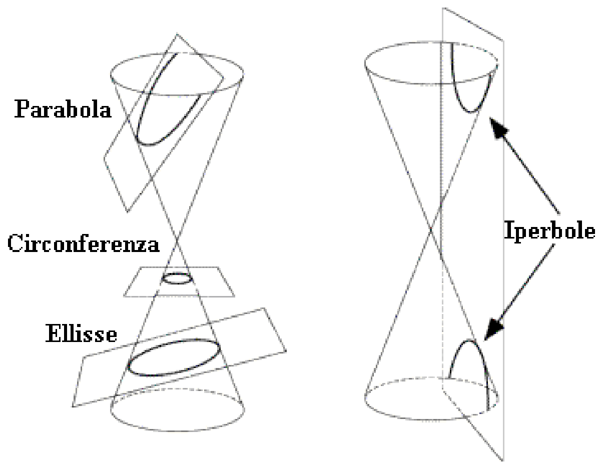
Per esempio:

se $a = 0$ si ottiene una equazione del tipo $by + c = 0$, per esempio $3y – 1 = 0$, che è una retta orizzontale,

se $b = 0$ si ottiene $ax + c = 0$, per esempio $2x + 3 = 0$, che rappresenta una retta verticale,

se $c = 0$ abbiamo $ax + by = 0$, per esempio $5x + 2y = 0$, che rappresenta una retta obliqua passante per (0,0)

Solo il caso che $a = 0$ e $b = 0$ l'equazione diventa $c = 0$ ma questa non è più una equazione.



PER CONCLUDERE: Le equazioni di primo grado $ax + by + c = 0$ hanno sempre il grafico ed è una retta.

Le equazioni di 2° grado la cui forma completa è

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

(6 parametri) possono essere delle coniche, cioè rappresentare le sezioni che si ottengono intersecando un cono con un piano.

Se scegliamo assi cartesiani particolari possiamo ottenere le coniche con una particolare equazione che sarà :

per la circonferenza	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,
per la parabola	$y = ax^2 + bx + c$,
per l'ellisse	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$,
e per l'iperbole	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

Si può anche generalizzare e dire che: se l'equazione di secondo grado rappresenta una conica essa si classifica osservando che:

se $b^2 - 4ac < 0$ la conica è un ellisse

se $b^2 – 4ac = 0$ la conica è una parabola

se $b^2 – 4ac > 0$ la conica è un iperbole

Si osserva però che per particolari valori dei parametri le equazioni non sono delle coniche, o perché non si può disegnare il loro grafico o perché il loro grafico non è una conica.

Equazioni di 2° grado "senza"grafico

Il motivo per cui un'equazione non ha una sua curva corrispondente in un grafico, è perché non ha soluzioni reali: ciò vuol dire che l'equazione non ha una coppia di numeri (x,y) che la soddisfino.

Possono essere delle equazioni $x^2 – xy + y^2 = 0$ che hanno $d = e = f = g = 0$ e un delta $b^2 - 4ac$ negativo. Cioè: $4ac > b^2$.

Le coniche tipo $x^2 + y^2 + 9 = 0$ non hanno soluzioni reali. Infatti è una circonferenza che ha centro nell'origine degli assi ma non ha raggio.

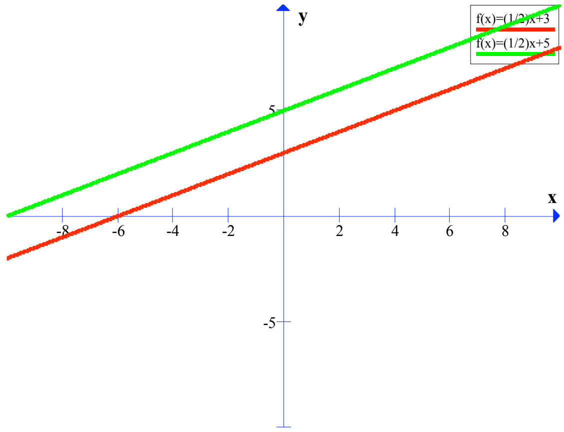
Equazioni di 2° grado che non sono coniche

Se prendiamo l'equazione $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, ha il delta è uguale a zero, $b^2=|4ac|$, ma il suo disegno si riduce a due rette coincidenti $x + y = 0$

L'equazione $x^2 + y^2 = 0$ ha una sola soluzione ed è il punto (0,0)

Cosa succede se “unisco” 2 rette parallele? Che disegno ottengo?

