

L'elettricista pasticciona

In seguito ad un guasto alla rete elettrica, il proprietario di una grande casa ha chiamato un elettricista per risolvere il problema. L'elettricista però combina un bel pasticcio e ora l'illuminazione delle stanze funziona in questo modo:

- quando si cambia lo stato all'illuminazione di una stanza (da accesa si spegne o da spenta si accende) cambia lo stato anche dell'illuminazione delle stanze adiacenti (se è accesa si spegne e se è spenta si accende).

- due stanze sono adiacenti se hanno un'intera parete in comune.

Come deve essere fatta una casa (forma, numero e disposizione delle stanze...) affinché il proprietario riesca a illuminarla interamente accendendo le stanze ad una ad una?

Scuola secondaria di I grado - I.C. "Bagatti Valsecchi" - Varedo (MB)

Insegnante di riferimento: prof.ssa Alessandra Barlassina

Ricercatore: dott.ssa Monica Lanzani

Partecipanti: Matteo Bertolini, Ilaria Consonni, Anna Cusa, Lorenzo Ferri, Riccardo Fumagalli, Giacomo Gazi, Lorenzo Gregorutti, Gianluca Guerrini, Dragos Neacsu, Alessandro Nodari, Marco Pagani, Gaia Pilotto, Mattia Simone, Giulia Spinelli, Paola Zampar

Scuola secondaria di I grado - I.C. "Diaz" - Meda (MB)

Insegnante di riferimento: prof.ssa Nunzia Villa

Ricercatore: dott.ssa Monica Lanzani

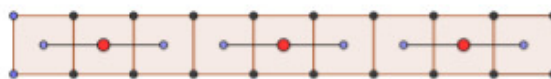
Partecipanti: Mattia Colaci, Silvia Ferrario, Laura Frigerio, Mattia Lazzaroni, Riccardo Monti, Cristian Nunez, Morgana Pauletto, Silvia Peluzzi, Paolo Pradelli, Valeria Santangelo, Marco Segatto, Alice Ventrella, Valentina Zacheo, Andrea Zagoner

Case rettangolari: i "trenini"

Quando Monica è venuta nelle nostre classi abbiamo iniziato il lavoro ragionando sulle case rettangolari, che si possono schematizzare tramite griglie.

Il primo passo sono state le case lineari, che noi abbiamo chiamato "trenini". Abbiamo subito capito che si possono incontrare solo due casi:

- se il numero delle stanze è divisibile per 3 è sufficiente partire accendendo la seconda stanza e poi continuare saltandone sempre due.



- se il numero di stanze non è divisibile per tre bisogna partire dalla prima stanza e poi continuare saltandone sempre due.

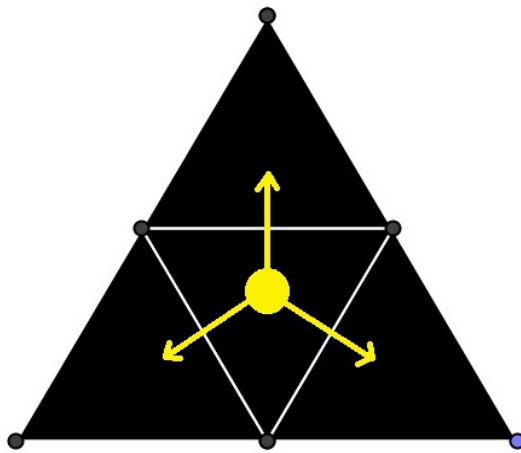


Questa prima parte è stata sviluppata parallelamente da entrambi i gruppi, dopodiché i lavori hanno preso due strade diverse che insieme hanno contribuito a dare una soluzione più ampia al problema.