$y = 1/2x + 3$ $\qquad$ $y = 1/2x + 5$

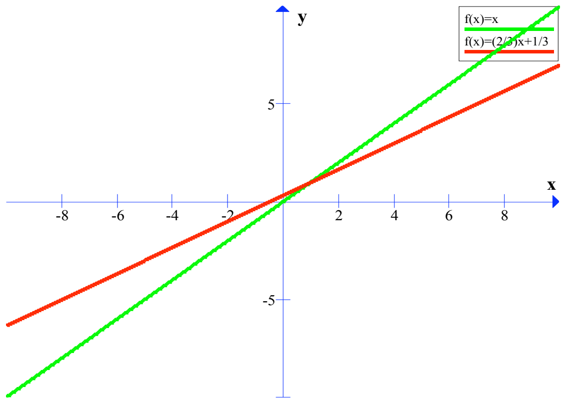


l'unione delle rette è:

$(1/2x + 3 - y)(1/2x + 5 - y) = 0$

Che, facendo il prodotto, diventa
$x^2 + y^2 - 4xy + 16x + 32y + 60 = 0$
Questa è una equazione di 2° grado, non è una conica, ma “unione” di due rette

La curva $2x^2 – xy - 3y^2 + x + y = 0$, anche se non è così evidente, si scompone in
$(x + y)(2x - 3y + 1) = 0$
Anche questa non è una conica ma due rette che si intersecano nel punto

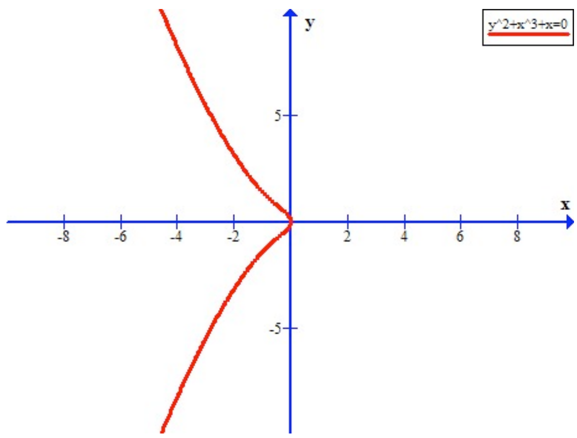


PER CONCLUDERE
Le equazioni di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
possono essere: coniche, unioni di rette, ridursi a una retta, ridursi a un punto o non avere grafico

L’equazione di 3° grado ha equazione completa
$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ix + l = 0$

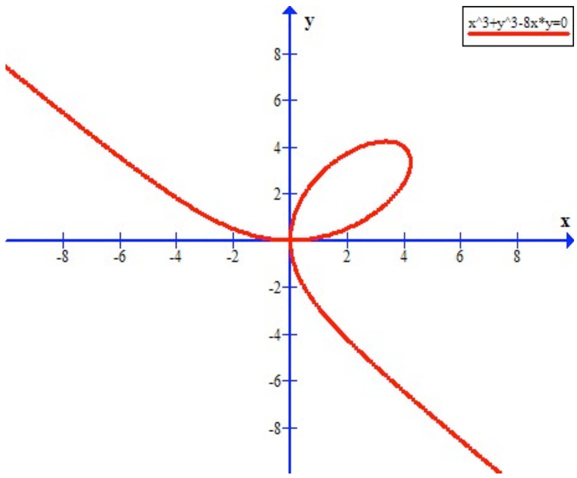
(10 parametri), che può essere una cubica come per esempio

$y^2 + x^3 + x = 0$



Tra le curve di terzo grado che più ci sono piaciute c'è il Folium di Cartesio

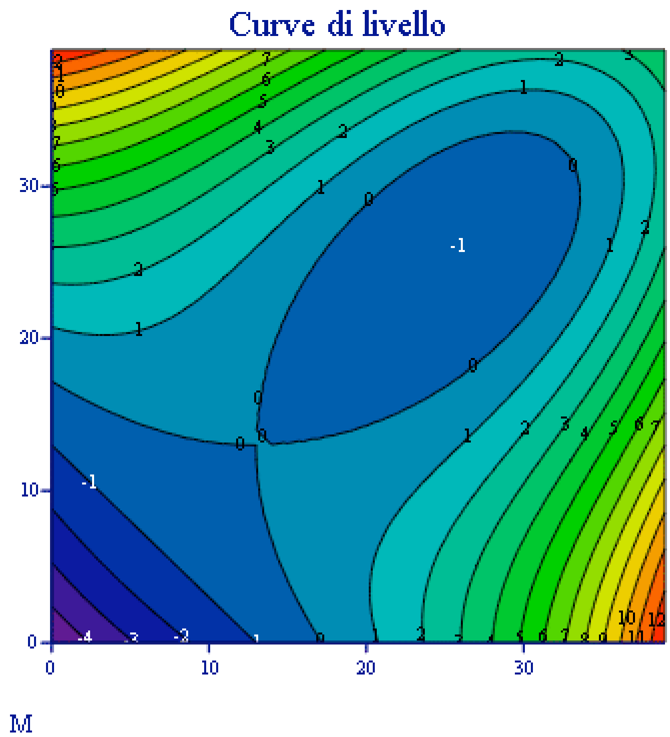
Questa è una curva della quale lo stesso Cartesio ignorava la costruzione per punti, e poiché all'epoca non venivano considerate le coordinate negative, egli pensava che il "cappio" si ripetesse in tutti e quattro i quadranti.
Il folium è caratterizzato dalla proprietà che per ogni punto della curva la somma dei cubi delle coordinate cartesiane è uguale al volume del parallelepipedo rettangolo avente per spigoli le coordinate stesse ed una lunghezza data.



Equazioni Se chiamiamo 3a la lunghezza data, il folium di Cartesio ha per equazione cartesiana:

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$

Proprietà Il folium di Cartesio è una curva con diverse proprietà. Innanzi tutto essa è simmetrica rispetto alla diagonale del primo e terzo quadrante ed ha come asintoto la retta: $x + y + a = 0$. Un´altra proprietà curiosa è che l´area del cappio è uguale all´area della regione del piano compresa fra l´asintoto e i rami infiniti della curva: entrambe sono uguali a $3a^2/2$.



Le equazioni di 3° grado che non sono curve cubiche e non hanno fiocchi

Come per le equazioni di secondo grado anche per le equazioni di terzo possiamo pensare che siano unioni di curve, ma quali?

Possono essere unione di tre rette per esempio:

$(x - y)(x + 2y)(2x + 2y + 1) = 0$ che facendo i conti diventa

$2x^3 + 4x^2y + x^2 - 2xy^2 + xy - 4y^3 - 2y^2 = 0$

Possono essere unione una retta e una conica

$(x + 2y)(x^2 + 2y^2 - 4) = 0$ che facendo i conti diventa

$x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 4x + 4y^3 - 8y = 0$

Possono essere unione una retta e una conica “strana”

$(x - y)(x^2 + y^2 + 9) = 0$

Cioè solo una retta perché la conica, in questo caso, non ha grafico.

Possono essere del tipo $(x - y)^3 = 0$ che rappresenta una retta, o meglio tre rette coincidenti.

QUANDO NON ESISTE IL SUO GRAFICO

Dopo un po' di prove ci pare che non sia possibile, perché la parte di secondo grado può non avere il grafico, ma la retta, che è di primo grado, esiste sempre.

PER CONCLUDERE
Le equazioni di terzo grado
$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ix + l = 0$
Possono essere: cubiche senza fiocco, cubiche con fiocco, unioni di tre rette, unioni di una retta e una conica, oppure solo una retta. Ma esiste sempre un loro grafico.

QUANDO NON ESISTE IL GRAFICO DI UNA CURVA?

Se la nostra idea è giusta le equazioni di grado pari possono non avere grafico, ma quelle di grado dispari, male che vada hanno come immagine grafica una retta.

CHE GRADO HA QUESTA CURVA?

Poiché ci sono 8 circonferenze e 1 ellisse questa curva è unione di 9 di grado 2, quindi ha grado 18.

CURIOSANDO SULLA FORMA DELLE CURVE

Abbiamo deciso di analizzare un po’ più a fondo alcune curve algebriche di terzo grado che ci sembravano “nascondere” un comportamento anomalo nell’origine (figura precedente)