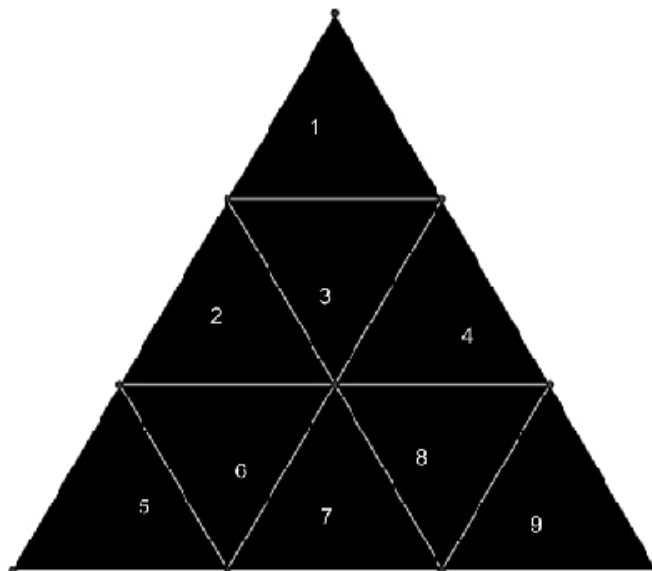
Case triangolari e circolari

Il gruppo di Varedo ha lavorato sulle case quadrate e rettangolari. Qualche risultato è arrivato (sono riusciti ad accendere alcune case quadrate come i compagni di Meda) ma, non riuscendo sempre a trovare una soluzione, ha poi deciso di concentrarsi sulle case triangolari e circolari.

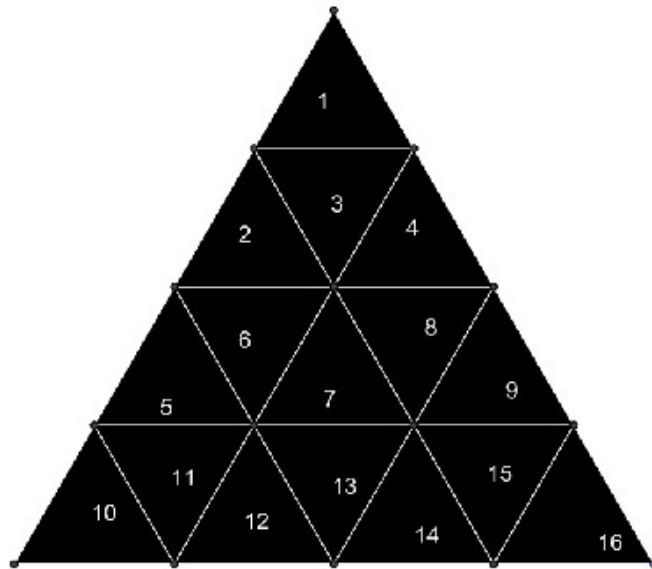
- Case triangolari: siamo partiti dalla “casa minima”, formata cioè da 4 stanze: in questo caso è sufficiente partire accendendo la stanza centrale; le altre tre sono tutte adiacenti.



Poi siamo passati alle case a tre file e siamo arrivati alla conclusione che basta accendere, una di seguito all'altra, le stanze che hanno la “punta” verso l'alto.



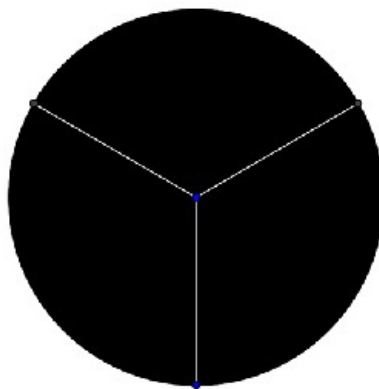
Per le case a quattro file abbiamo numerato le stanze e abbiamo visto che basta partire dalla numero 3 e poi accendere le stanze con numero uguale al numero precedente +4. Ci siamo accorti che in realtà è come accendere la stanza centrale di un modulo uguale alla “casa minima”



Dopo tutto questo lavoro, riguardando i risultati ci siamo accorti che per le case con un numero dispari di file basta accendere, una di seguito all'altra, le stanze con "la punta" verso il basso.

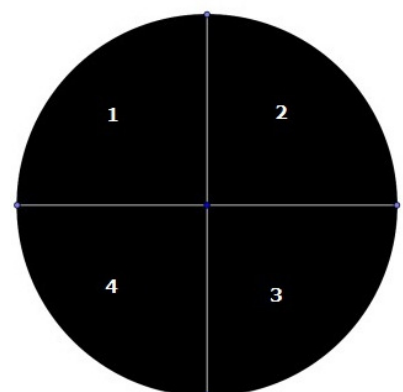
Quindi siamo riusciti ad accendere tutte le case triangolari con stanze triangolari.

- Case circolari: per rispettare le regole date dal testo del problema si è deciso di dividere le case in spicchi, come fossero delle torte; ogni spicchio sarà una stanza. Anche in questo caso siamo partiti dalla "casa minima", ovvero quella con il cerchio diviso in tre settori uguali. Basta accendere una stanza e si accende tutta la casa.