$y^2 + x^3 + x = 0$ Ha un rigonfiamento

$y^2 + x^3 + xy = 0$ Si annoda su se stessa

$y^2 - x^3 = 0$ Ha una punta

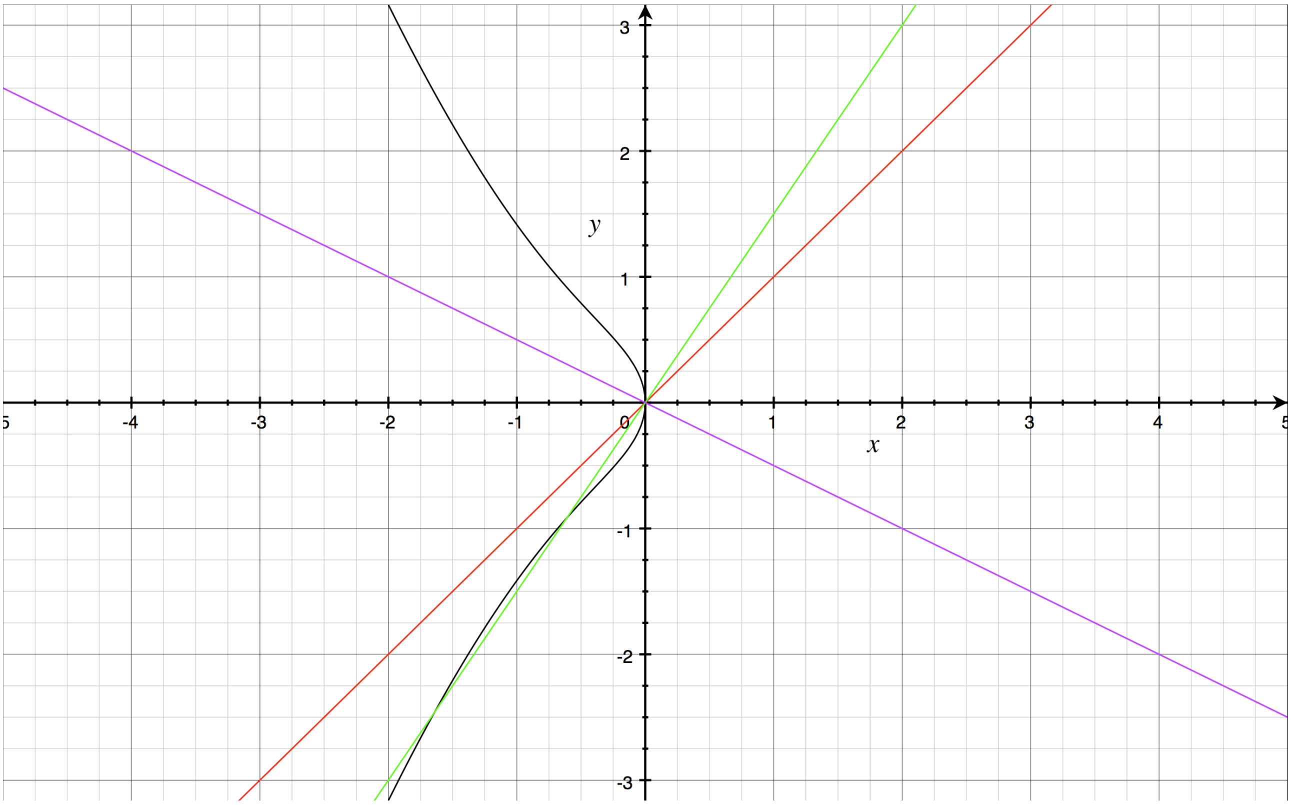
$x(x^2 + x + y) = 0$ È spezzata in due parti

Come “spia” abbiamo usato con un fascio di rette proprio centrato nell’origine, con cui abbiamo intersecato le curve

$$\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ y = kx \end{cases}$$

I risultati nei vari casi sono stati questi

Primo caso



$$\begin{cases} y^2 + x^3 + x = 0 \\ y = kx \end{cases}$$

$k^2x^2 + x^3 + x = 0$

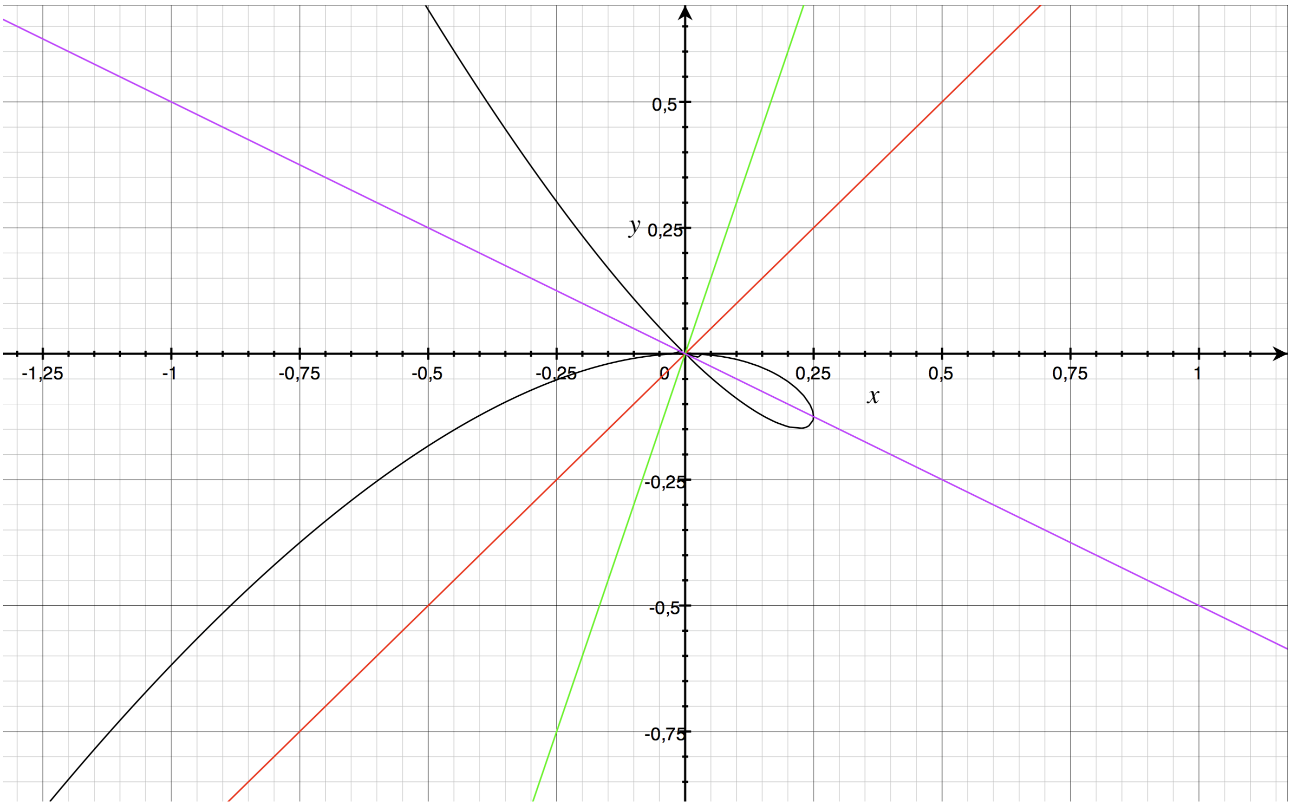
$x(k^2x+x^2+1)=0$

$x = 0$ radice semplice oppure $x = \dfrac{-k^2 \pm \sqrt{k^4-4}}{2}$

Questo è un comportamento "regolare", che ci è noto.

Tutte le rette hanno una intersezione con la curva in *x* = 0. Alcune rette hanno un'altra intersezione distinta dalla prima per particolari valori di *k*.
La retta particolare *x* = 0, che non appartiene al fascio e che è tangente alla curva, ha due intersezioni coincidenti in *x* = 0.