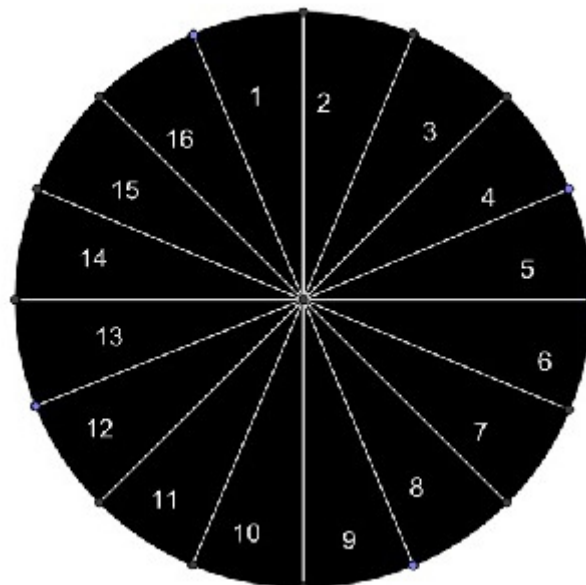


Nel caso di case con un numero di stanze multiplo di 3, è sufficiente accendere una stanza e poi continuare saltandone sempre 2 (come per i trenini multipli di 3).

Per le case divise in quattro settori bisogna seguire lo stesso procedimento della casa quadrata con quattro stanze (che siamo riusciti ad accendere, ma che in questa relazione è stato approfondito successivamente), cioè accendere le stanze in questo ordine : 1, 3, 2, 4.



Per le case circolari con un numero di stanze pari ma non multiplo di 3 si accendono in sequenza tutte le stanze con un numero dispari e poi quelle con un numero pari.



Non siamo però riusciti a trovare una regola per le case con un numero di stanze dispari e non multiplo di 3.

Case rettangolari più complesse

Il gruppo di Meda, invece, è riuscito a trovare alcune regole per accendere delle case rettangolari con più file di stanze, e tra queste anche delle case quadrate.

Bisogna però prima fare una piccola parentesi sui metodi che abbiamo utilizzato, che hanno subito una notevole evoluzione.

- Carta e penna: lavorare con carta e penna segnando le case accese e spente è stato il primo metodo. Questo è stato subito abbandonato in quanto si riduceva ad andare per tentativi ed era poco efficace.
- Tabelle: siamo quindi passati ad utilizzare delle tabelle per registrare i cambiamenti di stato subiti dalle stanze. Per farlo abbiamo assegnato dei numeri alla griglia che rappresentava le stanze dell'appartamento, riportato nella prima riga di una tabella i numeri e inserito una s (spento) nella seconda riga della colonna per rappresentare lo stato iniziale.

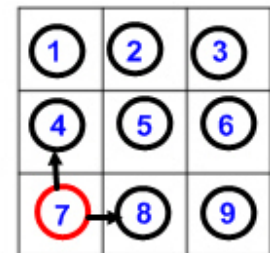
1	2	3	4	5	6	7	8	9
s	s	s	s	s	s	s	s	s

1	2	3
4	5	6
7	8	9

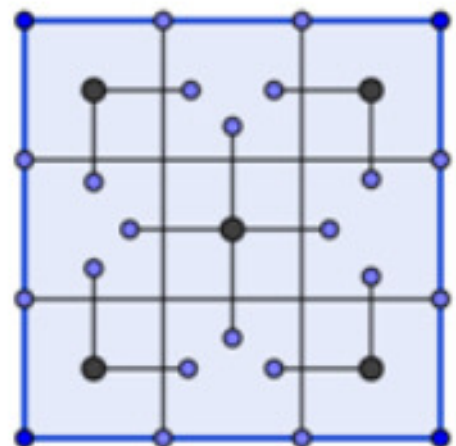
Ogni riga rappresenta un passaggio e una **A rossa** indica la stanza che viene accesa direttamente e una **a rossa** indica le stanze che si accendono perché adiacenti a quella accesa.

Ecco una casa 3x3 completamente accesa con la tabella che indica i vari passaggi.