Secondo caso



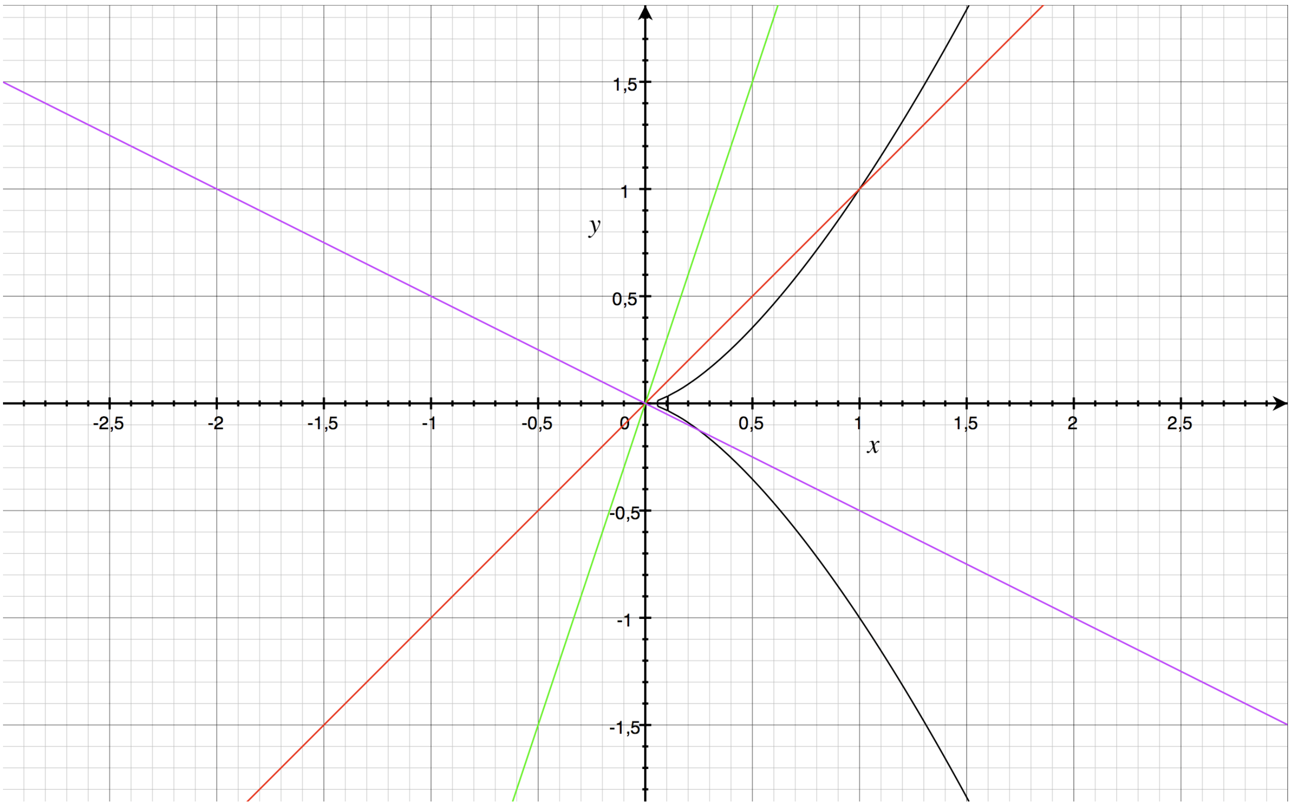
$$\begin{cases} y^2 + x^3 + xy = 0 \\ y = kx \end{cases}$$

$$k^2x^2 + x^3 + kx^2 = 0$$
$$x^2(k^2+x+k)=0$$
$$x = 0 \text{ radice doppia oppure } x = -k^2 - k$$

Questo è un comportamento che non avevamo mai notato

Tutte le rette hanno due intersezioni con la curva, tranne due rette particolari: $y = 0$ (corrispondente a $k = 0$) e $y = -x$ (corrispondente a $k = -1$), entrambe tangenti alla curva, ottenute imponendo alla retta di avere tre intersezioni coincidenti in $x = 0$

Terzo caso

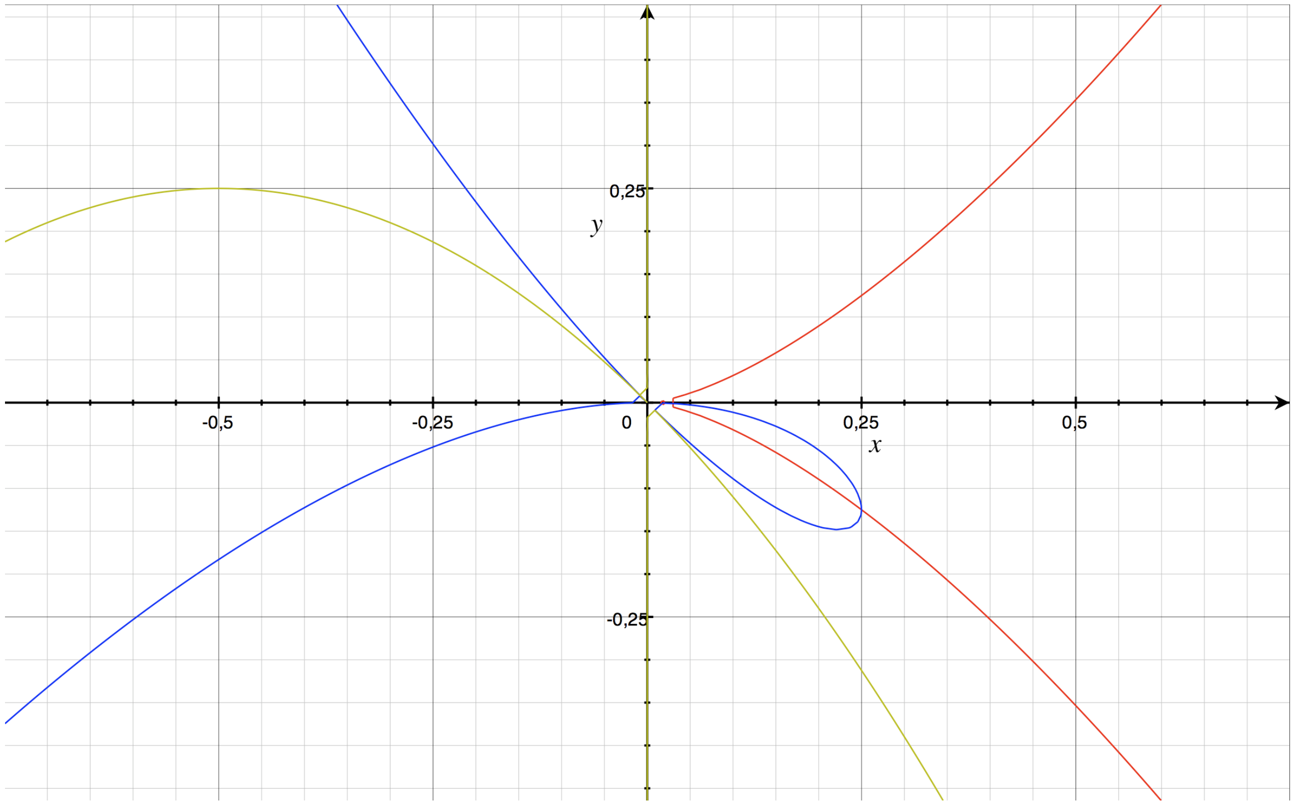


$$\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ y = kx \end{cases}$$

$$k^2x^2 - x^3 = 0$$
$$x^2(k^2-x)=0$$
$$x = 0 \text{ radice doppia oppure } x = k^2$$

Di nuovo ritroviamo che *tutte le rette* hanno due intersezioni con la curva, tranne la retta $y = 0$
che si ottiene imponendo alla retta di avere tre intersezioni coincidenti in $x = 0$.

Che differenza c'è tra i punti "strani" delle curve
$y^2 + x^3 + xy = 0$, $y^2 - x^3 = 0$, $x(x + x^2 + y) = 0$?



Abbiamo dato una "SPIEGAZIONE DELLA SARTA".
Sembra che la curva rossa e quella blu si ripieghino su se stesse, come se fossero un solo filo, formando un punto in cui "valgono come doppie" .
La curva verde, invece, passa nel punto, ma con due "fili diversi"

Quanti punti servono per individuare una curva algebrica?
Sappiamo già che per due punti passa una e una sola retta = "curva algebrica di primo grado" , ma se il grado aumenta quanti punti servono per avere una e una curva soltanto?

Noi non abbiamo ragionato sui punti, ma sui coefficienti che servono a scrivere il polinomio della curva. Infatti, se nell'equazione di una curva generica $P(x,y) = 0$ sostituiamo alle incognite i valori delle coordinate di un punto che le appartiene $A(x_A,y_A)$ otteniamo una equazione di primo grado nei coefficienti.

Abbiamo pensato che il problema dei punti fosse strettamente collegato ai coefficienti che servono per individuare il polinomio della curva. Quindi ci siamo chiesti “quanti coefficienti occorrono per individuare una curva algebrica”?
Abbiamo iniziato ad osservare i polinomi completi nei vari gradi

- Grado 1 $\quad cx + by + a = 0$
- Grado 2 $\quad fx^2 + ey^2 + dxy + cx + by + a = 0$
- Grado 3 $\quad lx^3 + ix^2y + hxy^2 + gy^3 + fx^2 + ey^2 + dxy + cx + by + a = 0$

notando che, per creare un polinomio di grado successivo n, ogni volta si deve aggiungere al massimo un polinomio omogeneo, costituito dagli n+1 termini x^ny^0, $x^{(n-1)}y^1$, $x^{(n-2)}y^2$, $x^{(n-3)}y^3$, … $x^1y^{(n-1)}$, x^0y^n
Dividendo entrambi i membri della equazione per un coefficiente non nullo (ad esempio per il coefficiente di x^n) abbiamo lavorato sul polinomio, cioè sulla curva, equivalente. Ecco la tabella che abbiamo approntato. A fronte del grado della curva vi si trovano indicati l’equazione generale corrispondente e i coefficienti minimi del suo polinomio.