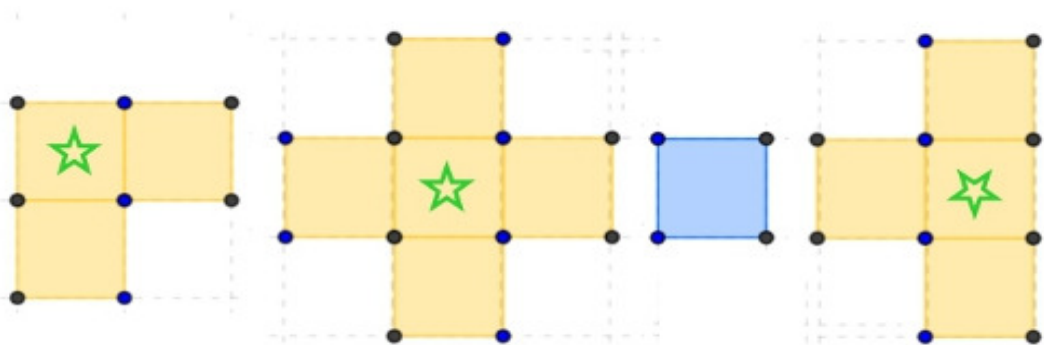
1	2	3	4	5	6	7	8	9
s	s	s	s	s	s	s	s	s
s	a	s	a	A	a	s	a	s
A	s	s	s	a	a	s	a	s
a	a	A	s	a	s	s	a	s
a	a	a	s	a	a	s	s	A
a	a	a	a	a	a	A	a	a



- Rami e pallini: infine abbiamo trovato un altro modo per rappresentare i diversi casi. Quando si accende una stanza si disegna un pallino sulla stanza; le stanze adiacenti che si accendono di conseguenza vengono collegate al pallino tramite delle ramificazioni che terminano a loro volta con dei pallini. Quando il numero di pallini in una casella è dispari la casella è accesa, invece se è pari è spenta. Nell'immagine è rappresentata una casa 3x3 completamente accesa. Questo metodo ci è sembrato facile da usare e efficace, e lo abbiamo quindi impiegato per studiare le case quadrate.



- Forme base: un altro metodo efficace è stato quello di usare delle forme base, che abbiamo notato nei primi tentativi. Per una stanza che non sta sul bordo di una casa la forma base è la croce, in quanto fa sì che le stanze adiacenti si accendano formando una croce. Per una stanza che sta sul bordo ma non sull'angolo di una casa la forma base è una T (in tutte e quattro le direzioni), mentre per una stanza sull'angolo la forma base è una L (in tutte e quattro le direzioni). Queste forme sono state utili per le case rettangolari.

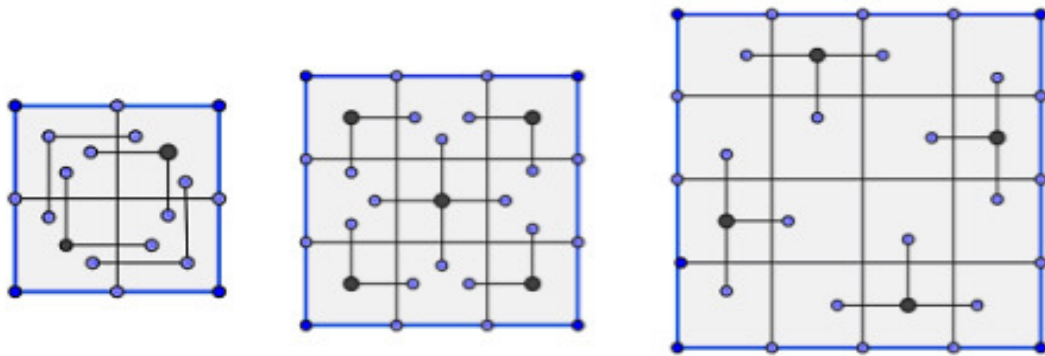


Passiamo ora a vedere cosa siamo riusciti a scoprire.

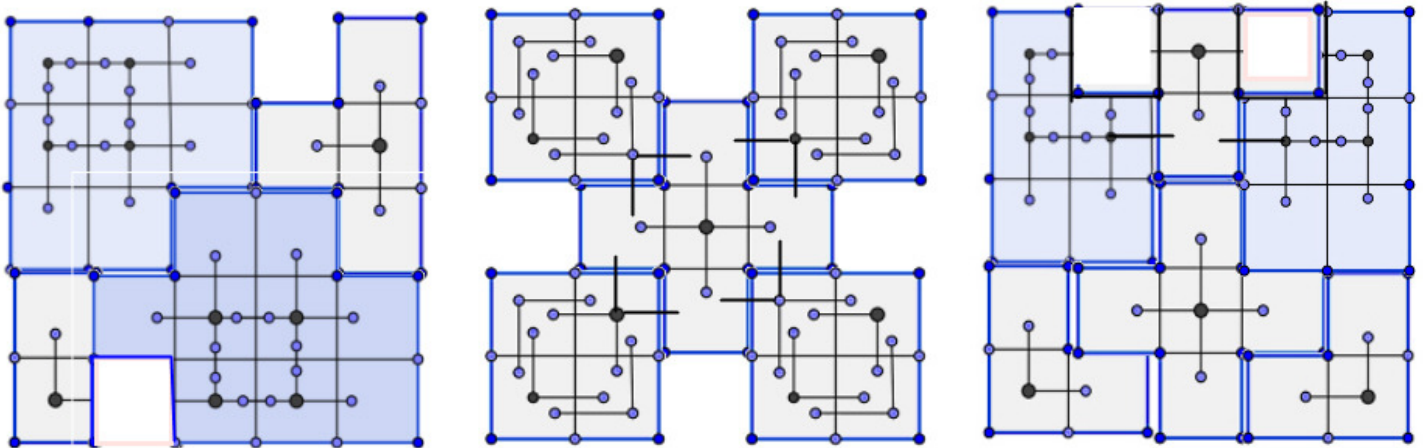
- Case quadrate

Noi ragazzi del gruppo di Meda siamo riusciti ad accendere le case quadrate di lato 2, 3 e 4.

- ⤴ 2x2: basta accendere una sola volta tutte le stanze. Dato che l'ordine non conta, abbiamo fatto un'associazione con la proprietà commutativa delle operazioni: per le case 2x2 vale quindi la proprietà commutativa.
- ⤴ 3x3: basta accendere le stanze all'angolo e poi quella al centro. Anche in questo caso vale la proprietà commutativa.
- ⤴ 4x4: si parte dalla seconda stanza di uno qualunque dei bordi della casa. Dopodiché si procede in senso orario o antiorario lungo il bordo accendendo sempre la terza che si trova dopo quella accesa. Questa mossa è stata ribattezzata dal gruppo di Varedo "la mossa del cavallo" in quanto riproduce i movimenti del cavallo negli scacchi.

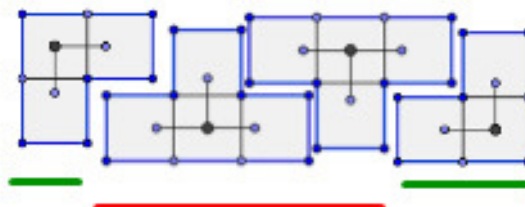


- ⤴ 5x5: dopo vari tentativi, questo quadrato non è mai stato acceso completamente. Ecco alcuni risultati



- Case rettangolari 2x

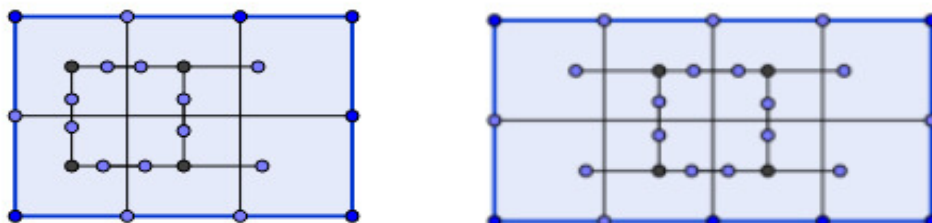
Con l'aiuto delle forme base siamo riusciti a costruire delle case con due file di stanze (2x). Iniziando con una L, accostando poi tante T a piacere (una dritta e una ribaltata) e concludendo con un'altra L siamo riusciti a risolvere il problema per case con un numero di stanze per ogni fila pari a $4n+3$



Per trovare altre soluzioni con case $2 \times$ abbiamo poi sfruttato le espansioni.

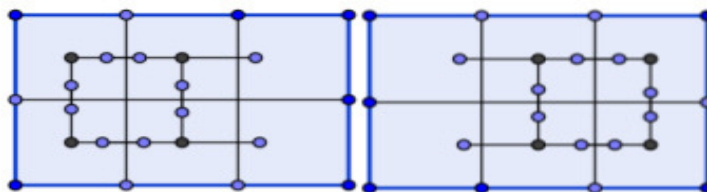
Che cos'è un'espansione? Abbiamo notato che mentre la forma base a croce, anche se viene accostata ad altre forme, non le influenza, le altre due forme base (T e L) accostate ad altre stanze, o case, le influenzano facendo accendere le stanze adiacenti. Un'espansione è quindi l'unione della forma base con altre stanze che vengono illuminate dalla forma base stessa.

Tramite le espansioni del quadrato 2×2 solo su due lati opposti si è riusciti ad accendere le case 2×3 , 2×4 .