Grado	***Equazione della curva*** Indichiamo con a_i il coefficiente del termine nel polinomio	Coefficienti necessari
1	$x+a_1y+a_0=0$	2
2	$x^2+a_4xy+a_3y^2+a_2x+a_1y+a_0=0$	5
3	$x^3+a_8x^2y+ a_7xy^2 +a_6y^3+a_5x^2+a_4xy+a_3y^2+a_2x+a_1y+a_0=0$	9
4	Aggiungiamo un polinomio omogeneo di grado 4 Cioè aggiungiamo 5 termini	14
n	?????	???

Ci siamo accorti del seguente meccanismo:
Se voglio una curva di grado n devo aggiungere $n + 1$ coefficienti a quella di grado precedente.

Scoperta! Posso trovare il numero di punti che servono per determinare la curva di grado n conoscendo quanti sono i punti per determinare quella di grado $n - 1$.

Per avere il numero complessivo di coefficienti si deve, dunque, fare la somma di tutti, fino a quelli che servono per il grado *n.*

Ma quanto fa $2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + (n + 1)$?

Ci siamo ricordati di una formula che abbiamo studiato l'anno precedente:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = n * (n + 1) / 2$

e l'abbiamo sfruttata spingendoci fino a $n + 1$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + n + 1 = (n + 1) * (n + 2) / 2$

e poi abbiamo sottratto ad entrambi i membri il termine 1 di troppo..

$2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + (n + 1) = 1 / 2 * (n + 1) * (n + 2) - 1$

Il numero di coefficienti per determinare una curva di grado n è dunque
$1 / 2 * (n + 1) * (n + 2) - 1$

NUMERO DI INTERSEZIONI TRA LE CURVE

Date delle curve algebriche, cioè quelle che sono date dai punti (x,y) che annullano un polinomio $P(x,y) = 0$, ci chiediamo quante intersezioni hanno. Per farlo faremo riferimento al grado delle loro equazioni; in particolare diciamo che il numero di punti di intersezione di una curva di grado n con una curva di grado m è infinito oppure se è finito è al massimo $n*m$; diciamo "al massimo", perché intendiamo che ci possono essere degli incroci non reali.

Dai vari disegni si può dedurre che se due curve sono esterne allora non hanno intersezioni e quindi facciamo alcuni esempi partendo dal fatto che il numero minimo di intersezioni è 0 e il massimo è infinito.

Usiamo per esempio due rette.
Se sono parallele hanno zero intersezioni, se mettiamo a sistema le loro equazioni questo sistema non avrà soluzioni.
Se prendiamo due rette coincidenti otteniamo le infinite intersezioni.

In particolare succede che due rette di primo grado possono:

- non avere nessun incrocio (rette parallele): $y = 2x + 5$ $y = 2x - 7$
- incrociarsi in un punto (rette incidenti): $y = 2x + 5$ $y = x + 3$
- incrociarsi in infiniti punti (rette coincidenti): $y = 2x + 5$ $y = 2x + 5$

Se due curve di primo grado si incrociassero in più di un punto avremmo due rette coincidenti quindi non esistono ulteriori possibilità.

Consideriamo i possibili incroci tra una curva di grado 1 e l'altra di grado 2. Le possibilità sono:
- non si incrociano $y = x^2 + 5$ $y = 1$
- si incrociano in un punto $y = x^2 + 5$ $y = 5$
- si incrociano in due punti $y = x^2 + 5$ $y = 7$
- hanno infinite intersezioni $x = 0$ $x^2 + xy = 0$ (che scomposta diventa $x(x + y) = 0$)

Passando ad analizzare due curve di secondo grado vediamo che esse:
- non si incrociano: $y = x^2 + 2x + 7$ $y = -x^2 + 2x + 5$
- si incrociano in un punto: $y = x^2 + 2x + 7$ $y = x^2 + x + 6$
- si incrociano in due punti $x^2 + y^2 = 16$ $y = x^2 - 4$
- si incrociano in tre punti $x^2 + y^2 = 16$ $y = x^2$
- si incrociano in quattro punti: $x^2/25 + y^2/9 = 1$ $x^2 + y^2 = 16$
- si incontrano in infiniti punti: $y - x^2 – 5 = 0$ $-y + x^2 + 5 = 0$

Dopo alcuni esempi fatti anche con curve di gradi superiori al secondo concludiamo dicendo quindi che in generale due curve di grado *n* e *m* hanno le seguenti proprietà:

- se si intersecano in un numero finito di punti esso è al massimo $n*m$;
- il numero minimo di intersezioni è pari a 0;
- hanno un numero infinito di intersezioni se sono coincidenti;
- possono avere dei punti di intersezioni non reali.