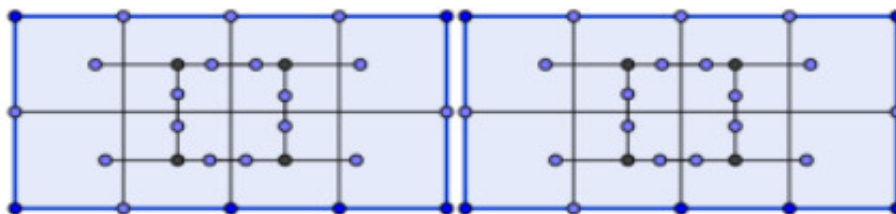


Accostando poi questi moduli tra loro abbiamo scoperto una soluzione del problema anche per le seguenti case.

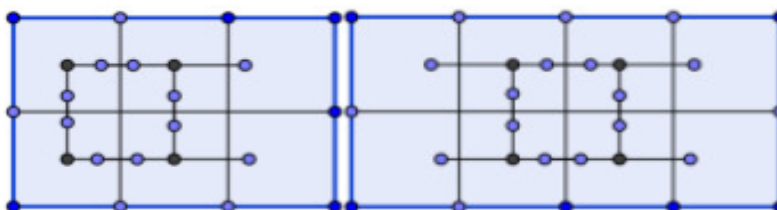
↗ 2×6



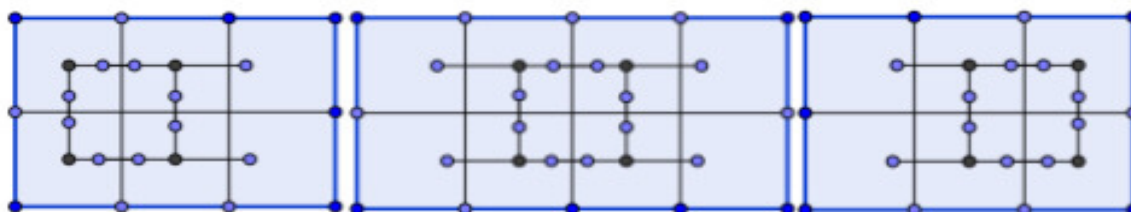
↗ $2 \times 4n$



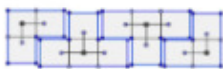
↗ $2 \times (4n+3)$ (anche se già trovate con le forme base)



↗ $2 \times (4n+6)$

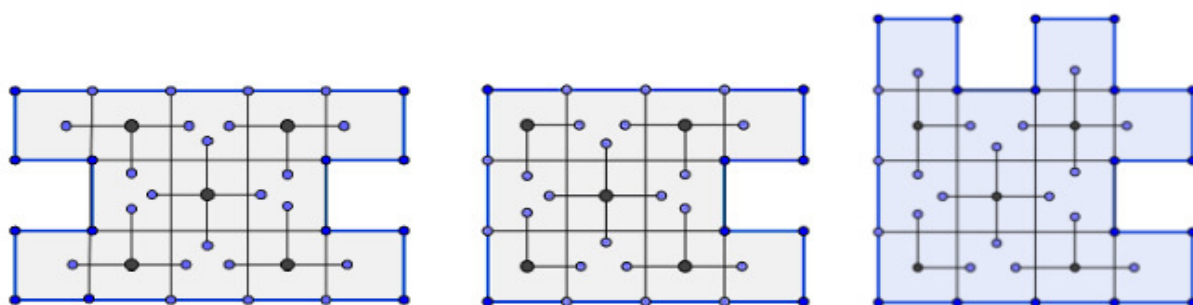


Per riassumere il tutto e per vedere a che punto eravamo della risoluzione abbiamo compilato una tabella dei casi possibili per n minore di 15.

I	Case 2 _x				
					
n	$2n+1$	$4n+3$	$4n$	$4n+3$	$4n+3-2$
1	3	7	4	7	10
2	5	11	8	11	14
3	7	15	12	15	18
4	9	19	16	19	22
5	11	23	20	23	26
6	13	27	24	27	30
7	15	31	28	31	34
8	17	35	32	35	38
9	19	39	36	39	42
10	21	43	40	43	46
11	23	47	44	47	50
12	25	51	48	51	54
13	27	55	52	55	58
14	29	59	56	59	62
15	31	63	60	63	66

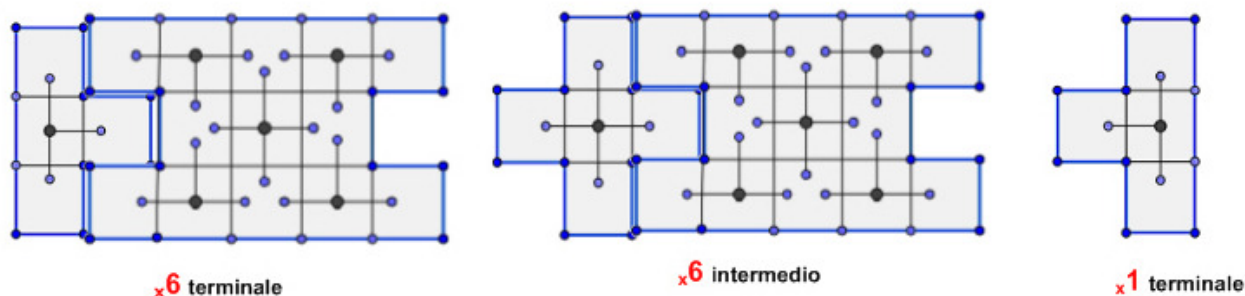
- Case rettangolari 3x

Visti i risultati raggiunti tramite l'espansione del quadrato 2x2, abbiamo deciso di iniziare a lavorare sulle case 3x proprio dalle espansioni del quadrato 3x3. Espandendo quest'ultimo su due lati opposti abbiamo ottenuto delle forme base 3x4 e 3x5.

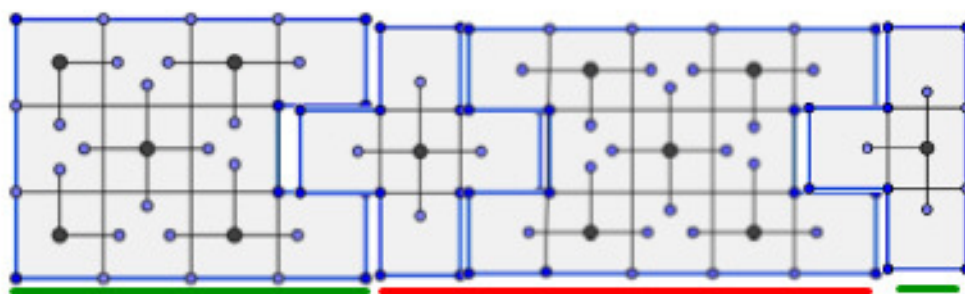


Queste nuove forme base sono state combinate a loro volta con le forme base primarie per ottenere altre forme base: 3x6 intermedio, 3x6 terminale e 3x5. Grazie a questi moduli siamo riusciti ad accendere le case:

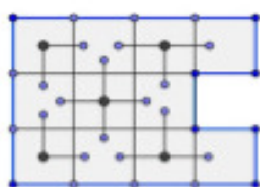
- ⤴ 3x(6n+1) utilizzando 3x6 terminale, T terminale e un numero variabile di 3x6 intermedio;



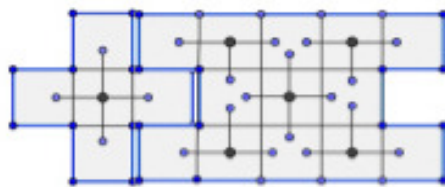
- ⤴ $3 \times (6n+5)$ utilizzando 3×4 terminale, **T** terminale e un numero variabile di 3×6 ;



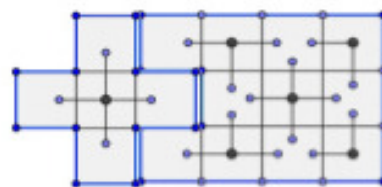
- ⤴ $3 \times (6n+9)$ utilizzando 3×4 terminale, 3×5 terminale e un numero variabile di 3×6 intermedio.



x4 terminale



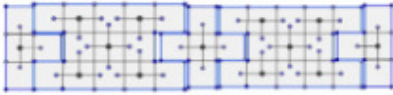
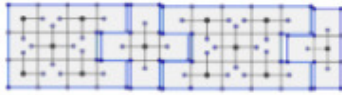
x6 intermedio



x5 terminale

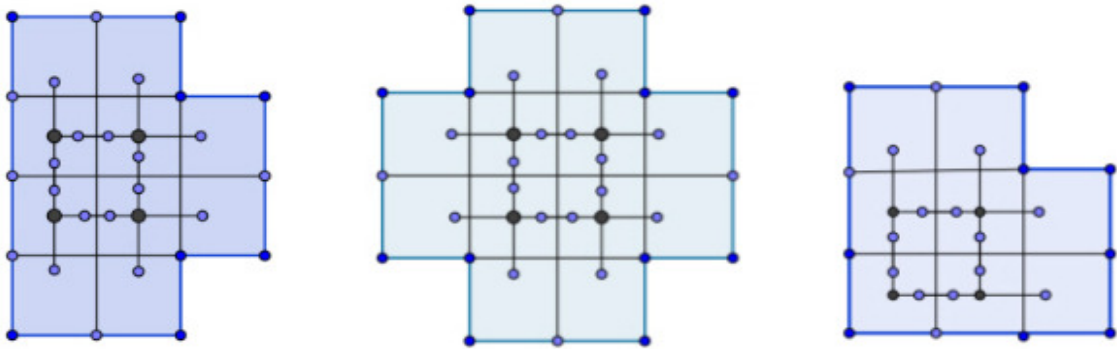
Alcuni di noi hanno trovato anche dei moduli 3×12 , ma si è scoperto che tutte le case ottenute con questo modulo si riescono a formare anche con il modulo 3×6 .

Si possono vedere i risultati raggiunti tramite la tabella che ci fa vedere tutte le possibili combinazioni di stanze con n minore di 15.

	Case 3 _x			
				
n	$6n+1$	$6n+5$	$6n+9$	$12n+7$
1	7	11	15	19
2	13	17	21	31
3	19	23	27	43
4	25	29	33	55
5	31	35	39	67
6	37	41	45	79
7	43	47	51	91
8	49	53	57	103
9	55	59	63	115
10	61	65	69	127
11	67	71	75	139
12	73	77	81	151
13	79	83	87	163
14	85	89	93	175
15	91	95	99	187

- Case rettangolari 4x

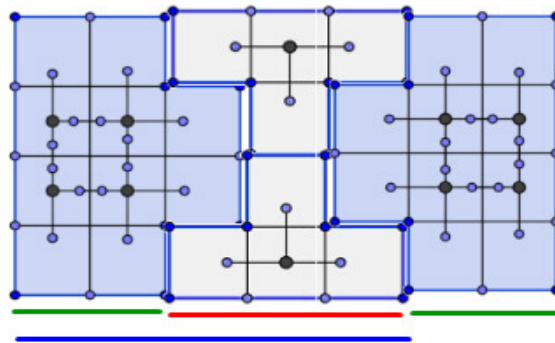
Espandendo il quadrato 2x2 è possibile ottenere forme simili a quelle di base, cioè forme a T, a croce e a L.



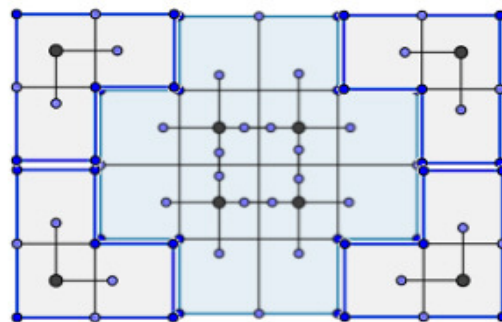
Con queste forme, abbinate a forme base semplici, sono state costruite alcune case di altezza 4:

⤴ $4 \times [3n + 2(n+1)]$ o $4 \times (5n + 2)$

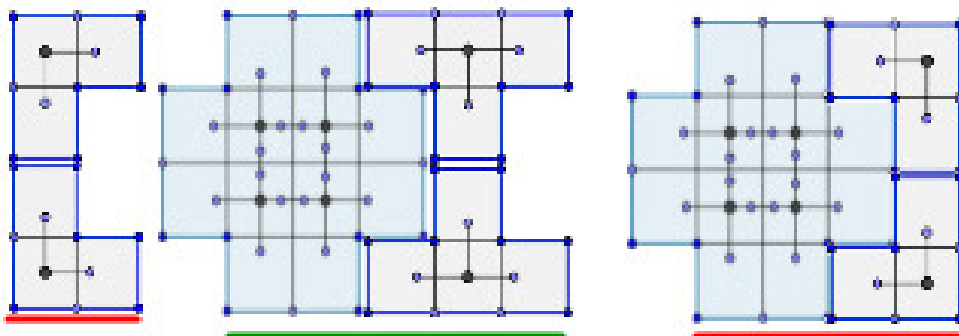
$4 \times 7 \leftarrow 3n + 2(n+1) \leftarrow 5n + 2$



⤴ 4×6



⤴ $4 \times (5n + 6)$



La casa più articolata

Un piccolo matematico di Meda poi, essendo anche molto creativo, dopo aver studiato combinazioni e formule, ha cercato di scrivere con i moduli ed è riuscito a comporre la scritta MATH.en.JEANS con le stanze tutte accese. Bravo!

